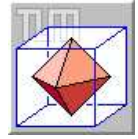


Technische Universität München
Fakultät für Mathematik



Einfache 2D-Fluid- Struktur-Wechselwirkungen mit einer cache-optimalen Finite-Element-Methode

Diplomarbeit von Tobias Neckel

Aufgabensteller: Univ.-Prof. Dr. Christoph Zenger
Betreuer: Dr. Frank Günther
Abgabetermin: 15. Januar 2005

Hiermit erkläre ich, dass ich die Diplomarbeit selbständig angefertigt und nur die angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet habe.

München, 24. Januar 2005

Inhaltsverzeichnis

1. Einführung	1
2. Physikalische Grundlagen	3
2.1. Kontinuums-Mechanik	3
2.1.1. Allgemeine Annahmen	3
2.1.2. Betrachtungsweise nach Euler und Lagrange	4
2.2. Modellierung inkompressibler Strömungen	5
2.2.1. Das Reynoldssche Transporttheorem	5
2.2.2. Die Kontinuitätsgleichung	6
2.2.3. Die Impulsgleichung	7
2.2.4. Die Navier-Stokes-Gleichungen in dimensionsloser Form	9
2.2.5. Randbedingungen	11
2.2.6. Anfangsbedingungen	14
2.2.7. Zusammenfassender Überblick	16
2.3. Modellierung des Festkörpervershaltens	17
2.3.1. Bewegungsdifferentialgleichungen nach Lagrange	17
2.3.2. Massenträgheitsmomente	18
2.3.3. Das Beispiel der starren Fahne	20
2.4. Grundsätzliches zu Fluid-Struktur-Wechselwirkung	22
3. Idee der cache-optimalen Finite-Element-Verfahren	25
3.1. Speicherstrukturen moderner Prozessoren	25
3.2. Grundidee der raumfüllenden Kurve	27
3.3. Keller als Grundlage der Cache-Effizienz	28
4. Algorithmus zur Strömungslösung	31
4.1. Die Chorinsche Projektionsmethode	31
4.2. Die Finite-Element-Methode bei Strömungsproblemen	32
4.2.1. Schwache Form der Impulsgleichungen	33
4.2.2. Ritz-Galerkin-Ansatz: Räumliche Diskretisierung	36
4.2.3. Konkrete Wahl von Gitter und Elementen	37
4.2.4. Semidiskretisierte Navier-Stokes-Gleichungen	40
4.2.5. Diskrete Druck-Poissonsgleichung	43
4.3. Iterative Lösung der Druckpoissonsgleichung	44

4.4. Der Grundalgorithmus im Überblick	45
4.5. Randbedingungen	45
4.6. Kraftberechnung	46
4.6.1. Kräfte aus dem diskreten Spannungstensor	46
4.6.2. Konsistente Kräfte	49
5. Numerische Ergebnisse	53
5.1. Allgemeines	53
5.2. Testbeispiel des freien Kanals	55
5.3. Testbeispiel des Kreiselflusses	64
5.4. Stufenströmung	67
5.5. Zylinderumströmung	73
5.5.1. Stationärer Strömungszustand	74
5.5.2. Instationärer Strömungszustand: Kármánsche Wirbelstraße	80
6. Zusammenfassung und Ausblick	85
A. Randbedingungen für die Druckpoissongleichung	87
A.1. Geschwindigkeits-Dirichlet-Randbedingungen an Kanten	88
A.2. Geschwindigkeits-Dirichlet-Randbedingungen an Ecken	93
A.3. Geschwindigkeits-Neumann-Randbedingungen an Kanten	97
B. Experimentelle Zylinderumströmung	103
B.1. Stationäre Umströmung	103
B.2. Kármánsche Wirbelstraße	104

1. Einführung

Für viele Anwendungsbereiche der Ingenieurwissenschaften und der Physik ist die Beschreibung des Verhaltens von Fluiden und Festkörpern und ihrer Interaktion von wesentlichem Interesse. Im Maschinenbau, im Bauwesen, bis hin zur Medizin, wäre es sehr nützlich, das gekoppelte Verhalten von Fluid-Struktur-Szenarien realistisch simulieren zu können. Eine besondere Herausforderung stellt dabei die Problematik dar, die in der Realität simultan auftretenden Vorgänge zur algorithmischen Behandlung in eine Reihe von Einzelschritten zu zerlegen.

Diese Arbeit beschäftigt sich mit der Anwendung eines cache-optimalen Finite-Element-Algorithmus auf einfache Fluid-Struktur-Wechselwirkungen im Zweidimensionalen.

In Kapitel 2 erläutern wir einige Grundlagen der Strömungs- und Festkörpermechanik. Das Verständnis der physikalischen Zusammenhänge ist wichtig für die korrekte Implementierung eines numerischen Löser. Außerdem beschreiben wir kurz unseren Ansatz der Kopplung von Fluid- und Strukturberechnung.

Anschließend stellt Kapitel 3 die Grundzüge der Cache-Optimalität dar. Ausgehend von den diversen Arbeiten der Peano-Arbeitsgruppe des Lehrstuhls Zenger beschreiben wir die grundlegende Idee der cache-optimalen Implementierung mittels raumfüllender Kurven.

Kapitel 4 enthält die wesentlichen algorithmischen Grundlagen unseres Ansatzes zur Lösung der zeitabhängigen inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen. Vor allem die räumliche Diskretisierung über Finite Elemente steht dabei im Mittelpunkt.

Die numerischen Ergebnisse verschiedener Szenarien werden in Kapitel 5 diskutiert. Nach der Beschreibung zweier einfacher Testfälle vergleichen wir unsere Daten für die Stufenströmung sowie die stationäre und instationäre Zylinderumströmung mit numerischen und experimentellen Referenzwerten aus der Literatur.

Schließlich geben wir in Kapitel 6 eine kurze Zusammenfassung der wichtigsten Ergebnisse sowie einen Ausblick auf sinnvolle Erweiterungsmöglichkeiten.

*

Ich möchte mich an dieser Stelle recht herzlich bei allen Personen bedanken, die direkt

oder indirekt zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben:

Ganz besonderen Dank schulde ich Prof. Dr. Christoph Zenger, der mich stets geduldig mit seinem Erfahrungsschatz und wertvollen Ideen unterstützt hat. Außerdem bedanke ich mich bei Dr. Frank Günther, der mir durch seine Betreuung vor allem in der Anfangsphase der Arbeit eine große Hilfe war. Seine Erläuterungen zu grundlegenden Bausteinen des cache-optimalen 2D-Codes haben die Einarbeitung sehr erleichtert.

Mein Dank geht ferner an alle Mitarbeiter und Diplomanden des Lehrstuhls, die mit Freundlichkeit und offenen Ohren für diverse Fragen für ein sehr angenehmes Arbeitsklima gesorgt haben. Insbesondere ist hier Tobias Weinzierl zu nennen, der wesentliche grundlegende Teile des Strömungscodes implementiert hat und von dem ich in Bezug auf software-engineering und andere Bereiche der Informatik viel lernen durfte.

Bedanken möchte ich mich auch bei Florian Rupp und Robert Siegl für die konstruktive Durchsicht dieser Arbeit. Auch Peter Gamnitzer darf an dieser Stelle nicht unerwähnt bleiben. In zahlreichen fachlichen Diskussionen konnten wir unser Verständnis der Strömungsproblematik an vielen Stellen vertiefen.

Schließlich bedanke ich mich ganz herzlich bei meinen Eltern und meinem Bruder, die es mir durch ihre Unterstützung in Alltagsdingen möglich gemacht haben, mich intensiv auf diese Arbeit und auf mein Studium generell zu konzentrieren.

2. Physikalische Grundlagen

Dieses Kapitel beschreibt grundlegende physikalische Zusammenhänge und Gleichungen in Bezug auf das Verhalten von Fluiden und Festkörpern. Wir leiten zunächst die typische Eulersche Form der inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen her. Anschließend erläutern wir die mathematische Modellierung des Verhaltens von Festkörperstrukturen. Schließlich stellen wir unseren Ansatz der Kopplung der beiden Modelle zur Simulation der Fluid-Struktur-Wechselwirkungen dar.

2.1. Kontinuums-Mechanik

Im folgenden Abschnitt wollen wir einige grundlegende Annahmen und Betrachtungsweisen bei der mathematischen Modellierung von mechanischen Vorgängen in Fluid und Festkörper erläutern. Dabei verwenden wir eine verbreitete Formulierung der Kontinuumsmechanik, wie sie beispielsweise auch in [Salençon 02] oder [Wall 99] zu finden ist.

Unter Fluiden werden wir im weiteren Verlauf vor allem Flüssigkeiten oder Gase verstehen, also Material, das im Gegensatz zu Festkörpern sehr leicht deformierbar ist. Diese Unterscheidung ist natürlich nicht immer leicht zu treffen, wenn man beispielsweise an Phasenübergänge bei Temperaturänderungen denkt. In vielen Fällen hat man es jedoch mit „einfachen“ Fluiden zu tun, etwa bei Strömungsuntersuchungen im Medium Wasser oder Luft bei normalen Temperaturen.

2.1.1. Allgemeine Annahmen

Eine Basis-Annahme, die der physikalischen Modellierung von makroskopischen Phänomenen sowohl von Fluiden als auch von Festkörpern zugrunde liegt, ist die Hypothese der kontinuierlichen Verteilung des Materials im betrachteten Volumen. Anders als bei Untersuchungen im mikroskopischen oder gar atomaren Bereich, ist hierbei das globale Verhalten einer sehr großen Anzahl von Molekülen interessant, die ein gewisses „kleines“ Volumen füllen. Deshalb verzichtet man auf eine Modellierung des Materials als Summe von einzelnen Molekülen, sondern nimmt an, dass der Stoff quasi gleichverteilt an jedem geometrischen Punkt existiert. Dieses Vorgehen ist kennzeichnend für die sogenannte Kontinuumsmechanik (vgl. beispielsweise [Salençon 02]).

Bei Strömungsvorgängen gibt es zwei grundlegende Arten: Kompressible und inkompressible Strömungen. Der wesentliche Unterschied besteht in der Möglichkeit, das Fluid ohne großen Kraftaufwand zu relevanten Volumenänderungen bewegen zu können (kompressibler Fall) oder nicht (inkompressibler Fall). Dabei ist wichtig, dass dies nicht unbedingt nur eine Eigenschaft des Fluids, also des Materials, ist, sondern von der betrachteten Situation abhängt. Wie in [Batchelor 67] aufgezeigt, gibt es durchaus auch Situationen, in denen eigentlich kompressible Medien, wie z.B. Luft, inkompressibel strömen. Der wichtigste Spezialfall ist aber natürlich die Annahme von Fluiden mit unveränderlicher konstanter Dichte. Wir werden uns bei allen in dieser Arbeit folgenden Betrachtungen stets auf den Fall inkompressibler laminarer Strömung beschränken.

2.1.2. Betrachtungsweise nach Euler und Lagrange

Es gibt bei der Beschreibung von kontinuumsmechanischen Vorgängen zwei Herangehensweisen, die verknüpft sind mit der Trennung von Untersuchungen von Festkörpern und Fluiden. Es sind dies die Betrachtungsweise nach *Lagrange* bzw. *Euler*, die sich durch die Situation des Beobachters unterscheiden.

Bei der *Lagrangeschen* oder auch *materiellen* Darstellung der Mechanik ist der Beobachter gleichsam mit einem betrachteten Partikel verbunden, folgt ihm während der gesamten Bewegung und nimmt dabei die eventuellen Veränderungen der Zustände wahr. Typischerweise werden so Vorgänge der Festkörpermechanik beschrieben, wobei man oft von insgesamt kleinen Veränderungen (z.B. Verschiebungen) ausgeht.

Im Gegensatz dazu orientiert sich die *Eulersche* oder *räumliche* Betrachtungsweise an einem festen Kontrollvolumen. Der Beobachter betrachtet die Vorgänge quasi durch ein festes Fenster (im konkreten Fall etwa das eines Windkanals) und hält fest, wie sich die Zustände des Kontrollvolumens eventuell verändern. Es ist dabei eher unerheblich, welches konkrete Partikel sich zu einem bestimmten Zeitpunkt im Kontrollvolumen befindet. So kann man auch große Veränderungen und Bewegungen beschreiben. Diese Betrachtungsweise findet man typischerweise in der klassischen Fluidmechanik (vgl. [Laschka et al. 01], [Panton 96]).

Beispielsweise ist es weniger wichtig, was ein bestimmtes Luftteilchen bei der Umströmung eines Tragflügels weit vor oder weit hinter dem Tragflügel macht, wohingegen der Partikeleinfluss am Flügel direkt zu jeder Zeit von großer Bedeutung ist.

Eng verknüpft mit den beiden dargestellten Betrachtungsweisen sind die Begriffe von *Bahnlinie* und *Stromlinie*. Eine Bahnlinie sind all diejenigen Raumpunkte, die im Laufe der Bewegung eines Partikels von diesem überstrichen werden. Mit der Bahnlinie ist somit die Lagrangesche Betrachtungsweise assoziiert. Dagegen ist die Stromlinie als Integralkurve des Geschwindigkeitsfeldes zu einem bestimmten Zeitpunkt mit der Eulerschen Betrachtungsweise verknüpft. Hier werden ja Positionen von verschiedenen Partikeln bei fixer Zeit berücksichtigt.

Die Definition von Bahnlinie und Stromlinie ist für einen stationären Strömungszustand äquivalent.

2.2. Modellierung inkompressibler Strömungen

Um Fluidströmungen zu beschreiben, verwendet man für deren Verhalten das mathematische Modell der Navier-Stokes-Gleichungen. Im Folgenden wird dieses System partieller Differentialgleichungen für inkompressible Strömungen kurz hergeleitet. Davon im Detail abweichende Zugänge finden sich unter anderem in [Donea et al. 03] oder [Griebel et al. 95], dort sind auch Inkompressibilität und Energieerhalt berücksichtigt sind.

Ziel ist die instationäre Strömungsbeschreibung für ein Fluid in einem bestimmten Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d = 2, 3$ innerhalb eines gewissen Zeitintervalls $[t_0; T] \subset \mathbb{R}$. Der Rand $\partial\Omega$ von Ω wird im Folgenden häufig auch mit Γ bezeichnet.

2.2.1. Das Reynoldssche Transporttheorem

Für die Herleitung der Navier-Stokes-Gleichungen benötigen wir als Hilfsmittel das sogenannte Reynoldssche Transporttheorem. Dieses Theorem beschreibt die totale Zeitableitung eines zeitabhängigen Integrals über einen zeitabhängigen stetigen Integranden f . In [Gamnitzer 04] wird das Theorem schön motiviert, mehrere Beweisarten finden sich beispielsweise in [Salençon 02]. Mathematisch stellt sich das Reynoldssche Transporttheorem folgendermaßen dar

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} f(x, t) dx = \int_{\Omega_t \equiv \Omega_c} \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} dx + \int_{\Omega_t \equiv \Omega_c} [\nabla f \cdot \mathbf{u} + f (\nabla \cdot \mathbf{u})] dx \quad (2.1)$$

$$= \int_{\Omega_t \equiv \Omega_c} \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} dx + \int_{\Omega_t \equiv \Omega_c} \operatorname{div} (f(x, t) \mathbf{u}(x, t)) dx. \quad (2.2)$$

Dabei bezeichnet Ω_c ein konstantes Volumen, das zum Zeitpunkt t gerade identisch ist mit dem zeitlich veränderlichen Volumen Ω_t . Zur Vereinfachung der Notation werden wir diese Identität in Zukunft weglassen. Ferner stellt $\mathbf{u}(x, t) : \Omega \times [t_0; T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ die vektorielle Geschwindigkeit des Fluids zum Zeitpunkt t am Ort x dar, die als stetig differenzierbar vorausgesetzt wird.

Die rechte Seite von Gleichung (2.2) besteht aus zwei Teilen: $\int_{\Omega_t} \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} dx$ beschreibt die Veränderung des Integrals als Funktion der Zeit bei festgehaltenem Volumen $\Omega_t \equiv \Omega_c$, wohingegen der sogenannte konvektive Term $\int_{\Omega_t} \operatorname{div} (f(x, t) \mathbf{u}(x, t)) dx$ die Integralvariation in Abhängigkeit vom konvektiven Transport des Volumens Ω_t darstellt. Falls der Integrand $f(x)$ unabhängig von der Zeit ist, so verschwindet natürlich ersterer, falls das Volumen $\Omega_t \equiv \Omega$ stationär zum Zeitpunkt t ist, letzterer.

