

Algorithmen des Wissenschaftlichen Rechnens

– Semestral Klausur –

Aufgabe 1: Quarter-Wave-Even DCT (ca. 7+3+3 Punkte)

Durch Einsetzen der Symmetriebeziehung $f_{2N-n-1} = f_n, f_n \in \mathbb{R}$, in die Fouriertransformation wurde in der Vorlesung die Quarter-Wave-Even DCT eingeführt:

$$\tilde{F}_k = \frac{1}{2N} \sum_{n=0}^{2N-1} f_n \omega_{2N}^{-k(n+\frac{1}{2})} \quad f_{2N-n-1}=f_n \quad \tilde{F}_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f_n \cos\left(\frac{\pi k(n+\frac{1}{2})}{N}\right)$$

Dabei gilt für die Koeffizienten \tilde{F}_k die Beziehung

$$\tilde{F}_{2N-k} = -\tilde{F}_k \quad \text{für } k = 1, \dots, N-1 \quad (\text{also } \tilde{F}_N = 0).$$

a) Leite entsprechend die Rücktransformation her:

$$f_n := \sum_{k=0}^{2N-1} \tilde{F}_k \omega_{2N}^{k(n+\frac{1}{2})} \quad \tilde{F}_{2N-k} = -\tilde{F}_k \quad f_n = \tilde{F}_0 + 2 \sum_{k=1}^{N-1} \tilde{F}_k \cos\left(\frac{\pi k(n+\frac{1}{2})}{N}\right).$$

- b) Formuliere einen Pseudocode, der zu einem gegebenen Koeffizienten-Vektor $(\tilde{F}_0, \tilde{F}_1, \dots, \tilde{F}_{N-1})$ den Daten-Vektor $(f_0, f_1, \dots, f_{N-1})$ effizient berechnet. Geeignete Funktionen *QWFFT* und *IQWFFT* zur schnellen Berechnung der (inversen) Quarter-Wave-Fouriertransformation seien gegeben.
- c) Beschreibe, wie sich die inverse Quarter-Wave-Even DCT aus Aufgabe b effizient für zwei Datensätze gleichzeitig durchführen lässt.

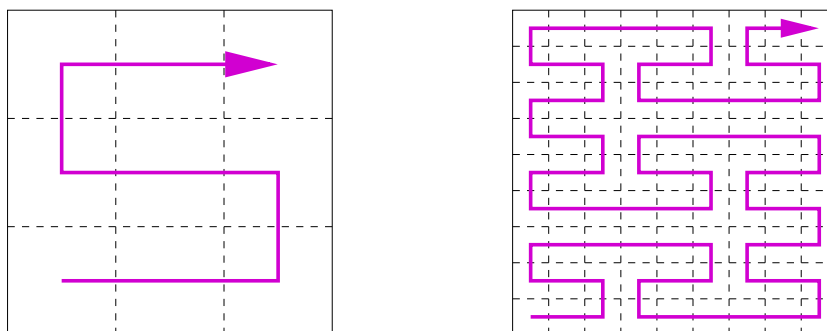


Abbildung 1: Die ersten beiden Iterationen der quer geschlängelten Peanokurve – die Durchlaufrichtung ist jeweils durch den Pfeil angegeben

Aufgabe 2: Peanokurven (ca. 7+7 Punkte)

In Abbildung 1 sind die ersten beiden Iterationen einer quer geschlängelten Peanokurve abgebildet. Gesucht ist eine Beschreibung der Kurve durch eine Grammatik, sowie durch eine Arithmetisierung.

