

Algorithmen des Wissenschaftlichen Rechnens

Semestralklausur am 10. Juli 2003

1 Schnelle Sinustransformation

Wir betrachten die diskrete Fouriertransformation

$$F_k := \frac{1}{2N} \sum_{n=-N+1}^N f_n \omega_{2N}^{-nk} \quad \text{für } k = -N+1, \dots, N.$$

Dafür sei ein Algorithmus $\text{FFT}(f, N)$ gegeben, der die Koeffizienten F_k effizient über eine Schnelle Fouriertransformation berechnet und sie – in Form eines Arrays – als Ergebnis liefert.

- a) Die $2N$ Eingabedaten f_{-N+1}, \dots, f_N , seien alle reell ($f_n \in \mathbb{R}$) und in folgender Weise symmetrisch:

$$f_{-n} = -f_n, \quad \text{insbes. } f_0 = f_N = f_{-N} = 0.$$

Zeigen Sie, dass dann gilt:

$$F_k = \frac{-i}{N} \sum_{n=1}^{N-1} f_n \sin\left(\frac{\pi nk}{N}\right).$$

- b) Beschreiben Sie (z.B. in Pseudocode) einen Algorithmus $\text{FST}(g, N)$ der Komplexität $O(n \log n)$, der zu den im Array g übergebenen reellen Zahlen g_n ($n = 1, \dots, N-1$) die Koeffizienten

$$G_k := \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N-1} g_n \sin\left(\frac{\pi nk}{N}\right), \quad \text{für } n = 1, \dots, N-1$$

berechnet.

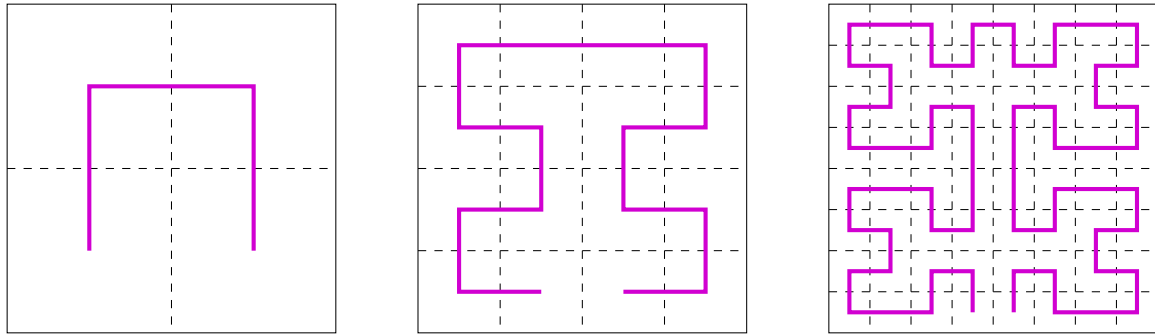


Abbildung 1: Die ersten drei Iterationen der Hilbertkurve nach Moore

2 Algebraische Darstellung der Hilbertkurve nach Moore

Wenn die Zahl $t \in [0, 1[$ als Quarternärzahl gegeben ist, also

$$t = 0.q_1q_2q_3q_4 \dots,$$

dann lässt sich die zur (gewöhnlichen) Hilbertkurve gehörige Abbildung $h(t)$ darstellen als

$$h(0.q_1q_2q_3q_4 \dots) = H_{q_1} \circ H_{q_2} \circ H_{q_3} \circ H_{q_4} \circ \dots \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1)$$

mit den Operatoren

$$\begin{aligned} H_0 &:= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & H_1 &:= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ H_2 &:= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} & H_3 &:= \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

- Für die Hilbertkurve nach Moore (siehe Abb. 1) lässt sich ebenfalls eine solche algebraische Darstellung angeben.
Formulieren Sie analog zu Gleichung 1 eine algebraische Darstellung $h_M(t)$ der Hilbert-Moore-Kurve, ggf. unter (zusätzlicher) Verwendung von neuen Operatoren H_0^*, \dots, H_3^* .
- Berechnen Sie den Funktionswert $h_M\left(\frac{1}{8}\right)$.
- Gegeben sei die in der Vorlesung behandelte Funktion `hilbertfun(t, depth)`, die zum Parameter t (in `t` übergeben) den Wert der Hilbertfunktion $h(t)$ berechnet (rekursiv gemäß Gleichung 1 mit maximaler Rekursionstiefe `depth`, d.h. maximal `depth` Quarternärstellen werden berücksichtigt).
Schreiben Sie eine Funktion `moore(t, depth)` (in Pseudocode), die unter Verwendung von `hilbertfun` den Funktionswert der Hilbert-Moore-Kurve für den Parameter t berechnet (mit maximaler Rekursionstiefe `depth`).

3 Hierarchische Basen

Die Funktion $f(x)$ habe an den Stützstellen $x_j := \frac{j}{8}, j = 0, \dots, 8$, die Werte

$i =$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$y_i =$	0	3	4	4	4	6	8	4	0

Zwischen je zwei Stützstellen sind die Werte der Funktion durch den linearen Interpolanden der beiden Stützstellen definiert.

In den in der Vorlesung definierten, stückweise linearen Basisfunktionen $v_i(x), i = 1, \dots, 7$, hat die Funktion also die Darstellung

$$f(x) = \sum_{i=1}^7 y_i v_i(x).$$

Bei der Darstellung durch hierarchische Basisfunktionen (wie in der Vorlesung) werden in einem ersten Schritt die geradzahlig nummerierten Basisfunktionen durch doppelt so breite Basisfunktionen ersetzt, die verbleibenden Basisfunktionen bleiben unverändert. Anschließend werden die Basisfunktionen neu geordnet: zuerst die geraden, dann die ungeraden.

In weiteren Schritten wird diese Transformation auf die verbreiterten Basisfunktionen rekursiv angewandt, wobei die restlichen Basisfunktionen unverändert bleiben und ihre Nummerierung beibehalten.

- Geben Sie für die oben definierte Funktion $f(x)$ für jeden Rekursionsschritt die Darstellung in der transformierten Basis an.
- Bei der in der Vorlesung beschriebenen Integration einer (eindimensionalen) Funktion $f(x)$ nach Archimedes wird das Integral

$$\int_0^1 f(x) dx$$

durch eine endlich Summe von Dreiecksflächen approximiert, wobei der Abbruch der Rekursion durch einen Parameter ϵ gesteuert wird.

Bestimmen Sie für die oben definierte Funktion $f(x)$ die Dreiecksflächen D_1, D_2, \dots , wobei die Nummerierung der Berechnungsreihenfolge entsprechen soll. Geben Sie die berücksichtigten Dreiecksflächen und die Gesamtsummen an für $\epsilon = 1, \frac{1}{10}, 10^{-8}$.

4 Mehrgitterverfahren

Beschreiben Sie die einzelnen Schritte eines V-Zyklus des Mehrgitterverfahrens für die Gleichung $Ax = b$ mit hierarchischen Basistransformationen.