Soll das Reynoldssche Transporttheorem auf tensorielle Größen f höherer Ordnung angewandt werden, so gilt (2.1) nach wie vor. In der Divergenzform (2.2) muss dann lediglich die Multiplikation durch ein Tensorprodukt ersetzt werden. Die Gültigkeit dieser Formel sieht man durch direktes Nachprüfen mit Hilfe der doppelten Kontraktion „:“ aus der Tensorrechnung:

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(f \otimes \mathbf{u}) &= \nabla(f \otimes \mathbf{u}) : \underline{\underline{\operatorname{Id}}} = \left(\frac{\partial(f \otimes \mathbf{u})}{\partial x_k} \otimes e^k \right) : \underline{\underline{\operatorname{Id}}} \\
&= \left(\frac{\partial(f)}{\partial x_k} \otimes \mathbf{u} \otimes e^k \right) : \underline{\underline{\operatorname{Id}}} + \left(f \otimes \frac{\partial(\mathbf{u})}{\partial x_k} \otimes e^k \right) : \underline{\underline{\operatorname{Id}}} \\
&= \frac{\partial(f)}{\partial x_k} \otimes u_i e^i \otimes e^k : \delta_{lm} e^l \otimes e^m + f \otimes \frac{\partial(u_i e^i)}{\partial x_k} \otimes e^k : \delta_{lm} e^l \otimes e^m \\
&= \frac{\partial(f)}{\partial x_k} u_k + f \frac{\partial u_k}{\partial x_k} = \nabla f \cdot \mathbf{u} + f(\nabla \cdot \mathbf{u}),
\end{aligned}$$

wobei wir die Einsteinsche Summationskonvention bei stummen Indizes verwenden.

Insgesamt gilt also das Reynoldssche Transporttheorem für tensorielle Integranden f beliebiger Ordnung in der Form

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} f(x, t) dx = \int_{\Omega_t} \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} dx + \int_{\Omega_t} \operatorname{div}(f(x, t) \otimes \mathbf{u}(x, t)) dx. \quad (2.3)$$

2.2.2. Die Kontinuitätsgleichung

Eine grundlegende physikalische Voraussetzung bei der Strömungsbeschreibung ist der Massenerhalt. Innerhalb eines bestimmten Volumens darf sich während der Zustandsänderung des Fluids die Gesamtmasse nicht ändern.

Mathematisch erfassen wir den Massenerhalt mit Hilfe der Integration der Dichte über das Volumen zu:

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{\Omega_t} \rho(x, t) dx \right) = 0. \quad (2.4)$$

Wenden wir hier nun das Reynoldssche Transporttheorem (2.2) auf die linke Seite von (2.4) für die skalare Dichtefunktion an, so erhalten wir

$$0 = \int_{\Omega_t} \frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} dx + \int_{\Omega_t} \operatorname{div}(\rho(x, t) \mathbf{u}(x, t)) dx. \quad (2.5)$$

Nun gilt (2.5) nicht nur für das Gesamtvolumen Ω , sondern auch für jedes beliebige Teilvolumen Ω_t , so dass die Gleichung nur erfüllt sein kann, falls der Integrand selbst bereits verschwindet

$$0 = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = \frac{d}{dt} \rho + \rho(\nabla \cdot \mathbf{u}). \quad (2.6)$$

Diese Gleichung wird traditionell als Kontinuitätsgleichung bezeichnet.

Im Fall inkompressibler Strömung hängt die Dichte nicht von der Zeit ab. Deshalb verschwindet ihre totale Zeitableitung $\frac{d}{dt}\rho$ an einer festen Position, so dass die Kontinuitätsgleichung (2.6) folgende Gestalt annimmt:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (2.7)$$

2.2.3. Die Impulsgleichung

Das zweite für uns wichtige Erhaltungsprinzip ist das der Impulserhaltung. Die Änderung des Gesamtimpulses des betrachteten Systems muss nach dem zweiten Newtonschen Gesetz gleich der Summe der angreifenden Kräfte sein:

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{\Omega_t} \rho(x, t) \mathbf{u}(x, t) \right) dx = \sum_j F_{a,j}. \quad (2.8)$$

Dabei muss diese vektorwertige Gleichung komponentenweise interpretiert werden.

Die von außen angreifenden Kräfte lassen sich in zwei Kategorien einteilen:

VOLUMENKRÄFTE:

Kräfte, die über die Fluidgrenzen hinweg direkt im Inneren wirken. Typische Beispiele dafür sind die Gravitation oder elektromagnetische Kräfte.

OBERFLÄCHENKRÄFTE:

Diese Kräfte greifen nur an der Oberfläche des Fluids an und werden durch einen Spannungstensor $\underline{\underline{\sigma}}$ zweiter Stufe modelliert. Allerdings treten in einem Fluid natürlich keine echten Spannungen auf, sondern molekularer Impulsaustausch. Der Begriff des Spannungstensors wird aber häufig in Anlehnung an die Festkörpermechanik beibehalten.

Wir verzichten bei unseren Berechnungen oft auf den Einfluss der Volumenkräfte $\mathbf{g}$, geben sie hier aber der Vollständigkeit halber mit an. Für die angreifenden Kräfte ergibt sich dann folgende Formulierung, auf die wir gleich den Satz von Gauß anwenden:

$$\begin{aligned} \sum_j F_{a,j} &= \int_{\Omega_t} \rho(x, t) \mathbf{g}(x, t) dx + \int_{\partial\Omega_t} \underline{\underline{\sigma}}(x, t) \cdot \mathbf{n} ds \\ &= \int_{\Omega_t} \rho(x, t) \mathbf{g}(x, t) dx + \int_{\Omega_t} \operatorname{div}(\underline{\underline{\sigma}}(x, t)) dx, \end{aligned} \quad (2.9)$$

wobei $\mathbf{n}$ den Vektor der äußeren Normalen des Volumenrandes bezeichnet.

Nun fehlt uns nur noch ein letzter Vorbereitungsschritt, bevor wir sämtliche Anteile der Impulsgleichung zusammen haben. Dazu wenden wir das Reynoldssche Transporttheorem (2.3) in tensorieller Form auf die zeitliche Impulsänderung an. Dabei stellt $\rho \mathbf{u}$ nun als

Vektor einen Tensor erster Stufe dar. So erhalten wir

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{\Omega_t} \rho(x, t) \mathbf{u}(x, t) dx \right) = \int_{\Omega_t} \left[\frac{\partial (\rho \mathbf{u})}{\partial t}(x, t) + \operatorname{div} (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u})(x, t) \right] dx. \quad (2.10)$$

Setzen wir alle Bausteine zusammen, ergibt sich die Impulsbilanz in integraler Form zu

$$\int_{\Omega_t} \left[\frac{\partial (\rho \mathbf{u})}{\partial t}(x, t) + \operatorname{div} (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u})(x, t) \right] dx = \int_{\Omega_t} [\rho(x, t) \mathbf{g}(x, t) + \operatorname{div}(\underline{\underline{\sigma}}(x, t))] dx. \quad (2.11)$$

Analog zur Kontinuitätsgleichung ist auch (2.11) für beliebige Volumina erfüllt und mit genügender Glattheit folgt die differentielle Form des Impulserhaltes

$$\frac{\partial (\rho \mathbf{u})}{\partial t}(x, t) + \operatorname{div} (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u})(x, t) = \rho \mathbf{g}(x, t) + \operatorname{div}(\underline{\underline{\sigma}}(x, t)). \quad (2.12)$$

Nützen wir nun die Berechnungsvorschrift für die Divergenz von Tensoren

$$\begin{aligned} \operatorname{div} (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) &= \nabla (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) : \underline{\underline{\operatorname{Id}}} = \frac{\partial (\rho u_i e^i \otimes u_j e^j)}{\partial x_k} \otimes e^k : \delta_{lm} e^l \otimes e^m \\ &= \frac{\partial \rho}{\partial x_k} u_i e^i u_k + \rho \underbrace{\frac{\partial u_i}{\partial x_k} e^i u_k}_{=(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}} + \rho \underbrace{\frac{\partial u_k}{\partial x_k} u_i e^i}_{= \nabla \cdot \mathbf{u}}, \end{aligned}$$

sowie die Kontinuitätsgleichung (2.7), so erhalten wir schließlich die Impulsgleichung für inkompressible Fluide in sogenannter Divergenzform

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(x, t) + \rho (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}(x, t) = \rho \mathbf{g}(x, t) + \operatorname{div}(\underline{\underline{\sigma}}(x, t)). \quad (2.13)$$

Bei der bisherigen Herleitung der Erhaltungssätze haben wir keine Rücksicht auf die Wahl des Fluidmaterials genommen. Dies wird jetzt in Form der Definition des Spannungstensors $\underline{\underline{\sigma}}$ nachgeholt, der die Oberflächenkräfte im Fluid modelliert.

Wir werden in dieser Arbeit stets von sogenannten Newtonschen Fluiden ausgehen, die zwei Grundannahmen genügen: Isotropie und Linearität. Das bedeutet, dass Spannungs-kräfte im Fluid stets in alle Ortsrichtungen gleich wirken und der Spannungstensor linear vom Gradient der Geschwindigkeit des Fluids $\nabla \mathbf{u}$ abhängt (vgl. [Laschka et al. 01]). Typische Beispiele von Newtonschen Fluiden sind Wasser oder Luft.

Deshalb stellt sich $\underline{\underline{\sigma}}$ für uns in folgender Form dar

$$\underline{\underline{\sigma}} = -p \underline{\underline{\operatorname{Id}}} + \mu \underbrace{(\nabla u + (\nabla u)^T)}_{= 2\varepsilon(u)}. \quad (2.14)$$

Der Spannungstensor zerfällt also in einen nichtviskosen Druckanteil und einen Anteil $\varepsilon(\mathbf{u})$, der zusammen mit der dynamischen Viskosität μ die Zähigkeit des Fluids in linearer Abhängigkeit von dessen Geschwindigkeit modelliert.

Mit unserer Wahl von $\underline{\underline{\sigma}}$ und der Berechnungsvorschrift für die Divergenz von Tensoren sowie unter Verwendung der Kontinuitätsgleichung (2.7) können wir nun die Impulsgleichung (2.13) explizit schreiben als

$$\begin{aligned}
 \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} &= \rho \mathbf{g} + \operatorname{div}(\underline{\underline{\sigma}}) = \rho \mathbf{g} + \left(\frac{\partial \underline{\underline{\sigma}}}{\partial x_k} \otimes e^k \right) : \underline{\underline{\operatorname{Id}}} \\
 &= \rho \mathbf{g} + \left(\frac{\partial (-p \delta_{ij} e^i \otimes e^j)}{\partial x_k} \otimes e^k \right) : \underline{\underline{\operatorname{Id}}} + \mu \left(\frac{\partial (\nabla u + (\nabla u)^T)}{\partial x_k} \otimes e^k \right) : \underline{\underline{\operatorname{Id}}} \\
 &= \rho \mathbf{g} - \frac{\partial (p \delta_{ik} e^i)}{\partial x_k} + \mu \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} e^j \otimes e^i + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} e^j \otimes e^i \right) \otimes e^k \right) : (\delta_{lm} e^l \otimes e^m) \\
 &= \rho \mathbf{g} - \nabla p + \mu \left(\underbrace{\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right) e^j}_{= \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) e^j = 0} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) e^j \right) \\
 &= \rho \mathbf{g} - \nabla p + \mu \Delta \mathbf{u},
 \end{aligned}$$

beziehungsweise nach Division durch die Dichte ρ

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \frac{1}{\rho} \nabla p - \frac{\mu}{\rho} \Delta \mathbf{u} = \mathbf{g}. \quad (2.15)$$

Häufig wird auch die folgende Formulierung über die kinematische Viskosität $\nu := \frac{\mu}{\rho}$ und den kinematischen Druck $\bar{p} = \frac{p}{\rho}$ verwendet

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla \bar{p} - \nu \Delta \mathbf{u} = \mathbf{g} \quad (2.16)$$

2.2.4. Die Navier-Stokes-Gleichungen in dimensionsloser Form

Will man bei experimentellen oder numerischen Untersuchungen von Strömungsvorgängen Ergebnisse auf reale Szenarien übertragen, so greift man auf die dimensionslose Form der problembeschreibenden Gleichungen zurück. Dadurch ist es möglich, beispielsweise große Abmessungen durch kleinere, handhabbarere Modelle zu ersetzen, ohne die Gültigkeit der Strömungsaussagen zu verlieren. Man denke beispielsweise an den Flugzeugbau, wo ein Windkanal für Modelle im Maßstab 1:1 kaum realisierbar und auf alle Fälle viel zu kostspielig wäre.

Wichtig für die Übertragbarkeit von Ergebnissen eines Szenarios auf ein anderes ist der Begriff der Ähnlichkeit. Geometrische Ähnlichkeit ist gegeben, wenn beide Male dieselben Größenverhältnisse herrschen. Zwei Strömungskonfigurationen heißen ferner physikalisch ähnlich, wenn sie geometrisch ähnlich sind und zudem durch die selben dimensionslosen Kennzahlen und Randbedingungen beschrieben werden.

In diesem Abschnitt werden wir die dimensionslose Form der Navier-Stokes-Gleichungen entwickeln. Ausgangspunkt dafür ist die Impulsgleichung (2.15).

Wir führen sogenannte *dimensionslose Größen* $(\cdot)^*$ ein, indem wir wichtige Variable auf charakteristische Referenzwerte $(\cdot)_\infty$ beziehen:

$$x^* := \frac{x}{L_\infty} \quad \text{dimensionsloser Ort,} \quad (2.17)$$

$$\mathbf{u}^* := \frac{\mathbf{u}}{u_\infty} \quad \text{dimensionslose Geschwindigkeit,} \quad (2.18)$$

$$p^* := (p - p_\infty) \frac{1}{\rho u_\infty^2} \quad \text{dimensionsloser Druck,} \quad (2.19)$$

$$t^* := \frac{t}{T_\infty} = t \frac{u_\infty}{L_\infty} \quad \text{dimensionslose Zeit.} \quad (2.20)$$

Aufgrund der bekannten physikalischen Relation zwischen Geschwindigkeit, Ort und Zeit

$$u = \frac{x}{t}$$

genügt es, in Abhängigkeit der jeweiligen Problemstellung zwei dieser drei charakteristischen Größen explizit zu wählen. Die dritte ergibt sich dann automatisch.

Wir wählen im Folgenden die Zeit T_∞ als diesen Referenzwert, der somit in Gleichung (2.20) über u_∞ und L_∞ festgelegt ist.

Bei der Wahl der Referenzgrößen verwendet man typische, im Problem verankerte konstante Werte wie beispielsweise die mittlere Anströmgeschwindigkeit für u_∞ und Kanallänge oder Hindernisdurchmesser für L_∞ .

In Gleichung (2.15) ersetzen wir nun also die alten Größen durch die neuen dimensionslosen Größen (2.17) - (2.20). Dabei müssen wir auch solche berücksichtigen, nach denen Terme in der Gleichung abgeleitet werden (z.B. t bei $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}$). Dadurch erhalten wir

$$\frac{u_\infty^2}{L_\infty} \frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t^*} + \frac{u_\infty^2}{L_\infty} (\mathbf{u}^* \cdot \nabla^*) \mathbf{u}^* + \frac{\rho u_\infty^2}{\rho L_\infty} \nabla^* p^* - \frac{\mu u_\infty}{\rho L_\infty^2} \Delta^* \mathbf{u}^* = \mathbf{g}$$

und nach Multiplikation mit $\frac{L_\infty}{u_\infty^2}$

$$\frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t^*} + (\mathbf{u}^* \cdot \nabla^*) \mathbf{u}^* + \nabla^* p^* - \frac{\mu}{\rho L_\infty u_\infty} \Delta^* \mathbf{u}^* = \frac{L_\infty}{u_\infty^2} \mathbf{g}. \quad (2.21)$$

In Gleichung (2.21) können wir nun die Koeffizienten vor dem Diffusionsterm und dem Volumenkraftanteil identifizieren als die Kennzahlen

$$\text{Re} = \frac{\rho L_\infty u_\infty}{\mu} = \frac{L_\infty u_\infty}{\nu} \quad \text{Reynoldszahl,} \quad (2.22)$$

$$\text{Fr}^2 = \frac{u_\infty^2}{L_\infty} \quad \text{Froudezahl.} \quad (2.23)$$

Die Reynoldszahl beschreibt dabei das Verhältnis von Trägheitskraft zu Reibungskraft in der Strömung, wohingegen die Froudezahl angibt, wie sich Trägheit und Schwereanteil zueinander verhalten.

