

Vorkurs Mathematik für Informatiker

-- 4 Mengen --

Thomas Huckle
Stefan Zimmer (Stuttgart)

25.9.2014

Was ist eine Menge?

Beispiele: \mathbb{N} , \mathbb{R} , Autos, Ausländer (?), ...

Saubere Definition einer Menge ist schwierig!
Erst Grundmenge definieren?

Pragmatischer Ansatz (als Informatiker):

Alles, was aussieht wie eine Menge, ist eine Menge
(im Gegensatz zu Nutella)

Wichtig für uns: Wie geht man mit Mengen um, also
Definition einer Menge in Programm und Algorithmen.

Eigenschaften von Mengen

Mengen bekommen abkürzende Namen:

$A, B, C, \mathbb{N}, \mathbb{R}, \mathbb{M}, \mathbb{N}, \mathbb{P}, \mathcal{P}, \dots$

Für ein bestimmtes „**Ding**“ x und eine Menge A können wir feststellen, ob x ein **Element** von A ist:

$$x \in A \quad \text{oder} \quad x \notin A$$

Offensichtliche Verwandtschaft zur Aussagenlogik:

\in	Ja	oder	Nein
	wahr, true, 1	oder	falsch, false, 0

Ev. unentschieden? Fuzzy? Z.B. Menge der Deutschen

Exkurs: Fuzzy-Menge

Menge der Deutschen:

Man kann 100% Deutscher sein, oder 0%, aber auch 50% usw..

d.h. die Mitgliedschaft eines Elementes x in der Menge D wird beschrieben z.B. durch die Werte

0=kein, 0.5 = unentschieden , 1=voll
oder allgemeiner durch eine Funktion

$m(x)$, mit $0 \leq m(x) \leq 1$

d.h. x ist Mitglied in der Menge D vom Grad $m(x)$

$m(x)$ als Grad der „Deutschheit“

Person:	Hans Müller	Wladimir Putin	Valery Miller
Grad:	1	0	0.5

Notation von Mengen

Einfache Mengen schreiben wir durch Angeben aller Elemente:

$$A := \{1, 2, 3\};$$

oder mittels Abkürzung

$$A := \{1, 2, 3, \dots, 10000\};$$

oder

$$\mathbb{Z} := \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\};$$

Notation II

Zur besseren Eindeutigkeit:

$$B := \{x \in \mathbb{N} : 1 \leq x \leq 10000\}$$

Doppelpunkt „:“ ist zu lesen als „für die gilt“

Menge der Zweierpotenzen:

$$C := \{x \in \mathbb{N} : \exists i \in \mathbb{N}_0 : x = 2^i\},$$

oder kürzer:

$$C := \{2^i : i \in \mathbb{N}_0\},$$

Speziell die leere Menge $\emptyset = \{ \}$ ist definiert durch

$$\forall x : x \notin \emptyset$$

Vergleich von Mengen

Die Anzahl der Elemente (Mächtigkeit) einer Menge A bezeichnen wir mit $|A|$

Beispiel:

$$|\emptyset| = 0$$
$$|\{1,2,4,6\}| = 4$$

Mächtigkeit von Mengen führt auf \mathbb{N} :

$$|\emptyset| = 0, \quad |\{a\}| = 1, \quad |\{a,b\}| = 2, \quad \dots$$

Zwei Mengen sind gleich, wenn sie genau dieselben Elemente enthalten:

$$\forall x: \quad \{x \in A \Leftrightarrow x \in B\}$$

Für alle x gilt: x ist in A genau dann wenn x ist in B

So sind die Mengen $\{1,2,3\}$ und $\{2,3,1\}$ gleich.

Teilmengen

A heißt Teilmenge von B, in Zeichen $A \subseteq B$, wenn alle Elemente von A auch Elemente von B sind:

$$\forall x: \{x \in A \Rightarrow x \in B\}$$

Für alle x gilt: ist x in A dann ist x auch in B

Beispiele:

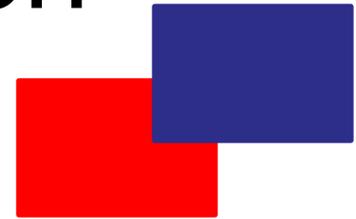
$$\{1\} \subseteq \mathbb{N}$$

$$1 \in \mathbb{N}$$

aber nicht $1 \subseteq \mathbb{N}$; $\{1\} \in \mathbb{N}$

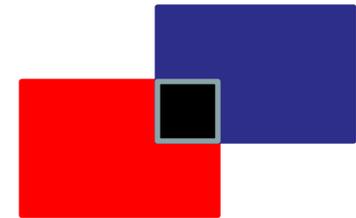
Mengenoperationen

Wir definieren



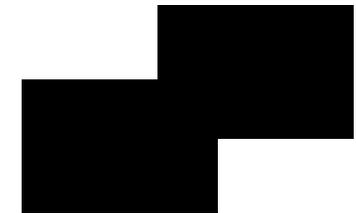
die Schnittmenge $A \cap B$:

$$x \in A \cap B : \Leftrightarrow ((x \in A) \wedge (x \in B))$$



Die Vereinigungsmenge $A \cup B$:

$$x \in A \cup B : \Leftrightarrow ((x \in A) \vee (x \in B))$$



Die Differenzmenge $A \setminus B$

$$x \in A \setminus B : \Leftrightarrow ((x \in A) \wedge \neg(x \in B))$$



Gesetze für Mengenoperationen

Für \cap und \cup gelten ähnliche Gesetze wie für \wedge und \vee .

z.B.: $A \cap B = B \cap A$

$$(A \cap B) \cap C = B \cap (A \cap C)$$

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

wobei $\overline{}$ der Strich das Komplement bezeichnet.

Grundmenge G:



Das kartesische Produkt

Das kartesische Produkt $A \times B$ enthält alle Paare von Elementen aus A und B :

$$A \times B := \{(a, b) : a \in A, b \in B\}.$$

$A \times A$ geht natürlich auch

und $A \times B \times C$ ist analog definiert als Triple aus A, B, C

Beispiel: Spielpaarungen in der Bundesliga
(natürlich ohne (a, a))

Wichtig für Funktionen $(x, f(x))$ und Relationen (x, y)
und für Tabellen (Teilmengen des kartesischen Produkts)

Potenzmenge

Mengen können auch wieder Elemente anderer Mengen sein:

$$A := \{\{1,2,3\}, 4, \emptyset\};$$

Beispiel: Die Potenzmenge $P(A)$ einer Menge A ,
d.h. die Menge aller Teilmengen von A :

$$P(A) := \{B : B \subseteq A\}$$

Beispiel: $A = \{1, 2\} \rightarrow P(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$

Mächtigkeit: $|A| = n \rightarrow |P(A)| = 2^n$. Beweis?

Abstruse Mengen

Menge aller irrationalen Zahlen

Menge aller Dezimalzahlen, bei denen 1 nur endlich oft als Ziffer vorkommt

Ev. Schwierig: Test auf Mitgliedschaft in der Menge

Widersprüche: Allmenge
Cantor, Auswahlaxiom

Mehr über Mächtigkeit

Mächtigkeit einer endlichen Menge A : $|A| = n$

Mächtigkeit von unendlichen Mengen durch Abzählen:

Abzählbar $\leftrightarrow \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$, die geraden Zahlen,...

Nicht abzählbar, z.B. \mathbb{R}

Kontinuumshypothese

Hierarchie von Mächtigkeiten via Potenzmengen

Probleme mit Unendlich: Paradoxa von Zeno