- Entwickle analog zu den in den Vorlesungen behandelten Grammatiken eine Grammatik, die die Iterationen der quer geschlängelten Peanokurve erzeugt.
- Die Arithmetisierung dieser Peanokurve erfolgt ebenfalls analog zur Vorlesung. Vorgegeben sei die Parameter-Darstellung $q(t)$ der Kurve gemäß

$$q(0_9.n_1n_2n_3n_4\dots) = Q_{n_1} \circ Q_{n_2} \circ Q_{n_3} \circ Q_{n_4} \circ \dots \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

wobei $t = 0_9.n_1n_2n_3n_4\dots$ die Darstellung des Parameters t im Nonalsystem ist. Gebe die Operatoren Q_0, Q_1, Q_3 und Q_4 an!

Aufgabe 3: Adaptive Integration (ca. 5+3 Punkte)

Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \sqrt{1-x^2}, \quad x \in [-1, 1],$$

deren Graph gerade eine halbe Kreislinie beschreibt.

- Berechne durch adaptive Quadratur nach Archimedes das Integral

$$f(x) = \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx,$$

also die Fläche des halben Einheitskreises. Gebe dabei die berechneten hierarchischen Überschüsse an. Es sollen nur solche Teilflächen in die Berechnung eingehen, deren Hütchenbreite mindestens $\frac{1}{2}$ und deren Fläche größer als $\frac{1}{20}$ ist.

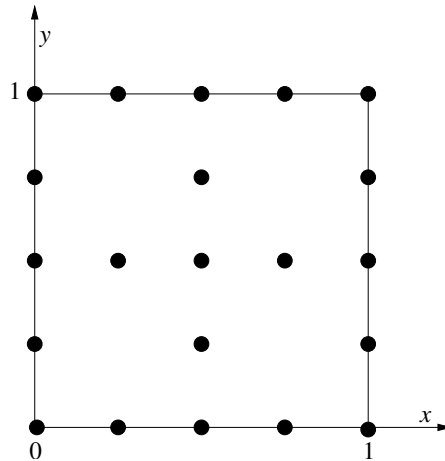


Abbildung 2: Nur an diesen Punkten soll die zu integrierende Funktion in Aufgabe 4 ausgewertet werden.

- b) Verwende nun überall, wo dies korrekt ist, für die Flächenberechnung statt einer Hütchenfläche die Fläche eines gleich hohen Parabelbogens. Warum ist die Flächenberechnung nun genauer?

Bei der Berechnung dürfen folgende Näherungen verwendet werden:

$$\sqrt{3} \approx 1.73 \quad \sqrt{7} \approx 2.65 \quad \sqrt{15} \approx 3.87$$

Außerdem ist $\frac{\pi}{2} \approx 1.57$.

Aufgabe 4: Integration mit der Kombinationstechnik (ca. 5 Punkte)

Berechne das zweidimensionale Integral

$$\int_0^1 \int_0^1 xy(1-x)(1-y) \, dx dy, \quad \text{exakter Wert: } \frac{1}{36},$$

mit Hilfe der in der Vorlesung besprochenen Trapezregel-Kombinationstechnik. Die erhaltene Integrationsformel soll die zu integrierende Funktion nur an den Punkten auswerten, die in Abbildung 2 dargestellt sind.

Aufgabe 5: Hierarchisierung von Funktionen (ca. 6 Punkte)

Eine Funktion $f(x), x \in [0, 1]$ sei durch ihre Darstellung in der Knotenbasis gegeben, d.h. durch den Vektor der Funktionswerte

$$f(i \cdot 2^{-n}) = f_i, \quad \text{für } i = 1, \dots, 2^n - 1.$$

An den Rändern sei die Funktion f gleich 0, also $f(0) = f(1) = 0$.

Schreibe einen Algorithmus, der den gegebenen Vektor der f_i in die in der Vorlesung beschriebene Darstellung mittels einer hierarchischen Basis umwandelt.

Die Ränder sollen nicht gespeichert werden, aber die hierarchischen Koeffizienten sollen wie in der Vorlesung in hierarchischer Reihenfolge zurückgegeben werden.

Zur Punktwertung

Die Benotung der Klausur erfolgt relativ zu einer vollen Punktzahl von 40 Punkten.
Wir wünschen viel Erfolg!