Damit erhalten wir die Impulsgleichungen in dimensionloser Form:

$$\frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t^*} + (\mathbf{u}^* \cdot \nabla^*) \mathbf{u}^* + \nabla^* p^* - \frac{1}{\text{Re}} \Delta^* \mathbf{u}^* = \frac{1}{\text{Fr}^2} \mathbf{g}. \quad (2.24)$$

Da die Kontinuitätsgleichung (2.7) nur einen echten Term und die Null enthält, können wir sie unverändert auch für die dimensionslose Form des Systems partieller Differentialgleichungen übernehmen:

$$\nabla^* \cdot \mathbf{u}^* = 0. \quad (2.25)$$

Hierbei wurde die dimensionslose Form von (2.7) lediglich mit dem Faktor $\frac{L_\infty}{u_\infty} \neq 0$ durchmultipliziert.

Wenn wir im Folgenden die dimensionslosen Gleichungen (2.24) und (2.25) benützen, werden wir die Sternmarkierung weglassen, um die Notation nicht unnötig zu verkomplizieren.

2.2.5. Randbedingungen

Ähnlich wie schon die Navier-Stokes-Grundgleichungen in unterschiedlicher Form geschrieben werden können, gibt es eine Reihe möglicher Randbedingungen für das zu lösende Strömungsproblem. Wir geben hier lediglich einen Überblick über die Bedingungen, die für unsere betrachteten Probleme von Interesse sind.

no-slip Bedingungen

Die grundlegendsten und einfachsten Bedingungen sind die sogenannten no-slip Bedingungen. Diese beschreiben eine feste Wandbegrenzung des Fluids, an der die ersten Fluidpartikel „festhängen“ und sich weder normal noch tangential zur Wand bewegen dürfen. Korrekterweise müsste man diese Bedingungen also eigentlich „no-penetration and no-slip“ nennen. Das Fluid erbt an der Wand deren Geschwindigkeit und man erhält mathematisch Dirichlet-Randbedingungen für die Geschwindigkeit:

$$\mathbf{u}(x, t) = \mathbf{w}(x, t) \quad \text{auf} \quad \Gamma \times [0; T]. \quad (2.26)$$

Einlass-Bedingungen

Ähnlich wie bei no-slip verwendet man auch bei Einlassrändern (engl. inlet) Dirichletvorgaben für die Geschwindigkeiten, also wieder (2.26). Insbesondere ist hier nun ein

echter Geschwindigkeitsanteil in Normalenrichtung vorhanden: $u_n = \mathbf{n} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{w} \neq 0$.

Kraft-Bedingungen

Diese Art von Randbedingungen wird typischerweise verwendet, wenn man die tatsächliche physikalische Kraft auf eine Randfläche oder eine gute Näherung dafür vorliegen hat. Eine Anwendungsmöglichkeit ist beispielsweise die Modellierung freier Oberflächen. Die Kraft-Bedingungen sind eng verbunden mit den Navier-Stokes-Gleichungen in Divergenzform (2.13):

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) = \nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}}.$$

Für den kontinuierlichen Fall erhält man daraus direkt die Δ -Formulierung (mittels Expansion des Spannungstensors und $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$). Allerdings weisen z.B. [GreshoSani 98] darauf hin, dass die räumlich diskretisierten Formulierungen sich durchaus unterscheiden.

Die Randvorgabe von Kräften $\mathbf{F}$ lässt sich mathematisch dann folgendermaßen ausdrücken

$$\underline{\underline{\sigma}} \cdot \mathbf{n} = \mu (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T) \cdot \mathbf{n} - p \mathbf{n} = \mathbf{F}, \quad (2.27)$$

was sich für gerade berandete Ränder (bzw. ebene Randflächen in 3D) in

$$\mu \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial n} + \nabla u_n \right) - p \mathbf{n} = \mathbf{F} \quad (2.28)$$

umformulieren lässt. In Bezug auf die Geschwindigkeit bedeutet dies eine Neumannrandbedingung.

Wir werden derartige Probleme zwar nicht behandeln, sehen aber einen deutlichen Zusammenhang mit den im Anschluss beschriebenen freien Rändern und Ausfluss-Bedingungen.

Freie Randbedingungen

Die Vorgabe von freien Randbedingungen an Rändern, die quasi künstlich entstehen, ist komplizierter. Aufgrund der Notwendigkeit einer Begrenzung des Rechengebiets für die numerische Simulation auch für Fälle, in denen das echte physikalische Problem (zumindest beinahe) unbegrenzt ist, ergibt sich das Problem der Vorgabe von Randwerten, die nicht physikalisch begründet sind. In der Literatur finden sich dafür verschiedenste Ansätze (vgl. beispielsweise [GreshoSani 94] für einen relativ aktuellen Überblick). Die Frage nach den „besten“ oder auch nach den „richtigen“ ist dabei noch nicht endgültig

gelöst. Schwierigkeit und Lösungsansatz zugleich ist dabei die Verbindung von Druck und Geschwindigkeit über die Inkompressibilitätsnebenbedingung ($\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$).

Stark verbreitet ist der Ansatz von Kraft- oder Pseudokraftbedingungen. Erstere sind bereits in (2.27) formuliert. Explizit ausgeschrieben lauten die Gleichungen für den Fall gerader Ränder in 2D dann

$$2\mu \frac{\partial u_n}{\partial n} - p = \mathbf{n} \cdot \mathbf{F} = F_n \quad \text{Normalanteil} \quad (2.29)$$

$$\mu \left(\frac{\partial u_\tau}{\partial n} + \frac{\partial u_n}{\partial \tau} \right) = \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{F} = F_\tau \quad \text{Tangentialanteil.} \quad (2.30)$$

Da man allerdings in den wenigsten Fällen die echte physikalische Kraft am freien Rand kennt, bietet sich eine Vereinfachung der Bedingungen an, indem man den Term $(\nabla \mathbf{u})^T$ vernachlässigt:

$$\mu \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} - p \mathbf{n} = \mathbf{f}. \quad (2.31)$$

Die Gleichungen (2.29) und (2.30) verändern sich dann zu

$$\mu \frac{\partial u_n}{\partial n} - p = f_n \quad \text{Normalanteil} \quad (2.32)$$

$$\mu \frac{\partial u_\tau}{\partial n} = f_\tau \quad \text{Tangentialanteil,} \quad (2.33)$$

wobei $\mathbf{f}$ nun keine echte physikalische Kraft mehr darstellt, sondern als Pseudokraft nur mehr einen Teil davon repräsentiert.

Setzt man nun den tangentialen Pseudokraftanteil in (2.33) auf Null, so erhält man direkt die Bedingung $\frac{\partial u_\tau}{\partial n} = 0$. Dies entspricht genau der Randbedingung wie sie beispielsweise auch in [Griebel et al. 95] für den Ausfluss beschrieben werden. Die zweite dort verwendete Bedingung ($\frac{\partial u_n}{\partial n} = 0$) erhält man allerdings nicht so direkt: Mit (2.32) ergibt sich eine Koppelung von Druck und Normalanteil der Pseudokraft ($p = -f_n$).

Mit (2.31) erhält man also Neumannrandbedingungen an die Geschwindigkeiten.

Ein typischer Fall für freie Randbedingungen sind Ausflussränder (engl. outlet). Man besitzt a priori kein Wissen über das Lösungsverhalten stromabwärts und möchte dennoch eine Beschreibung des Verhaltens im abgeschnittenen Bereich erhalten, die der realen Lösung möglichst gut entspricht.

Kombination von Randbedingungen

Will man verschiedene Typen von Randbedingungen kombinieren, so ist es nützlich, sich zu vergegenwärtigen, dass aufgrund der vektorwertigen Gleichungen eine Art Überlappung von unterschiedlichen Randtypen für die Geschwindigkeit vorliegen kann. Wir übernehmen mit der Abbildung 2.1 an dieser Stelle die gelungene Visualisierung aus [GreshoSani 98].

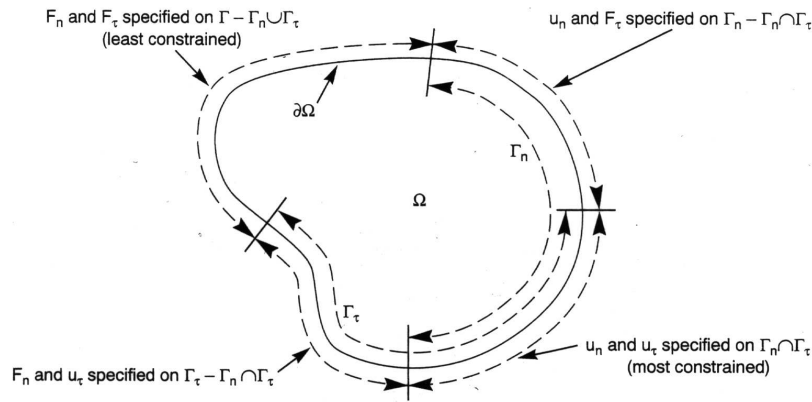


Abbildung 2.1.: Verschiedene Bereiche der Geschwindigkeitsrandbedingungen (Bild aus [GreshoSani 98], S. 383).

Als Anwendungsbeispiel für eine Kombination aus no-slip, Einlass- und Ausfluss-Bedingungen sei hier der Kanal genannt, den wir in dieser Arbeit häufig benutzen werden. Dabei fließt durch einen horizontal durch feste Wände (no-slip) begrenzten Bereich das Fluid von links (inlet) nach rechts (outlet) durch das Beobachtungs- bzw. Berechnungsgebiet, wie in Abbildung 2.2 dargestellt.

In diesem Fall müssen wir keine Unterscheidung der Ränder in Abhängigkeit der Geschwindigkeitskomponenten machen. Damit zerfällt der Rand des Gebiets in einen Anteil mit Dirichletvorgaben für $\mathbf{u}$ und einen Teil mit Neumannrandbedingungen:

$$\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_N.$$

Insgesamt sehen wir, dass bei sämtlichen kontinuierlichen Randbedingungen, die wir benutzen, lediglich eine Vorgabe von Geschwindigkeitsbedingungen nötig ist. An den Druck wird keine Bedingung gestellt, er fungiert als eine Art Hilfsvariable, die die Divergenzfreiheit im Fluid sichert. Der Druck „erbt“ auf gewisse Weise seine Randbedingungen von der Geschwindigkeit. Bei der Beschreibung des verwendeten numerischen Verfahrens werden wir später sehen, dass dies im diskreten Fall ebenfalls gilt.

2.2.6. Anfangsbedingungen

Da wir neben der Ortsvariablen x auch die zeitlich veränderliche Größe t bei der Betrachtung der instationären Navier-Stokes-Gleichungen berücksichtigen müssen, sind auch dafür Bedingungen anzugeben. Diese Anfangsbedingungen beschreiben den Zustand des Fluids zum Anfangszeitpunkt t_0 , der typischerweise als $t_0 = 0$ gewählt wird.

Erneut genügt eine Vorgabe von Geschwindigkeitsbedingungen, der Druck muss sich dazu passend einstellen. In [GreshoSani 98] wird explizit dargelegt, warum folgende Be-

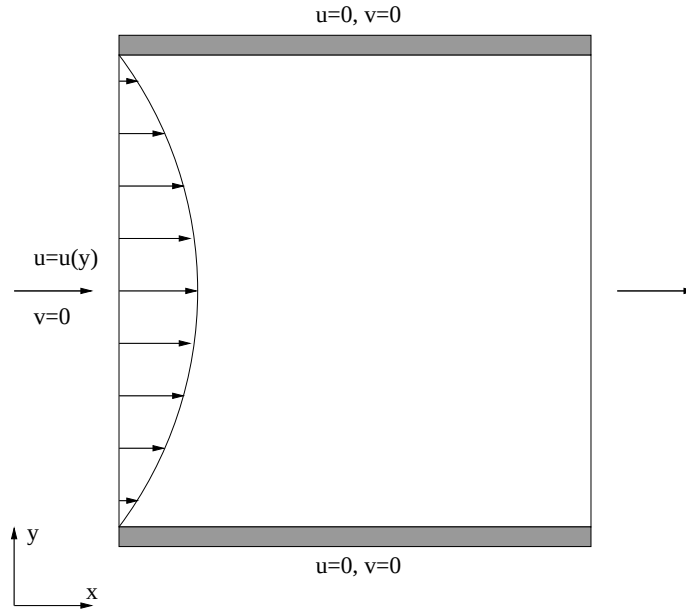


Abbildung 2.2.: Quadratischer Ausschnitt eines Kanals. In diesem Fall wird der Einfluss durch ein parabolisches Geschwindigkeitsprofil modelliert.

dingungen gelten müssen

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_0 = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (2.34)$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}_0 = \mathbf{n} \cdot \mathbf{w}_0 \quad \text{auf } \Gamma_D. \quad (2.35)$$

Grundlegend ist dabei, wie so oft, die Erfüllung des Massenerhalts auf dem gesamten Gebiet: $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ in $\bar{\Omega}$.

Bei unseren Simulationen gehen wir häufig vom Ruhezustand aus. An allen Knoten des Gebiets wird dabei die Geschwindigkeit auf Null gesetzt. Das parabolische Einlassprofil entsteht linear innerhalb einer gewissen Zeitspanne. Diese initialen Vorgaben erfüllen klar die geforderten Bedingungen (2.34) und (2.35).

2.2.7. Zusammenfassender Überblick

Wir wollen nun noch einmal knapp das zu lösende System partieller Differentialgleichungen in dimensionsloser Form zur Beschreibung inkompressibler instationärer Strömungen zusammenfassen:

- Kontinuitätsgleichung

$$\nabla \cdot \mathbf{u}(x, t) = 0 \quad \forall (x, t) \in \overline{\Omega} \times [0; T]$$

- Impulsgleichungen für Newtonsche Fluide

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \frac{1}{\rho} \nabla p - \nu \Delta \mathbf{u} = \mathbf{g} \quad \forall (x, t) \in \Omega \times [0; T]$$

- Randbedingungen

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(x, t) &= \mathbf{w}(x, t) & \forall (x, t) \in \Gamma_D \times (0; T] \\ [\mu \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} - p \mathbf{n}](x, t) &= \mathbf{f}(x, t) & \forall (x, t) \in \Gamma_N \times (0; T] \end{aligned}$$

- Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{u}(x, t_0 = 0) &= 0 & \forall x \in \Omega \\ \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}(x, t_0 = 0) &= \mathbf{n} \cdot \mathbf{w}_0 & \forall x \in \Gamma_D. \end{aligned}$$

2.3. Modellierung des Festkörperverhaltens

Für einfache Testfälle beschränken wir uns auf eine vereinfachte Beschreibung der Strukturphysik als Starrkörperbewegung. Da unsere Herangehensweise eher auf der Fluidseite basiert, ersparen wir uns so komplexe Finite-Element-Beschreibungen der partiellen Differentialgleichungen der Festkörpermechanik.

Aus der Starrkörperannahme resultieren gewöhnliche Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Deren Herleitung werden wir für den allgemeinen Fall aufzeigen und an dem einfachen Beispiel einer starren Fahne veranschaulichen.

2.3.1. Bewegungsdifferentialgleichungen nach Lagrange

Zur Herleitung der gewöhnlichen Differentialgleichungen, die ein System von Starrkörpern beschreiben, gibt es in der Kinetik traditionell zwei Vorgehensweisen, das D'Alembertsche Prinzip und das Hamiltonprinzip (siehe z.B. [GreinerDiehl 74]). Beide resultieren in den sogenannten Lagrangeschen Gleichungen, die die Mechanik des Systems modellieren. Der grundlegende Unterschied zwischen beiden Methoden besteht in der Betrachtungsweise des Problems. Das D'Alembertsche Prinzip ist ein Differentialprinzip, das einen beliebigen aktuellen Zustand mit virtuellen infinitesimalen Nachbarzuständen vergleicht. Beim Hamiltonprinzip, auch Prinzip der kleinsten Wirkung genannt, wird dagegen ein integrales Bahnelement variiert.

Wir verwenden hier das Hamiltonprinzip. Dabei ist die Grundidee, dass das Körpersystem in Bezug auf das Zeitintegral seiner Lagrangefunktion einen stationären Zustand erlangt:

$$\int_{t_0}^{t_e} L(\mathbf{q}) dt = \int_{t_0}^{t_e} (T(\mathbf{q}) - V(\mathbf{q})) dt \longrightarrow \text{stationär} \quad (2.36)$$

Hierbei stellt $\mathbf{q}$ den, von der Zeit t abhängigen, Vektor der verallgemeinerten Koordinaten des Körpersystems dar. Das bedeutet, dass etwaige holonome Zwangsbedingungen schon berücksichtigt und die Freiheitsgrade auf die effektiv auftretende Anzahl verringert wurden. Oft wird die Wahl der verallgemeinerten Koordinaten bereits durch die Problemstellung nahegelegt und muss nicht eigens ermittelt werden.

Die Lagrangefunktion ist definiert als Differenz von kinetischer (T) und potentieller Energie (V).

Die kinetische Energie eines Systems von n Körpern ergibt sich aus den translatorischen und rotatorischen Anteilen zu

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (m_i v_i^T v_i + \omega_i^T \Theta_i \omega_i),$$

wobei m_i die Masse, v_i die Translationsgeschwindigkeit und ω_i die Rotationsgeschwindigkeit des i -ten Körpers darstellt, der den Trägheitstensor zweiter Stufe Θ_i besitzt.

Für die potentielle Energie des Systems erhält man

$$V = \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{g}^T \mathbf{r}_i.$$

Dabei beschreibt $\mathbf{r}_i$ die Referenzvektor des Schwerpunktes des i -ten Körpers und $\mathbf{g}$ den Vektor des Ortsfaktors. Für eine Gravitationskraft auf der Erdoberfläche würde man beispielsweise in einem Referenzkoordinatensystem mit z -Achse in Höhenrichtung

$$\mathbf{r}_i = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix}, \quad \mathbf{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 9.81 \end{pmatrix} \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right]$$

erhalten.

Die Bewegungsgleichungen nach Lagrange erhält man aus (2.36) mit Hilfe der Theorie der Variationsrechnung zu

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q} + \frac{\partial V}{\partial q} = 0. \quad (2.37)$$

In den bisherigen Überlegungen wurden nur die konservativen Kräfte berücksichtigt, also Kräfte, die sich aus dem Potential V ableiten lassen. Möchten wir auch nichtkonservative Kraftanteile Q_{NK} betrachten, so müssen diese in der (verallgemeinerten) Kräftebilanz zusätzlich auf der rechten Seite von (2.37) eingebracht werden. Darunter fallen beispielsweise von außen angreifende Drehmomente.

So ergibt sich also die allgemeine Form der Lagrangeschen Gleichungen:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q} + \frac{\partial V}{\partial q} = Q_{NK}. \quad (2.38)$$

Da die verallgemeinerten Koordinaten nicht unbedingt Längen als Einheiten zu haben brauchen, müssen auch die zugehörigen verallgemeinerten Kräfte nicht die echten Kraftdimensionen haben, wie es eben bei Winkeln und zugehörigen Drehmomenten der Fall ist.

2.3.2. Massenträgheitsmomente

Zur Berechnung der kinetischen Energie eines (Teil-) Körpers benötigen wir dessen Trägheitstensor. Im allgemeinen Fall eines starren Körpers mit kontinuierlicher Massenverteilung lautet die Berechnungsvorschrift für diesen Tensor im dreidimensionalen Raum mit körperfestem Koordinatensystem im Ursprung (siehe z.B.[Gerthsen 97])

$$\Theta_{jk} = \int_V \rho(r) (r^2 \delta_{jk}) dr^3, \quad j, k = 1, 2, 3 \quad (2.39)$$

mit dem Kroneckersymbol δ_{jk} .

Wir untersuchen in dieser Arbeit lediglich den zweidimensionalen Fall von Fluid-Struktur-Wechselwirkungen, den wir uns ja als eine Art Projektion eines 3D-Problems denken, das in der dritten Dimension (z) beliebig verschoben werden kann und stets den selben Schnitt liefert. Deshalb können bei uns also auch nur Drehungen um die z -Achse auftreten, die sich dann eben in der x - y -Ebene abspielen. Das wiederum vereinfacht unsere Beschreibung des Trägheitstensors erheblich, denn wir müssen nur mehr die Komponente $\Theta_{33} = \Theta_{zz}$ berücksichtigen, die ja genau das Trägheitsmoment um die z -Achse als Hauptachse beschreibt. Wir nützen (2.39) und erhalten

$$\Theta_{zz} = \int_V (x^2 + y^2) dx dy dz.$$

Im Folgenden geben wir nun die Trägheitsmomente einiger einfacher Grundkörper mit homogener Dichte an, die in unseren Untersuchungen verwendet werden. Dabei soll M immer die Gesamtmasse ρV bezeichnen. Für Drehungen um Pole außerhalb des Schwerpunkts muss obige Formel mit dem Satz von Steiner angepasst werden, indem ein gewichteter Verschiebungsanteil hinzukommt. Die Längenbezeichnungen sind in Abbildung 2.3 definiert.

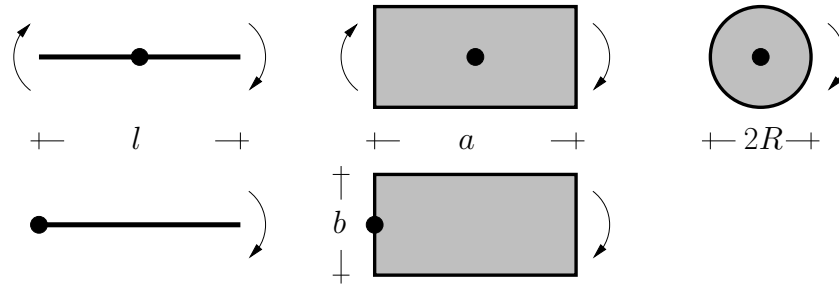


Abbildung 2.3.: Die oberen Darstellungen visualisieren die Drehungen von Stab (links), Quader (Mitte) und Zylinder (rechts) um den Schwerpunkt (obere Reihe) bzw. um einen verschobenen Achsenpunkt (untere Reihe).

- Dünner Stab der Länge l
Drehung um Schwerpunkt

$$\Theta_{zz} = \int_V \rho x^2 dV = \rho y z \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} x^2 dx = M \frac{l^2}{12} \quad (2.40)$$

Drehung um ein Ende

$$\Theta_{zz} = M \frac{l^2}{12} + e_x^2 M = M \frac{l^2}{3} \quad (2.41)$$

- Quader

Drehung um Schwerpunkt

$$\begin{aligned} \Theta_{zz} &= \int_V \rho(x^2 + y^2) dV = \rho z \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} (x^2 + y^2) dx dy \\ &= \rho \frac{z}{12} (ab^3 + a^3b) = \frac{M}{12} (a^2 + b^2) \end{aligned} \quad (2.42)$$

Drehung um eine Kantenmitte

$$\Theta_{zz} = \frac{M}{12} (a^2 + b^2) + e_x^2 M = \frac{M}{12} (4a^2 + b^2) \quad (2.43)$$

- Zylinder

Drehung um Schwerpunkt: Transformation des Integrals in Polarkoordinaten $x = r \cos(\varphi)$, $y = r \sin(\varphi)$. Für die Jacobimatrix J gilt

$$J = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -r \sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & r \cos(\varphi) \end{pmatrix}, \quad |\det(J)| = r$$

Insgesamt erhalten wir mit dem Transformationssatz für Integrale (siehe beispielsweise [Koenig. 97])

$$\begin{aligned} \Theta_{zz} &= \int_V \rho(x^2 + y^2) dV = \rho \int_U (x^2(r, \varphi) + y^2(r, \varphi)) \cdot |\det(J)| dU \\ &= \rho \int_0^z \int_0^{2\pi} \int_0^R r^3 dr d\varphi dz = \frac{1}{2} M R^2 \end{aligned} \quad (2.44)$$

2.3.3. Das Beispiel der starren Fahne

Wir wollen nun die Starrkörperbewegungsdifferentialgleichungen für ein einfaches Beispiel herleiten.

Betrachtet wird für unseren zweidimensionalen Fall eine Art starrer Fahne, wie sie in Abbildung 2.4 skizziert ist. An einem im Schwerpunkt fixierter Zylinder ist am stromabwärts gelegenen Rand ein starrer Arm befestigt. Wir unterscheiden dabei zwei Fälle A und B , die den Arm als dünnen Stab (A) beziehungsweise als dünnen, aber ausgehenden, Quader (B) modellieren. Zur Vereinfachung soll der Stab und Quader jeweils um sein Ende im Mittelpunkt des Zylinders rotieren.



Abbildung 2.4.: Die starre Fahne aus Stab (links) und Quader (rechts).

Als verallgemeinerte Koordinate wird als Rotationsfreiheitsgrad der Winkel α gewählt. Dieser lässt nur eine Drehbewegung zu, so dass die kinetische Energie T nur durch die Winkelgeschwindigkeit $\omega = \dot{\alpha}$ gegeben ist:

$$T = \frac{1}{2} \omega^2 \Theta. \quad (2.45)$$

Wenn wir für die potentielle Energie V eine Gravitation in z -Richtung berücksichtigen, so ist diese unabhängig von α und hat auf unsere Problemstellungen keinen Einfluss. Dies entspricht einer starren Fahne, die in einem Fluid nur durch dessen Kraftwirkung bewegt wird. Ein reales Beispiel hierfür ist ein Wetterhahn, wie man ihn oft auf Kirchtürmen findet.

- Fall A:

Wir verwenden das oben hergeleitete Massenträgheitsmoment für den dünnen Stab (2.41)

$$\Theta_A = M \frac{l^2}{3}.$$

- Fall B:

Für den schlanken Quader nutzen wir mit (2.43) das entsprechende Trägheitsmoment

$$\Theta_B = \frac{M}{12} (4a^2 + b^2).$$

Wenden wir nun die Lagrangeschen Gleichungen (2.38) auf dieses einfache Beispiel an, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q} + \frac{\partial V}{\partial q} &= Q_{NK} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \left(\frac{1}{2} \omega^2 \Theta \right)}{\partial \dot{\alpha}} \right) - \frac{\partial \left(\frac{1}{2} \omega^2 \Theta \right)}{\partial \alpha} + \frac{\partial(0)}{\partial \alpha} &= M_a \\ \Theta \ddot{\alpha} &= M_a, \end{aligned} \quad (2.46)$$

wobei M_a das durch die Fluidwirkung von außen hervorgerufene Drehmoment an der Fahne bezeichnet.

In unserem Beispiel ist das „System“ gewöhnlicher Differentialgleichungen (2.46) natürlich nur eine skalare Gleichung, die sich für zeitlich unveränderliche äußere Momente M_a elementar integrieren lässt:

$$\begin{aligned}\ddot{\alpha} &= \frac{1}{\Theta} M_a \\ \dot{\alpha} &= \frac{1}{\Theta} M_a t + \alpha_0\end{aligned}\tag{2.47}$$

$$\alpha = \frac{1}{2\Theta} M_a t^2 + \alpha_0 t + \alpha_1.\tag{2.48}$$

Die Integrationskonstanten α_0 und α_1 ergeben sich aus den Anfangsbedingungen für Lage und Geschwindigkeit mit den Gleichungen (2.47) und (2.48).

2.4. Grundsätzliches zu Fluid-Struktur-Wechselwirkung

Es gibt eine Reihe verschiedener Ansätze zur Modellierung von Fluid-Struktur-Wechselwirkungsproblemen. In [Glück 03] wird dafür ein aktueller Überblick gegeben.

Der grundlegende Unterschied der verschiedenen Verfahren ist meist in deren ursprünglicher Herangehensweise begründet: Der Schwerpunkt liegt mal auf der Fluid-, mal auf Strukturseite. Daneben gibt es auch Methoden, die über einen partitionierten Ansatz versuchen, die Vorteile beider Typen zu kombinieren. Über eine mehr oder weniger starke Kopplung der beiden Teilsysteme Fluid und Struktur gelangt man so zu einem abwechselnden Einsatz der jeweiligen Programme zur Simulation der Strömungs- bzw. Strukturgleichungen. Die dabei verwendeten Diskretisierungsgitter sind darauf zugeschnitten. Das Fluidgitter passt sich demnach der Struktur Lage an, was typischerweise mit Hilfe der “Arbitrary Lagrangian Eulerian (ALE)”-Formulierung der Transportgleichungen geschieht.

Unsere Herangehensweise basiert dagegen mehr auf der Fluidmechanik. Wir benützen ein stark vereinfachtes Modell der Strukturphysik in Form von Starrkörperbewegungsgleichungen. Daneben verwenden wir einen Ansatz mit raumfesten Gittern, durch die Eulersche Betrachtungsweise der Strömungsmechanik motiviert ist. Daher sind auch unsere Strömungsgleichungen in der üblichen Eulerschen Notation gehalten und nicht über ALE beschrieben.

Veränderungen der Geometrie werden diesem Gitter mitgeteilt, so dass es stets die passenden Fluidgebiete beschreibt. Der Anteil der Struktur wird im Gitter speziell markiert und behandelt. Diese Herangehensweise haben wir gewählt, um die Implementierung der Wechselwirkung übersichtlich und einfach zu gestalten.

Die Kopplung der Fluid- und Strukturberechnung geschieht in jedem Zeitschritt einmal, was dem sogenannten “loose coupling” aus [Glück 03] entspricht. Wir berechnen also die Strömungslösung für die aktuelle Lage eines Zeitschritts n , sowie die daraus resultierenden Kräfte auf die Struktur. Anschließend wird mit Hilfe der Starrkörpergleichungen

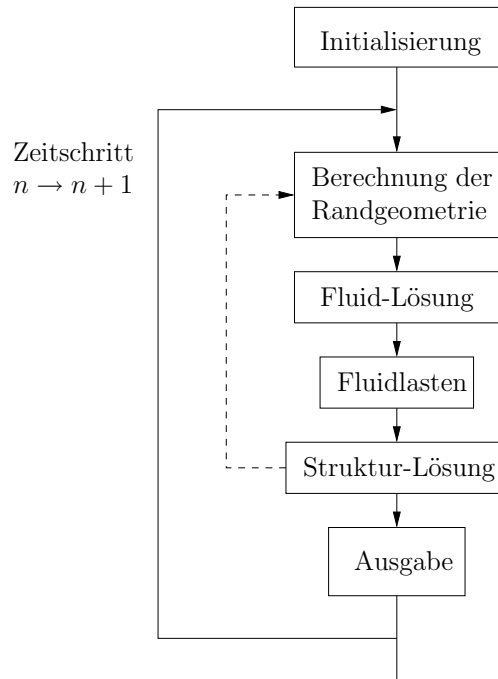


Abbildung 2.5.: Überblick der von uns verwendeten schwachen Kopplung .

ermittelt, wie sich die Lage der Struktur für den nächsten Zeitschritt $n + 1$ ändert. Dies ist dann wiederum der Ausgangspunkt für die Strömungssimulation des nächsten Zeitschritts $n + 1$. Damit gibt es lediglich eine „Iteration“ in der Kopplung. Eine schematische Visualisierung dieser Zusammenhänge gibt die Abbildung 2.5.

3. Idee der cache-optimalen Finite-Element-Verfahren

In diesem Kapitel möchten wir knapp die Grundlagen der cache-optimalen Implementierung von Finite-Element-Verfahren darlegen. Dabei stützen wir uns vor allem auf die Arbeiten [Günther 04] und [Pögl 04] unserer Arbeitsgruppe.

Wir werden auf eine möglichst einfache und übersichtliche Darstellung der Prinzipien Wert legen und dafür manchmal die tieferen Zusammenhänge und Details im Sinne der Informatik hinten anstellen.

3.1. Speicherstrukturen moderner Prozessoren

Bei Betrachtung der Entwicklung neuer Computerkomponenten stellt man seit einiger Zeit fest, dass die Geschwindigkeit moderner Prozessoren wesentlich schneller wächst als die Zugriffsgeschwindigkeit auf die benötigten Daten aus dem Hauptspeicher (RAM). Dies hat zur Folge, dass ein Prozessor zwar theoretisch sehr viele Rechenoperationen pro Zeiteinheit ausführen könnte, in der Praxis aber gezwungen ist zu warten, bis der langsamere Speicher die gewünschten Variablenwerte liefern kann.

Um dieses Problem zumindest etwas zu beheben, wird eine Speicherhierarchie angelegt. Neben dem „normalen“ und typischerweise recht großen aber langsamen RAM führt man eine oder mehrere zusätzliche Speicherbenen ein. Typisch sind die sogenannten Level-1- und Level-2-Caches (L1, L2), manchmal gibt es mit dem Level-3-Cache (L3) auch noch eine Hierarchiestufe mehr. Diese Zwischenspeicher tragen bei der Rechnung Kopien der Daten des Hauptspeichers und verbergen diesen quasi vor der CPU-Einheit. Einen visuellen Eindruck dieser Idee soll Abbildung 3.1 vermitteln.

Die Caches sind zwar um einiges kleiner in ihrem Speichervolumen (bei XEON-Architektur beispielsweise L1 nur im Bereich von 64 KByte, L2 ca. 256 - 512 KByte), erlauben aber wesentlich schnellere Zugriffszeiten auf die in ihnen gespeicherten Daten. Die Latenz von L1-Caches beträgt ein bis zwei CPU-Zyklen, die der L2-Caches ca. 5 bis 10. Das heißt, der Prozessor muss die jeweilige Zahl an Zyklen warten, bis der benötigte Wert aus dem Cache zur Verfügung steht. Im Vergleich zum Hauptspeicher, dessen Latenz in etwa bei 100 bis 500 CPU-Zyklen liegt.

Alle Zahlenwerte hängen natürlich vom konkreten Speichersystem eines Rechners ab

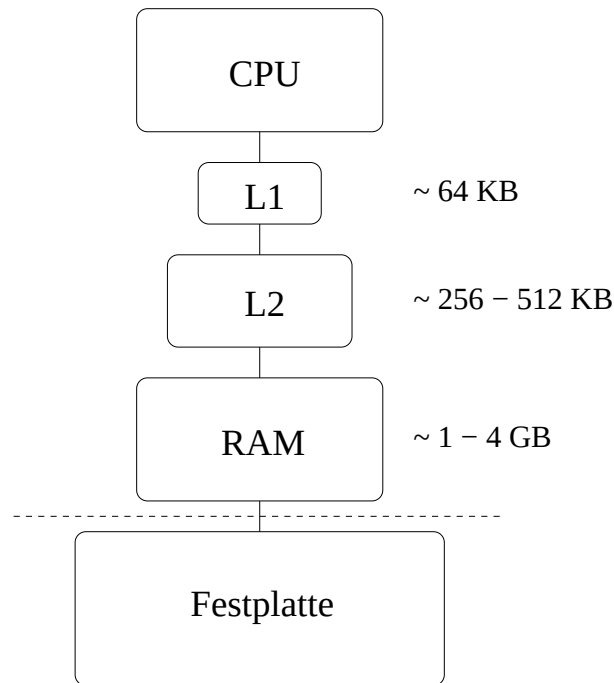


Abbildung 3.1.: Visualisierung hierarchischer Speicherstrukturen moderner Prozessoren. Die Zahlenwerte rechts geben die ungefähre Größe der Speicher an.

und sind hier eher qualitativ zu verstehen, um einen Eindruck der Größenordnungen zu bekommen. In 3.1 ist auf der untersten Hierarchieebene unter dem Hauptspeicher noch der Festplattenspeicher aufgeführt. Dieser wird dann relevant, wenn die benötigten Datenmengen das Fassungsvermögen des Hauptspeichers übersteigen, was bei Strömungsberechnungen durchaus der Fall sein kann. Die Latenz des Plattenspeichers ist dabei natürlich noch einmal um Größenordnungen höher.

Die oben beschriebene hierarchische Struktur der Speicher durch das “Zwischenlagern“ von Daten in den schnelleren Caches bewirkt einen gewissen Geschwindigkeitsgewinn, da Variablenwerte, die öfter verwendet werden, vielleicht noch in einem der Caches liegen und nicht wieder mühsam aus dem Hauptspeicher geladen werden müssen. Einen derartigen Vorgang bezeichnet man als cache hit, den Vorgang des erneut notwendigen Ladens aus dem Hauptspeicher als cache miss.

Im Allgemeinen nehmen numerische Programme auf die Struktur des Speichers und seine Vor- und Nachteile wenig bis keine Rücksicht. Beispielsweise werden Knoten bei einfachen Implementierungen von Finite-Element-Verfahren oft so nummeriert, dass ein Nachvollziehen für den Programmierer/Benutzer einfach möglich ist (z.B. zeilenweise bei regulärem Gitter). Diesem Vorteil steht jedoch dann der Nachteil gegenüber, dass im Speicher Sprünge beim Zugriff auf Knotendaten während der Berechnung auftreten können. Diese Sprünge bewirken dann eben cache misses, die sich im Laufe der Berechnung aufsummieren und die Laufzeit des Programms durch die erzwungene CPU-

Wartezeit erheblich erhöhen können.

Hier setzt nun genau der Zugang der cache-optimalen Implementierung mittels raumfüllender Kurven an.

3.2. Grundidee der raumfüllenden Kurve

Um die im vorigen Abschnitt beschriebenen Sprünge im Speicherzugriff zu verringern, wurde in [Günther 04] und [Pögl 04] gerade eine geschickte Nummerierung der Knoten bzw. Zellen des regelmäßigen Gitters gewählt.

Dabei wird auf die Idee von raumfüllenden Kurven aus der Analysis zurückgegriffen. Die Grundidee ist, das Einheitsintervall $[0; 1]$ surjektiv auf das Einheitsquadrat $[0; 1]^2$ bzw. den Einheitswürfel $[0; 1]^3$ abzubilden. Ohne hier detailliertere mathematische Aussagen zu zitieren, möchten wir nur feststellen, dass es tatsächlich derartige Kurven gibt, beispielsweise die Hilbert-Kurve oder die Peano-Kurve. Um die gleiche Kurve für das zwei- und dreidimensionale Problem verwenden zu können, fiel die Wahl auf die Peano-Kurve. Drei Stufen der Rekursion sind in Abbildung (3.2) dargestellt.

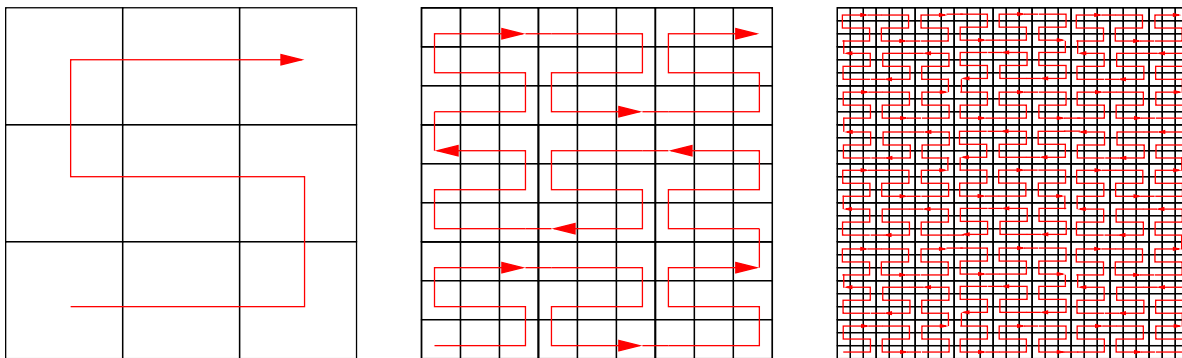


Abbildung 3.2.: Geometrie der Peano-Kurve (Abbildung von F. Günther): Drei Rekursionsstufen.

Wie aus dieser Abbildung bereits deutlich wird, sind wir in Bezug auf unser Problem nicht an einer raumfüllenden Kurve interessiert, die tatsächlich das gesamte Grundgebiet komplett überdeckt. Vielmehr reicht uns eine Art Polygonapproximation, die genau einmal durch jede Zelle unseres Gebietes läuft, also quasi von Mittelpunkt zu Mittelpunkt benachbarter Zellen. Dabei bewirkt die rekursive Definition der Peano-Kurve, dass die rekursive Struktur unseres Gitters an Verfeinerungsstellen ideal nachvollzogen werden kann.

Umgesetzt wurde dieses Konzept für zweidimensionale Anwendungen in einem Gittergenerator, beschrieben in [Gleirscher et. al. 03]. Aus tiff-Bildern, die Farbinformationen über den Typ (innen, außen, Rand) einer Zelle enthalten, liefert dieses Werkzeug einen

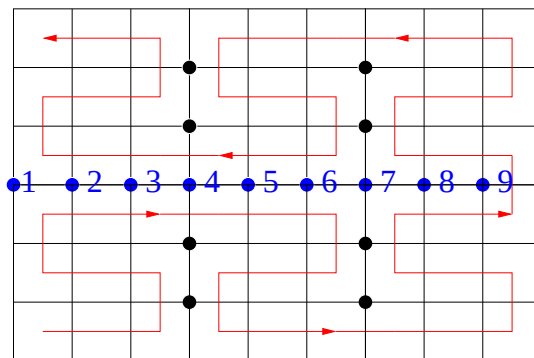


Abbildung 3.3.: Prinzip der linearen Abarbeitung (Abbildung von F. Günther): Blaue Knoten visualisieren Daten.

Zellbaum aller Level und erzeugt die zugehörige Peano-Kurve.

3.3. Keller als Grundlage der Cache-Effizienz

Nun wollen wir darlegen, wie die im vorigen Abschnitt beschriebene Abfolge der Gebietszellen entlang der rekursiven Peano-Kurve genutzt werden kann, um eine cache-optimale Finite-Element-Methode zu verwirklichen.

Die entscheidende Beobachtung ist, dass bei einem Durchlauf des Gebiets mittels der Peano-Kurve die Knoten bzw. die Werte der Freiheitsgrade an den Knoten einer gewissen Lokalität genügen. Man verwendet beim Übergang von einer Zelle zur nächsten die Werte einiger Knoten sofort wieder. Andere braucht man erst später, aber immer in einer gewissen linearen Abfolge: Sobald die Peano-Kurve zum ersten Mal eine anliegende Zelle betritt, werden die Daten in einer Richtung benötigt, beim zweiten Vorbeilaufen der Kurve dann genau in umgekehrter Richtung. Dieses Prinzip erkennt man in Grundzügen bereits aus der einfachen Figur in Abbildung (3.3). Die blauen Knoten visualisieren beispielhaft die Daten, die beim Gebietsdurchlauf gemäß ihrer Nummerierung linear hin und zurück bearbeitet werden.

Wenn man also die jeweiligen Werte an jedem Knoten in eine Art Datenpaket packt, dann kann man die Pakete verschiedener Punkte im Laufe der Berechnung linear übereinanderstapeln und trotzdem immer noch die passenden Pakete dann abholen, wenn sie gebraucht werden. Dafür sind dann evtl. mehrere Stapel nötig, um Konflikte zu vermeiden. Die „Stapel“ (engl. „stacks“) von Datenpaketen im Speicher nennen wir Keller.

Da ein Keller im Prinzip eine Abfolge von Datenpaketen im Speicher ist, die genau linear abläuft, so kann man erwarten, dass die Anzahl der cache hits dadurch wesentlich verbessert wird. Ein Cache kopiert nämlich nicht nur den einzelnen Wert der zugegriffenen Variable in seinen Speicher, sondern ein gewisses Intervall um diesen Wert. Wenn man

dann linear von diesem Wert aus weiterläuft, sind die dann relevanten Werte meist auch noch im Cache vorhanden.

Zusätzlich findet innerhalb der Caches das sogenannte Prefetching statt. Dabei werden spekulativ zum aktuellen Datenblock i auch die folgenden Blöcke bis zum $(i \pm k)$ -ten mitgeladen. So können cache misses auch bei größerer Datenmenge vermieden werden. Häufig arbeiten die Systeme dabei mit einer Richtungserkennung und mit einem Zusatzblock, verwenden also $k = 1$.

Da wir als Grundlage für Mehrgitterberechnungen ein hierarchisches Erzeugendensystem verwenden (vgl. [Griebel 94]), reicht die einfache obige Überlegung nicht aus. Es kann vorkommen, dass aufgrund der rekursiven Abarbeitung einer Zelle vor dem Wechsel in eine Nachbarzelle Konflikte bei der Benutzung der Keller auftreten. Daher muss sich die Zahl der Keller erhöhen, obwohl man eigentlich daran interessiert ist, so wenig Keller wie möglich zu benutzen.

Die Anzahl der benötigten Keller hängt natürlich von der Dimension des betrachteten Gebiets ab. Für allgemeine Dimension d ist in [Hartmann 04] beschrieben, dass $3^d + 1$ Keller benötigt werden. Frank Günther hat schon in [Günther 04] für den 2-D-Fall gezeigt, dass man 10 Keller benötigt. Dabei werden ein globaler Ein- und Ausgabestack verwendet (sogenannte 2D-Stacks), um die Daten in der passenden Reihenfolge das erste Mal einzulesen bzw. nach vollständiger Berechnung eines Knotens für den nächsten Durchlauf abzulegen. Dazwischen befinden sich niederdimensionale Stacks, die lokale Konflikte abfangen und Daten solange halten, bis ein Knoten komplett abgearbeitet ist.

Zusätzlich zum reinen Vorhandensein der Stacks muss natürlich auch noch gewährleistet sein, dass je nach Knoten und Status des Knotens der richtige Stack benützt wird. Dies geschieht in [Günther 04] durch ein umfangreiches, aber lokal deterministisches Regelwerk.

Insgesamt ist also ein lineares Abarbeiten der Daten entlang eines Durchlaufs der Peano-Kurve durch das Gebiet möglich. Ist man mit dem Gebietsdurchlauf fertig, so startet man erneut, diesmal aber von hinten, und läuft rückwärts die Peano-Kurve entlang. Allerdings bewirkt das rekursive Durchlaufen einen anderen Zellbaum für jede Richtung. Daher stammt auch die Notwendigkeit von zwei getrennten Ein- und Ausgabestacks, die ihre Funktion beim Umkehren der Durchlaufrichtung ebenfalls gerade vertauschen.

4. Algorithmus zur Strömungslösung

Wir beschreiben in diesem Kapitel den Algorithmus zur Lösung der zweidimensionalen inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen.

Nach der Darstellung der Grundidee in Form der Chorinschen Projektionsmethode widmen wir uns intensiv der Betrachtung der Finite-Element-Formulierung. Dies ist grundlegend für weiterführende Überlegungen wie beispielsweise in Bezug auf die numerische Berechnung der auftretenden Kräfte.

4.1. Die Chorinsche Projektionsmethode

Die Grundidee unseres Algorithmus basiert auf der Chorinschen Projektionsmethode (vgl. [Chorin 68]). Wir wählen folgende Formulierung, die sich an [Griebel et al. 95] anlehnt und für die Implementierung direkt verwendbar ist. Ausgehend von den kontinuierlichen Navier-Stokes-Gleichungen

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \frac{1}{\rho} \nabla p - \nu \Delta \mathbf{u} = \mathbf{g} \quad (4.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (4.2)$$

wählt man eine einfache Zeitdiskretisierung über Finite Differenzen. Die Zeitableitung der Geschwindigkeit wird mittels

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \approx \frac{\mathbf{u}^{(n+1)} - \mathbf{u}^{(n)}}{\Delta t}$$

durch Vorwärtsdifferenzen ersetzt. Dies entspricht einem expliziten Eulerverfahren bei der Zeitintegration. Die Gleichung 4.1 lautet somit zeitdiskret

$$\frac{\mathbf{u}^{(n+1)} - \mathbf{u}^{(n)}}{\Delta t} + (\mathbf{u}^{(n)} \cdot \nabla) \mathbf{u}^{(n)} + \frac{1}{\rho} \nabla p - \nu \Delta \mathbf{u}^{(n)} = \mathbf{g}^{(n)} \quad (4.3)$$

Für bereits bekannte Geschwindigkeiten $\mathbf{u}^{(n)}$ muss sich der noch unbekannte Druck p so einstellen, dass die neuen Geschwindigkeiten $\mathbf{u}^{(n+1)}$ wieder die Nebenbedingung (4.2) erfüllen. Somit muss

$$\begin{aligned} 0 &= \operatorname{div} [\mathbf{u}^{(n+1)}] \\ &= \operatorname{div} \left[\mathbf{u}^{(n)} + \Delta t \left(-(\mathbf{u}^{(n)} \cdot \nabla) \mathbf{u}^{(n)} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{u}^{(n)} + \mathbf{g}^{(n)} \right) \right] \end{aligned}$$

gelten, was sich als Poissongleichung zur Bestimmung des Drucks zum Zeitpunkt $n + 1$ deuten lässt:

$$\Delta p^{(n+1)} = \rho \operatorname{div} \left[\frac{1}{\Delta t} \mathbf{u}^{(n)} - (\mathbf{u}^{(n)} \cdot \nabla) \mathbf{u}^{(n)} + \nu \Delta \mathbf{u}^{(n)} + \mathbf{g}^{(n)} \right] \quad (4.4)$$

Damit kann die neue unbekannte Geschwindigkeit $\mathbf{u}^{(n+1)}$ direkt mit Gleichung (4.3) fortgeschrieben werden.

Die so hergeleitete Methode für das räumlich kontinuierliche Problem wollen wir nun auf eine Ortsdiskretisierung mittels Finiten Elemente übertragen.

4.2. Die Finite-Element-Methode bei Strömungsproblemen

Wir verzichten an dieser Stelle auf eine ausführliche Darstellung der Theorie der Finiten Elemente. Auch in Bezug auf die Definitionen von schwacher Ableitung, Sobolevräumen und zugehörigen Normen verweisen wir auf Standardwerke in der Literatur wie z. B. [Braess 97] oder [Knabner et al. 00].

Wir führen im Folgenden wie immer bei den Finiten Elementen folgende grundlegende Schritte durch:

- Herleitung der kontinuierlichen schwachen Form,
- Diskretisierung (Galerkin-Ansatz) und
- Elementweise Assemblierung: Herleitung der Elementmatrizen.

An dieser Stelle wollen wir bereits darauf hinweisen, dass sich unser Verfahren von anderen FE-Methoden in der Fluidmechanik unterscheidet. Wir verwenden keine gemischten Finiten Elemente für Druck und Geschwindigkeit sondern nur einen FE-Ansatz für die Geschwindigkeitsvariablen. Der Druck ist aus rein mathematischer Sicht lediglich ein Lagrange-Multiplikator, der die Ankoppelung der Nebenbedingung $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ bewirkt.

Obwohl wir in unseren Simulationen später darauf verzichten werden, berücksichtigen wir in den nachfolgenden Herleitungen auch den Gravitationsterm $\mathbf{g}$. Aufgrund der einfachen Struktur dieses Terms ist das kein großer zusätzlicher Aufwand.

4.2.1. Schwache Form der Impulsgleichungen

Die Methode der Finiten Elemente stützt sich wesentlich auf die sogenannte schwache Form des Differentialgleichungssystems. Dabei geht man von einer punktwisen Gültigkeit der Gleichungen über auf eine Integral-gemittelte Gültigkeit und erreicht so, dass man wesentlich geringere Glattheitsvoraussetzungen an die Lösungen und die Problem-daten benötigt. Man erweitert also den Raum der Lösungsfunktionen, indem die Problemstellung etwas abgeschwächt wird.

Zur Herleitung der schwachen Form werden stets folgende Schritte durchgeführt:

- 1.) Multiplikation der Partiellen Differentialgleichung (PDGL) mit einer geeigneten Testfunktion $\mathbf{s} \in S$.
- 2.) Integration der PDGL über Ω .
- 3.) Partielle Integration (Greensche Formeln, Satz von Gauß) unter Einbringung der Randbedingungen ($\Rightarrow$ geringere Glattheitsanforderungen).

Gefordert wird dabei die Gültigkeit der schwachen Form für beliebige Testfunktionen $\mathbf{s}$ aus einem passenden Funktionenraum S . Dieser muss zum einen die Glattheitsvoraussetzungen des neuen Problems berücksichtigen, zum anderen enthält er die Dirichlet-Randbedingungen:

$$S := \{ \mathbf{s} \in H^{1,2}(\Omega) \mid \mathbf{s}|_{\Gamma_n} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \mathbf{s}|_{\Gamma_\tau} \cdot \boldsymbol{\tau} = 0 \},$$

wobei $H^{1,2}(\Omega)$ den Raum der zweikomponentigen Funktionen bezeichnet, die jeweils in $H^1(\Omega)$ liegen. Analog definieren wir den Raum U der schwachen Lösungen als

$$U := \{ \mathbf{u} \in H^{1,2}(\Omega) \mid \mathbf{u}|_{\Gamma_n} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{w} \cdot \mathbf{n}, \quad \mathbf{u}|_{\Gamma_\tau} \cdot \boldsymbol{\tau} = \mathbf{w} \cdot \boldsymbol{\tau} \}.$$

Für Szenarien mit einheitlichen Randbedingungen, wie z. B. den Kanal aus 2.2.5, vereinfachen sich die Räume zu

$$\begin{aligned} S &= \{ \mathbf{s} \in H^{1,2}(\Omega) \mid \mathbf{s}|_{\Gamma_D} = 0 \} \\ U &= \{ \mathbf{u} \in H^{1,2}(\Omega) \mid \mathbf{u}|_{\Gamma_D} = \mathbf{w} \}. \end{aligned}$$

Wir kommen nun zur Herleitung der Schwachen Form für unser konkretes Problem. Ausgangspunkt dafür sind die kontinuierlichen Navier-Stokes-Gleichungen (4.1) und (4.2). Unsere schwache Form arbeitet dabei wesentlich auf den Impulsgleichungen

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \frac{1}{\rho} \nabla p - \nu \Delta \mathbf{u} = \mathbf{g},$$

die Kontinuitätsgleichung wird später separat behandelt.

- 1.) Multiplikation der PDGL mit einer geeigneten Testfunktion $\mathbf{s} \in S$:

Die Impulsgleichungen lauten nach Multiplikation mit $\mathbf{s}$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \cdot \mathbf{s} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \cdot \mathbf{s} + \frac{1}{\rho} \nabla p \cdot \mathbf{s} - \nu \Delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{s} = \mathbf{g} \cdot \mathbf{s}.$$

Hierbei bezeichnet „ $\cdot$ “ stets das euklidische Skalarprodukt des $\mathbb{R}^2$, da $\mathbf{u}$ und $\mathbf{s}$ jeweils 2D-vektorwertige Funktionen sind.

- 2.) Integration der PDGL über Ω :

$$\int_{\Omega} \dot{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{s} \, dx + \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \cdot \mathbf{s} \, dx + \frac{1}{\rho} \int_{\Omega} \nabla p \cdot \mathbf{s} \, dx - \nu \int_{\Omega} \Delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{s} \, dx = \int_{\Omega} \mathbf{g} \cdot \mathbf{s} \, dx \quad (4.5)$$

- 3.) Partielle Integration unter Einbringung der Randbedingungen:

Um die Glattheitsvoraussetzungen abschwächen zu können, führen wir eine partielle Integration auf dem Diffusionsterm durch. Wir nützen

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{s}) &= e^i \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_k} e^j e^k \cdot s_l e^l \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} s_k + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial s_k}{\partial x_i} = \Delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{s} + \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{s} \end{aligned}$$

und den Satz von Gauß, um

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \Delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{s} \, dx &= \int_{\Omega} \operatorname{div}(\nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{s}) \, dx - \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{s} \, dx \\ &= \int_{\Gamma} (\nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{s}) \cdot \mathbf{n} \, da - \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{s} \, dx \end{aligned} \quad (4.6)$$

zu erhalten. Dabei stellt $\mathbf{n}$ den Vektor der äußeren Normalen an den Gebietsrand Γ dar.

Auch den Integralterm mit dem Druckgradienten integrieren wir partiell:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla p \cdot \mathbf{s} \, dx &= \int_{\Omega} \operatorname{div}(p \mathbf{s}) \, dx - \int_{\Omega} p (\nabla \cdot \mathbf{s}) \, dx \\ &= \int_{\Gamma} (p \mathbf{s}) \cdot \mathbf{n} \, da - \int_{\Omega} p (\nabla \cdot \mathbf{s}) \, dx. \end{aligned} \quad (4.7)$$

In Gleichung (4.6) und (4.7) verringert sich der Anteil der Oberflächenintegrale jeweils auf $\Gamma_N = \Gamma \setminus \Gamma_D$, da der Raum der Testfunktionen S gerade passend zu den Dirichlet-Randbedingungen gewählt ist.

Damit erhalten wir aus Gleichung (4.5) insgesamt folgende schwache Form der Impulsgleichungen

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \dot{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{s} \, dx + \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \cdot \mathbf{s} \, dx - \frac{1}{\rho} \int_{\Omega} p (\nabla \cdot \mathbf{s}) \, dx + \nu \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{s} \, dx &= \\ = \int_{\Omega} \mathbf{g} \cdot \mathbf{s} \, dx + \int_{\Gamma_N} (\nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{s}) \cdot \mathbf{n} \, da - \frac{1}{\rho} \int_{\Gamma_N} (p \mathbf{s}) \cdot \mathbf{n} \, da \end{aligned} \quad (4.8)$$

Die beiden Oberflächenintegralterme der rechten Seite lassen sich über den Zusammenhang (2.31)

$$\nu \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} - \frac{p}{\rho} \mathbf{n} = \mathbf{f}$$

auch als integrales Skalarprodukt der Testfunktion $\mathbf{s}$ mit der kinematischen Pseudokraft $\mathbf{f}$ auf ein infinitesimales Oberflächenelement des Ausflussrandes deuten. Würde man statt unserer Δ -Formulierung der Navier-Stokes-Gleichungen die (im Kontinuierlichen äquivalente) $\underline{\underline{\sigma}}$ -Formulierung verwenden, so erhielte man an dieser Stelle den kompletten Ausdruck des Spannungstensors $\underline{\underline{\sigma}}$ und damit die echte physikalische Kraft $\mathbf{F}$ auf die Oberfläche im integralen Skalarprodukt mit dem Normalenvektor $\mathbf{n}$ und normiert durch ρ .

Somit können wir die schwache Form (4.8) unseres Problems auf folgende Weise darstellen

$$\begin{aligned} &\text{Finde } (\mathbf{u}, p) \in U \times P, \text{ so dass für alle } \mathbf{s} \in S \text{ gilt:} \\ &(\dot{\mathbf{u}}, \mathbf{s})_0 + a(\mathbf{u}, \mathbf{s}) + b(p, \mathbf{s}) = l(\mathbf{s}), \end{aligned} \quad (4.9)$$

wobei wir die Bezeichnungen

$$(\dot{\mathbf{u}}, \mathbf{s})_0 = \int_{\Omega} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \cdot \mathbf{s} \, dx \quad (4.10)$$

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{s}) = \int_{\Omega} [(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \cdot \mathbf{s} + \nu \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{s}] \, dx \quad (4.11)$$

$$b(p, \mathbf{s}) = -\frac{1}{\rho} \int_{\Omega} p (\nabla \cdot \mathbf{s}) \, dx \quad (4.12)$$

$$l(\mathbf{s}) = \int_{\Omega} \mathbf{g} \cdot \mathbf{s} \, dx + \int_{\Gamma_N} \mathbf{f} \cdot \mathbf{s} \, da \quad (4.13)$$

benützen.

Der Druck p in (4.9) lässt sich - losgelöst von physikalischer Bedeutung - hier als Lagrangeparameter (-funktion) interpretieren, die ähnlich wie bei der Variationsrechnung die Nebenbedingung des Massenerhalts ankoppelt. Damit wird der Druckraum zu

$$P = \left\{ p \in L^2(\Omega) \mid \int_{\Omega} p(x) \, dx = 0, \text{ falls } p \text{ nirgends explizit fixiert} \right\}.$$

Die Zusatzbedingung entsteht durch die Tatsache, dass der Druck bei inkompressibler Strömung nur bis auf eine Konstante bestimmt ist.

Die Kontigleichung $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ als Bestimmungsgleichung für den Druck p ist in dieser schwachen Form für die Geschwindigkeiten nicht berücksichtigt. Dies wird im folgenden Abschnitt nachgeholt, wo wir den Übergang zu einem räumlich diskreten System vollziehen.

4.2.2. Ritz-Galerkin-Ansatz: Räumliche Diskretisierung

Grundidee der Finiten-Element-Methode (nach Galerkin) ist die Approximation von Lösungen der schwachen Form durch Lösungen von endlichdimensionalen Variationsaufgaben über entsprechenden Räumen.

Grundlegend für den Ritz-Galerkin-Ansatz zur Diskretisierung der schwachen Form (4.9) ist daher die Annahme, dass die endlichdimensionalen Räume S_h , U_h Teilräume von S , U sind:

$$S_h \subset S, \quad U_h \subset U$$

Somit lautet das räumlich diskretisierte Problem in abstrakter Formulierung nun

$$\begin{aligned} &\text{Finde } (\mathbf{u}_h, p_h) \in U_h \times P_h, \text{ so dass für alle } \mathbf{s}_h \in S_h \text{ gilt:} \\ &(\dot{\mathbf{u}}_h, \mathbf{s}_h)_0 + a(\mathbf{u}_h, \mathbf{s}_h) + b(p_h, \mathbf{s}_h) = l(\mathbf{s}_h). \end{aligned} \quad (4.14)$$

Fixiert man den endlichdimensionalen Raum der Testfunktionen S_h und wählt eine Basis $\{\Phi_i\}_{i=1,\dots,N}$, so kann man jedes Element (also jede Funktion) s_h durch eine Linearkombination der Basisvektoren Φ_i darstellen

$$\mathbf{s}_h(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=1}^N \begin{pmatrix} s_i^x(t) \Phi_i(\mathbf{x}) \\ s_i^y(t) \Phi_i(\mathbf{x}) \end{pmatrix}.$$

Insbesondere entspricht ein Test der schwachen Form gegen alle Elemente s_h nun einem Test gegen alle Basisvektoren Φ_i . Wir erhalten somit aus (4.14) ein System von N Gleichungen:

$$\begin{aligned} &\text{Finde } (\mathbf{u}_h, p_h) \in U_h \times P_h, \text{ so dass für alle } i = 1, \dots, N \text{ gilt:} \\ &\left(\dot{\mathbf{u}}_h, \begin{pmatrix} \Phi_i \\ \Phi_i \end{pmatrix} \right)_0 + a\left(\mathbf{u}_h, \begin{pmatrix} \Phi_i \\ \Phi_i \end{pmatrix} \right) + b\left(p_h, \begin{pmatrix} \Phi_i \\ \Phi_i \end{pmatrix} \right) = l\left(\begin{pmatrix} \Phi_i \\ \Phi_i \end{pmatrix} \right) \end{aligned} \quad (4.15)$$

Analog zu den Testfunktionen s_h besitzt auch die Lösungsfunktion u_h eine Basisdarstellung im endlichdimensionalen Teilraum:

$$\mathbf{u}_h(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=1}^N \begin{pmatrix} u_i(t) \Phi_i(\mathbf{x}) \\ v_i(t) \Phi_i(\mathbf{x}) \end{pmatrix}. \quad (4.16)$$

Hierbei machen wir bereits die übliche Annahme, dass die Basisdarstellung für die Geschwindigkeitskomponenten u_h und v_h bzw. s_h^x und s_h^y identisch ist. Damit entkoppeln sich die Basisdarstellungen. Dass dies nicht zwingend notwendig ist, zeigen die Betrachtungen in [Blanke 04]. Dort werden Basisfunktionen hergeleitet, die bei divergenzfreier Lösung auf den Kanten eines Elementes diese Divergenzfreiheit auf dem kompletten Element leisten. Dies bewirkt dann gerade eine Verkopplung der Freiheitsgrade von u_h und v_h .

Nützen wir nun die Basisdarstellung (4.16) in (4.15), so erhalten wir mit Vertauschung von Summation und Integration schließlich

$$\begin{aligned} \text{Finde } \mathbf{u}_j(t) \{j = 1, \dots, N\}, \quad p_h \in P_h, \text{ so dass für alle } i = 1, \dots, N \text{ gilt:} \\ \sum_{j=1}^N \left(\begin{pmatrix} u_j & \Phi_j \\ v_j & \Phi_j \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \Phi_i \\ \Phi_i \end{pmatrix} \right)_0 + \sum_{j=1}^N a \left(\begin{pmatrix} u_j & \Phi_j \\ v_j & \Phi_j \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \Phi_i \\ \Phi_i \end{pmatrix} \right) \\ + b \left(p_h, \begin{pmatrix} \Phi_i \\ \Phi_i \end{pmatrix} \right) = l \left(\begin{pmatrix} \Phi_i \\ \Phi_i \end{pmatrix} \right) \end{aligned} \quad (4.17)$$

4.2.3. Konkrete Wahl von Gitter und Elementen

Bevor wir nun weitere Rechenschritte vornehmen können, gilt es, die zur Diskretisierung notwendigen Anteile festzulegen. Das betrifft einerseits die Zerlegung des Gebiets in Teilelemente. Andererseits müssen wir die Basisfunktionen auf diesen Teilelementen für die verschiedenen Freiheitsgrade des Systems bestimmen.

Wahl des Gitters

Wir verwenden passend zu unserem Grundansatz der raumfüllenden Peanokurve ein Gitter, das aus quadratischen Teilelementen besteht. Diese können durch Drittelung adaptiv verfeinert werden.

Für die Freiheitsgrade stellt sich das Gitter als ein teilweise versetztes (‘‘partially staggered’’) dar. Das bedeutet, dass die Geschwindigkeitsfreiheitsgrade in den Ecken der Elemente liegen, der Druck hingegen im Mittelpunkt einer Zelle angesetzt wird, siehe Abbildung 4.1.

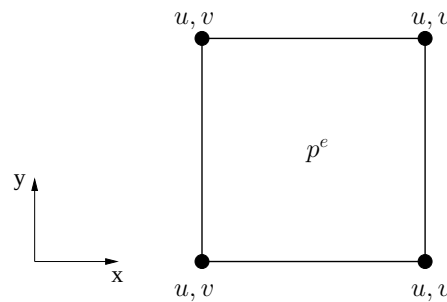


Abbildung 4.1.: Teilweise versetztes Gitter.

An dieser Stelle erkennt man bereits Vor- und Nachteile dieses Ansatzes. Nachteilig ist die relativ grobe Approximation von Randgeometrien über eine Art ‘‘Klötzchenwelt’’. Möchte man beispielsweise einen Kreis einigermaßen passend annähern, so bedarf es einer Verfeinerung an dessen Rändern.

Die einfache Struktur des quadratischen Gitters ermöglicht dagegen an vielen Stellen eine einfache Programmstruktur. So macht beispielsweise unsere rekursive Beschreibung mittels der Peanokurve sämtliches Speichern von Referenzlisten unnötig. Diese Listen müssen z.B. bei beliebigen Dreiecksgittern stets mitgeführt werden, damit klar ist, welcher Knoten zu welchen Elementen gehört und welche globale Nummer (in Bezug auf das zu lösende Gleichungssystem) er besitzt.

Wahl der Elemente

Wir weisen nochmals darauf hin, dass in unserer Herleitung der schwachen Form der Impulsgleichungen lediglich ein FE-Ansatz für die Geschwindigkeitskomponenten u und v gemacht wurde. Für diese Komponenten müssen wir also Basisfunktionen Φ_i wählen. Der Druck dagegen besitzt in seiner Funktion als Lagrange-Multiplikator nun einen diskreten Satz an Parametern $\{p_i\}_{i=1,\dots,M}$, nämlich gerade so viele, wie es Gitterzellen gibt (M). Ein p_i sitzt also (überall) in einer Zelle, und wir speichern seinen Wert im Zellmittelpunkt.

Gleichung (4.17) entspricht einem Teil eines linearen Gleichungssystems, mit dessen Hilfe die unbekannten Geschwindigkeitskoeffizienten u_j , v_j ermittelt werden können. Natürlich ist es günstig, die Matrix dieses Systems so dünn besetzt wie möglich zu halten. Darauf hat man über die Wahl der Basis $\{\Phi_i\}$ Einfluss. Je kleiner der kompakte Träger einer einzelnen Basisfunktion ist, desto weniger Kopplungen mit anderen Knoten treten in der Matrix über deren Einträge auf.

Typischerweise verwendet man eine nodale Basis eines gewissen Polynomgrades auf Elementknoten eines Gitters. Das bedeutet, dass die Basis an den Knoten $\mathbf{x}_i$ gerade

$$\Phi_i(\mathbf{x}_i) = 1, \quad \Phi_j(\mathbf{x}_i) = 0 \quad \text{für alle } j \neq i, \quad i, j = 1, \dots, N$$

leisten muss. Damit ist der kompakte Träger einer nodalen Basisfunktion Φ_i gerade die Summe aller Elemente, die den Knoten $\mathbf{x}_i$ als Ecke besitzen. Für unser verwendetes Gitter ist das in Abbildung 4.2(b) visualisiert.

Aufgrund unseres einfach strukturierten Gitters ist eine Transformation auf ein Referenzelement zur Vereinfachung der Geometriebeschreibung quasi unnötig. Formfunktionen, als Pendant der Nodalen Basis auf den Referenzelementen, und Nodale Basis selbst entsprechen sich gleichsam direkt, da lediglich ein Faktor h^2 beim Übergang auftritt. Daher arbeiten wir im Folgenden stets direkt auf den Basisfunktionen.

Wir wählen relativ einfache Basisfunktionen Φ_i in Form eines bilinearen Ansatzes für

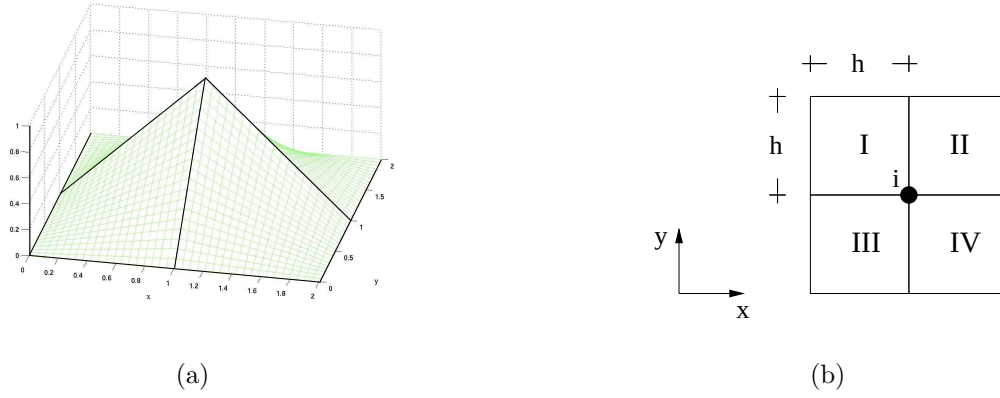


Abbildung 4.2.: Bilineare Basisfunktion Φ_i (a) und ihr Träger (b).

die Geschwindigkeit:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_i(\mathbf{x})|_I &= \frac{1}{h^2} x(h-y) \\ \Phi_i(\mathbf{x})|_{II} &= \frac{1}{h^2} (h-x)(h-y) \\ \Phi_i(\mathbf{x})|_{III} &= \frac{1}{h^2} xy \\ \Phi_i(\mathbf{x})|_{IV} &= \frac{1}{h^2} (h-x)y \end{aligned} \right\} x, y \in [0; h]. \quad (4.18)$$

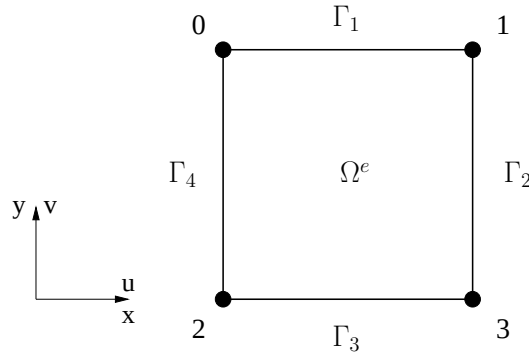
Die Nummern I-IV beziehen sich auf die vier Elemente des Trägers von Φ_i aus Figur 4.2(b). In Abbildung 4.2(a) ist Φ_i selbst visualisiert.

Die Geschwindigkeit $\mathbf{u}$ berechnet sich auf einem Element dann folgendermaßen

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \frac{1}{h^2} [\mathbf{u}_0(h-x)y + \mathbf{u}_1xy + \mathbf{u}_2(h-x)(h-y) + \mathbf{u}_3x(h-y)].$$

Die Nummerierung der Koeffizienten (vgl. Abbildung 4.3) entspricht der kartesischen Nummerierung, die bereits in [Günther 04] verwendet wurde und auch in unserem Programm grundlegend ist.

Damit stellt sich die diskretisierte Geschwindigkeit auf einem Element in jedem achsenparallelen Schnitt als lineare Funktion dar. Gleichzeitig sind wichtige Voraussetzungen für die Theorie der Finiten Elemente wie Stetigkeit der Ansatzfunktion auf dem kompletten Gebiet oder eindeutige Lösbarkeit der lokalen Interpolationsaufgabe erfüllt.

Abbildung 4.3.: Nummerierung der Knoten und Teilränder auf einem Element Ω^e .

4.2.4. Semidiskretisierte Navier-Stokes-Gleichungen

Nachdem nun die Basisfunktionen definiert sind, können wir die diskrete Gleichung (4.17) explizit aufstellen. Es ist zu beachten, dass die dort auftretenden Integrale über das gesamte Gebiet Ω natürlich auch in Anteile über die einzelnen Teilelemente Ω^e zerlegt werden können. Wir gehen dabei davon aus, dass die Menge der Ω^e eine Partition des Gesamtgebietes Ω darstellen:

$$\overline{\Omega} = \bigcup_{e=1}^M \overline{\Omega}^e, \quad \text{int}(\Omega^e) \cap \text{int}(\Omega^k) = \emptyset \quad \text{falls } e \neq k \quad \Rightarrow \quad \int_{\Omega} \cdot dx = \sum_{e=1}^M \int_{\Omega^e} \cdot dx. \quad (4.19)$$

Diese elementweise Betrachtungsweise ist für unsere Implementierung von großem Vorteil, da wir mit der Peanokurve gerade die einzelnen Zellen besuchen. Auch die Basisfunktionen Φ_i sind elementweise definiert, so dass wir direkt alle Anteile des diskreten Gleichungssystems (4.17) auf jedem Element in Form der Element-Assemblierungsmatrizen ausschreiben können:

$$\left(\left(\begin{pmatrix} u_j & \Phi_j \\ v_j & \Phi_j \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \Phi_i \\ \Phi_i \end{pmatrix} \right) \right) \Big|_{\Omega^e} \rightsquigarrow A^e = \int_{\Omega^e} \begin{pmatrix} \Phi_j \Phi_i & 0 \\ 0 & \Phi_j \Phi_i \end{pmatrix} dx \quad (4.20)$$

$$\begin{aligned} a \left(\left(\begin{pmatrix} u_j & \Phi_j \\ v_j & \Phi_j \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \Phi_i \\ \Phi_i \end{pmatrix} \right) \right) \Big|_{\Omega^e} &\rightsquigarrow C(\mathbf{u}_h)^e + D^e = \int_{\Omega^e} (\mathbf{u}_h \cdot \nabla) \begin{pmatrix} \Phi_j \\ \Phi_j \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Phi_j \\ \Phi_j \end{pmatrix} dx \\ &\quad + \int_{\Omega^e} \nu \begin{pmatrix} \nabla \Phi_j \cdot \nabla \Phi_i \\ \nabla \Phi_j \cdot \nabla \Phi_i \end{pmatrix} dx \end{aligned} \quad (4.21)$$

$$\begin{aligned} b \left(p_h, \begin{pmatrix} \Phi_i \\ \Phi_i \end{pmatrix} \right) \Big|_{\Omega^e} &\rightsquigarrow -(M^e)^T p_e = - \int_{\Omega^e} p_e (\nabla \cdot \mathbf{s}_h) dx = -p_e \int_{\Omega^e} (\nabla \cdot \mathbf{s}_h) dx \\ &= -p_e \int_{\Omega^e} \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_i}{\partial x} \\ \frac{\partial \Phi_i}{\partial y} \end{pmatrix} dx \end{aligned} \quad (4.22)$$

$$l\left(\left(\begin{pmatrix} \Phi_i \\ \Phi_i \end{pmatrix}\right)\right)\Big|_{\Omega^e} \rightsquigarrow f^e = \int_{\Omega^e} \begin{pmatrix} g_x \Phi_i \\ g_y \Phi_i \end{pmatrix} dx + \int_{\Gamma_N^e} \begin{pmatrix} f_x \Phi_i \\ f_y \Phi_i \end{pmatrix} da. \quad (4.23)$$

Nach Integration ergeben sich für unseren bilinearen Ansatz mit der Nummerierung wie in Bild 4.3 folgende konkrete 8×8 -Elementmatrizen

$$A^e = \frac{h^2}{9} \begin{pmatrix} 1.0 & 0.5 & 0.5 & 0.25 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 1.0 & 0.25 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.25 & 1.0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.25 & 0.5 & 0.5 & 1.0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0 & 0.5 & 0.5 & 0.25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 1.0 & 0.25 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.25 & 1.0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.25 & 0.5 & 0.5 & 1.0 \end{pmatrix} \quad (4.24)$$

$$D^e = \frac{\nu}{3} \begin{pmatrix} 2.0 & -0.5 & -0.5 & -1.0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.5 & 2.0 & -1.0 & -0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.5 & -1.0 & 2.0 & -0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1.0 & -0.5 & -0.5 & 2.0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2.0 & -0.5 & -0.5 & -1.0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.5 & 2.0 & -1.0 & -0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.5 & -1.0 & 2.0 & -0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1.0 & -0.5 & -0.5 & 2.0 \end{pmatrix}, \quad (4.25)$$

die auf Vektoren der diskreten Geschwindigkeiten $(u_0, u_1, u_2, u_3, v_0, v_1, v_2, v_3)^T$ bzw. analoge Beschleunigungen angewendet werden. Wir verzichten aus Platzgründen auf eine explizite Darstellung der Konvektionsmatrix, die leicht im Code eingesehen werden kann.

Für unseren Algorithmus verwenden wir stets den Ansatz des mass lumpings. Damit werden sämtliche Beschleunigungsbeiträge entkoppelt und die Element-Massenmatrix wird zu einer gewichteten Einheitsmatrix:

$$A^e \rightsquigarrow A^e = \delta_{ij} \int_{\Omega^e} \phi_i dx = \frac{h^2}{4} \begin{pmatrix} 1.0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0 \end{pmatrix}. \quad (4.26)$$

Dies entspricht einer Summation aller Beiträge auf Element-level auf den aktuellen Knoten ("row summing", vgl. [GreshoSani 98]). Programmtechnisch bedeutet dies, wie wir im kommenden Abschnitt sehen werden, dass wir keine Lösung eines zusätzlichen linearen Gleichungssystems benötigen, um mit der Chorinschen Projektionsmethode unsere Geschwindigkeitsveränderungen berechnen zu können.

Mit der Element-Massenmatrix aus (4.26) erhalten wir übrigens in globaler Assemblierung genau die in [Blanke 04] beschriebene Massenmatrix für reguläre Gitter.

Für den diskreten Druckgradienten ergeben sich durch Integration die Druckgewichte eines Elementes

$$(M^e)^T = \frac{h}{2} \begin{pmatrix} -1, 1, -1, 1, 1, 1, -1, -1 \end{pmatrix}^T. \quad (4.27)$$

Dies entspricht genau den Zahlenwerten, die wir erhalten, wenn wir die diskrete Kontingleichung auf einem Element berechnen:

$$\begin{aligned} 0 = \nabla \cdot \mathbf{u}_h &\Rightarrow 0 = \int_{\Omega^e} \nabla \cdot \mathbf{u}_h \, dx = \int_{\Gamma^e} \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{n} \, da \\ &= \int_{\Gamma_1} v_h \, da + \int_{\Gamma_2} u_h \, da - \int_{\Gamma_3} v_h \, da - \int_{\Gamma_4} u_h \, da \\ &= \frac{h}{2} [v_0 + v_1 + u_1 + u_3 - v_2 - v_3 - u_0 - u_2] \\ \Rightarrow M^e &= \frac{h}{2} (-1, 1, -1, 1, 1, 1, -1, -1). \end{aligned}$$

Die Nummerierung der Teilkanten Γ_i ist hierbei wie in Abbildung 4.3 gewählt.

Wenn wir nun das Gleichungssystem (4.17) komplett aufstellen möchten, so müssen wir über alle Elemente gehen und deren Beiträge für ihre jeweiligen Knoten berechnen. Damit ergeben sich $2N$ diskrete Impulsgleichungen. Dazu kommt noch die Nebenbedingung des diskreten Massenerhalts, die noch einmal M Gleichungen liefert.

Insgesamt stellt sich das semidiskretisierte System der Navier-Stokes-Gleichungen dann folgendermaßen dar

$$A\dot{u}_h + Du_h + C(u_h, v_h)u_h - M_x^T p_h = f_x \quad (4.28)$$

$$A\dot{v}_h + Dv_h + C(u_h, v_h)v_h - M_y^T p_h = f_y \quad (4.29)$$

$$M_x u_h + M_y v_h = 0, \quad (4.30)$$

wobei hier eine Aufteilung der Gleichungen in x - und y -Richtung vorgenommen wurde, die sich aufgrund der entkoppelten Elementmatrizen anbietet.

Die Einträge der Matrizen an den Gebietsrändern ergeben sich dabei automatisch richtig, indem nur die Beiträge des Fluidinneren gezählt werden. Natürlich sind u_h und v_h Vektoren der Dimension N und p_h ein Vektor der Länge M .

Der diskrete Druck p_h ist in unserer Notation also ein Satz von Lagrange-Multiplikatoren, die die Nebenbedingung des Massenerhalts ankoppeln.

4.2.5. Diskrete Druck-Poissonsgleichung

Die semidiskreten Navier-Stokes-Gleichungen (4.28) - (4.30) sind natürlich noch zeitabhängig. Auf dieses System wenden wir nun die bereits oben beschriebene Chorinsche Projektionsmethode im semidiskreten Fall an. Der kontinuierliche Divergenzoperator wird dabei durch sein diskretes Pendant mittels M_x und M_y ersetzt.

In [GreshoSani 98] findet sich ein etwas anderer Zugang. Dort verwendet man die Zeitableitung der semidiskreten Kontinuitätsgleichung (4.30)

$$M_x \dot{u}_h + M_y \dot{v}_h = 0$$

und ersetzt die Ableitungsterme $\dot{u}_h$ und $\dot{v}_h$ mit Hilfe der semidiskreten Impulsgleichungen (4.28) und (4.29). Hierbei ist das mass lumping erneut hilfreich.

Ergebnis ist in beiden Fällen ein Gleichungssystem für den Druck, das als diskrete Druckpoissonsgleichung interpretiert werden kann:

$$\begin{aligned} (MA^{-1}M^T) p_h^{(n+1)} &\equiv (M_x A^{-1} M_x^T + M_y A^{-1} M_y^T) p_h^{(n+1)} \\ &= M_x A^{-1} [-f_x + Du_h + C(u_h, v_h)u_h] - M_x \gamma \frac{u_h}{\Delta t} \\ &\quad + M_y A^{-1} [-f_y + Dv_h + C(u_h, v_h)v_h] - M_y \gamma \frac{v_h}{\Delta t} \end{aligned} \quad (4.31)$$

Hierbei sollen u_h , v_h die Geschwindigkeiten zum Zeitpunkt n bezeichnen.

Die beiden Terme mit dem Faktor γ stellen den diskreten Anteil einer eventuellen Verletzung des Massenerhalts dar. In unserem Zugang wird dieser Term berücksichtigt ($\gamma = 1$), wohingegen er bei [GreshoSani 98] nicht auftritt ($\gamma = 0$). Damit kann der Druck bei uns in einem späteren Zeitschritt eventuelle vorangegangene Ungenauigkeiten noch ausgleichen.

Wir möchten nochmals betonen, dass wir dieses Gleichungssystem durch eine konsistente Anwendung der Finite-Element-Formulierung für Geschwindigkeiten unter Berücksichtigung der Nebenbedingung des Massenerhalts erhalten haben und nicht aus einer direkten Finite-Element-Form der kontinuierlichen Druckpoissonsgleichung.

Stellt man eine Zeile des globalen linearen Gleichungssystems (4.31) explizit auf, so bemerkt man, dass der Druck aufgrund unseres regelmäßigen Quadratgitters über einen um 45° gedrehten 5-Punkte-Stern berechnet wird (vgl. Figur 4.4). Am Rand des Gebietes wird dieser Stern dann quasi gekappt und seine Gewichtung geändert, was man deutlich in den Detailrechnungen zu der Interpretation der Randbedingungen im Anhang A erkennen kann.

Da für die Druckberechnung also nur die jeweiligen diagonalen Nachbarn relevant sind, zerfällt der Druck in zwei unabhängige Gebiete.

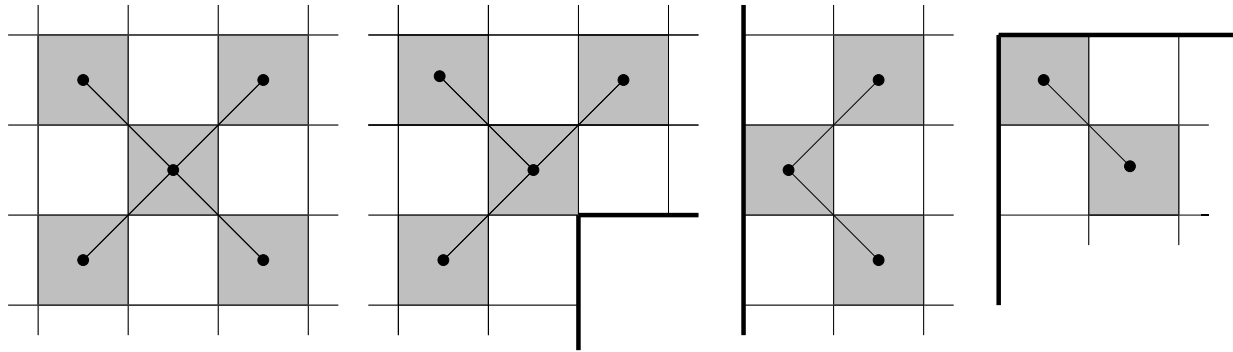


Abbildung 4.4.: 5-Punkte-Stern der Druckpoissonsgleichung: im Gebietsinneren (links) und an verschiedenen Randszenarien

4.3. Iterative Lösung der Druckpoissonsgleichung

Wir verwenden in unserem Algorithmus ein überrelaxiertes Gauß-Seidel-Verfahren zur Lösung der Druckpoissonsgleichung (4.31). Wir wollen dieses Gleichungssystem schematisch als

$$Gp_h = b \quad (4.32)$$

schreiben und die diagonalen bzw. außerdiagonalen Anteile von G in den Matrizen

$$L = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 \\ g_{2,1} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ g_{M,1} & \dots & g_{M,M-1} & 0 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 0 & g_{1,2} & \dots & g_{1,M} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & g_{M-1,M} \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

$$D = \text{diag}(g_{1,1}, \dots, g_{M,M})$$

sammeln. Damit erhält unser Verfahren für einen Iterationsschritt $k \rightsquigarrow k+1$ die Gestalt

$$Dp_h^{(k+1)} = \lambda \left(-Lp_h^{(k+1)} - Rp_h^{(k)} + b \right) + (1 - \lambda)Dp_h^{(k)}. \quad (4.33)$$

Dabei stellt λ den Relaxationsparameter dar. Für Werte von λ größer als 1 wird dies auch als SOR-Verfahren bezeichnet (vgl. beispielsweise [Knabner et al. 00]).

Den Relaxationsparameter λ wählen wir im Bereich von $\lambda = 1.2$. Dieser Wert hat sich als bei unseren Vergleichsrechnungen als günstig erwiesen und wird in [Knabner et al. 00] auch von der Theorie her untermauert.

Insgesamt müssen wir das Gleichungssystem (4.32) nie komplett global assemblieren sondern stets lokal auf Element-level arbeiten, was für die cache-Optimalität entscheidend ist. Außerdem ist es nicht nötig, Anteile der Dirichlet-Randbedingungen der Geschwindigkeiten auf die rechte Seite des (globalen) Systems zu bringen. Das Programm erhält stets die passenden Werte vor Ort und macht am Rand nur geringfügig

mehr Rechenarbeit als nötig, indem es Korrekturen für Dirichlet-Randgeschwindigkeiten berechnet und sofort wieder vergisst.

Natürlich sind wir aus Effizienzgründen auch an der Implementierung eines Mehrgitterverfahrens für unseren Algorithmus interessiert. Tobias Weinzierl hat sich in [Weinzierl 05] intensiv damit beschäftigt. Leider macht unser zellbasierter Ansatz mit der rekursiven Peanokurve das zu einer relativ schwierigen Aufgabe. Es ist nicht möglich, Zelldaten auf Punkte außerhalb einer Zelle der aktuellen Gitterfeinheit zu speichern oder abzurufen. In [Weinzierl 05] wird deshalb auf einen anderen Druckstern ausgewichen, der gleichzeitig auch die Diskretisierung der Geschwindigkeit verändert. Dies bringt in Bezug auf die Implementierung wieder andere Probleme vor allem an den Rändern mit sich.

4.4. Der Grundalgorithmus im Überblick

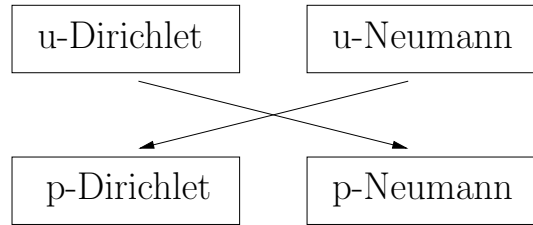
Wir wollen kurz die Grundstruktur unseres Algorithmus aufzeigen. Dabei verzichten wir auf Detailbeschreibungen. Auch die Initialisierung und das postprocessing sollen hier nicht berücksichtigt werden. Für detaillierte Informationen verweisen wir auf die realtive gute HTML-Dokumentation des Codes unserer Arbeitsgruppe, die mit Hilfe von Doxygen erstellt wurde (vgl. [Doxygen]).

Zeitschleife: $n = 0, 1, 2, \dots$ ($t = t_0 + n \Delta t$)	
	- Berechne $F(\mathbf{u}_h^n) = D\mathbf{u}_h^n + C(\mathbf{u}_h^n)\mathbf{u}_h^n$
	- Druckiteration: $k = 1, 2, \dots$
	$p_h^k = (1 - \lambda)p_h^{k-1} + \lambda \hat{p}_h^k$
	- Berechne $\mathbf{u}_h^{n+1}$

4.5. Randbedingungen

Die Randbedingungen der Navier-Stokes-Gleichungen betreffen nur die Geschwindigkeitswerte. Für den Druck haben wir im Kontinuierlichen keine expliziten Vorgaben. Auch diskret arbeiten wir lediglich mit Randwerten für die Geschwindigkeiten. Allerdings können wir mittels der konsistenten Druckpoissongleichung (4.31) am Rand herleiten, wie unsere Berechnungsvorschrift im Grenzfall $h \rightarrow 0$ zu interpretieren ist. Im Anhang A ist dies ausführlich erläutert. Wir wollen an dieser Stelle nur kurz die Ergebnisse dieser Rechnungen anführen.

Wir stellen fest, dass Geschwindigkeit und Druck die Art der Randbedingung gerade



vertauschen (vgl. obige Figur). An allen Rändern mit Dirichletvorgabe der Geschwindigkeit erhalten wir eine Neumannbedingung für den Druck. Umgekehrt wandeln sich Neumann-Randwerte der Geschwindigkeiten gerade um zu Dirichlet-Bedingungen an den Druck.

In Formeln stellt sich das folgendermaßen dar (vgl. Anhang A)

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial n} &= \mathbf{n} \cdot \left[-\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mu \Delta \mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right] \quad \text{auf } \Gamma_D \\ p &= \mu \frac{\partial u_n}{\partial n} - f_n \quad \text{auf } \Gamma_N. \end{aligned}$$

Hierbei ist der Druck nun in seiner ursprünglichen Form verwendet, also nicht als kinematischer Druck mit $1/\rho$ gewichtet.

4.6. Kraftberechnung

Um Fluid-Struktur-Wechselwirkungen berechnen zu können, ist es entscheidend, die lokal auftretenden Kräfte möglichst genau zu ermitteln. Der Rand Γ_K zwischen Fluidgebiet und dem betrachteten Körper dient quasi als Interface, um Einflüsse des einen Bereichs in den anderen zu übermitteln.

Wir wollen in diesem Abschnitt die Vor- und Nachteile von zwei Möglichkeiten beschreiben, wie man Kräfte berechnen kann, die durch das Fluid auf Strukturen ausgeübt werden.

4.6.1. Kräfte aus dem diskreten Spannungstensor

Zunächst ist es naheliegend, auch die Kraftberechnung vom Kontinuierlichen ins Diskrete zu übertragen. Kontinuierliche Kraft-Randbedingungen haben wir bereits in Kapitel 2 kennengelernt. Natürlich gilt für die Berechnung von Kräften dieselbe Formel (2.27) wie für die Vorgabe:

$$\mathbf{F} = \underline{\underline{\sigma}} \cdot \mathbf{n} = \mu (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T) \cdot \mathbf{n} - p \mathbf{n}.$$

Würden wir den echten Wert des Spannungstensors an einem Punkt der Begrenzung Γ_K des Körpers kennen, so könnten wir daraus direkt die lokale Kraft an ein Randelement übergeben. Mittels Integration wäre es möglich, über

$$\mathbf{F}_G = \int_{\Gamma_K} \underline{\underline{\sigma}} \cdot \mathbf{n} \, da$$

die von einem Körper auf das Fluid wirkende Gesamtkraft zu berechnen.

Da wir aufgrund der Lösung der Strömungsgleichungen über unseren FEM-Ansatz nur approximative Lösungen zur Verfügung haben, können wir damit nur einen diskreten Spannungstensor an einem Randpunkt ermitteln:

$$\underline{\underline{\sigma}}_h = \mu (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T)_h - p_h. \quad (4.34)$$

Der Vorteil dieser Vorgehensweise liegt darin, den Anteil des Drucks leicht separat bestimmen zu können, wenn dies gewünscht wird.

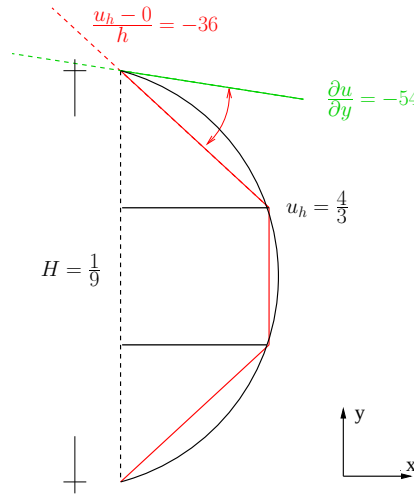


Abbildung 4.5.: Unterschied zwischen echtem (grün) und numerischem (rot) Wert von $\frac{\partial u}{\partial y}$ an der Kanalwand auf grobem 27er Gitter.

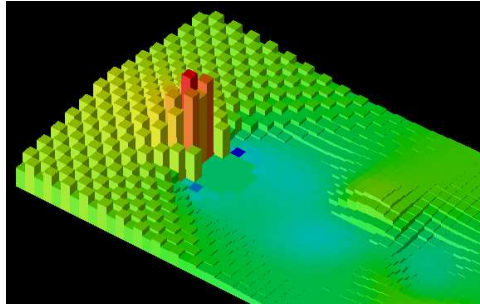
Dagegen ist der Fehler relativ groß, den man aufgrund der numerischen Approximationslösungen $\mathbf{u}_h$ und p_h nun auch für $\underline{\underline{\sigma}}_h$ macht. Um das zu verdeutlichen, haben wir ein einfaches Beispiel ausgewählt.

Wir betrachten einen freien Kanal mit einer parabolischen Durchströmung (vgl. auch Abschnitt 5.2). Ziel ist die Berechnung der Kräfte auf die beiden horizontalen Wände. Die Höhe $H = 1/9$ bewirkt, dass an der Kanaloberseite eine Geschwindigkeit mit $\frac{\partial u}{\partial y} = -54$ herrscht. Dies ist der einzige Anteil, der bei der Auswertung von $\nabla \mathbf{u}$ in diesem Fall eine Rolle spielt. In diesem einfachen Beispiel ist der Druckanteil p nicht sonderlich interessant, da aufgrund der linearen Druckschichtung die Druckkraft an der oberen Wand des Kanals die untere gerade aufhebt. Dies geschieht kontinuierlich wie diskret. Die lokale kontinuierliche Kraft an der Wand hat für $\mu = 1$ den Wert $\mathbf{F} = (-54, 0)^T$.

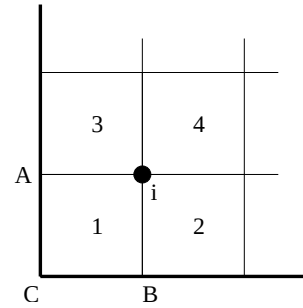
Wenn wir nun vergleichen, was unser FEM-Ansatz als Ableitung der Geschwindigkeit an der obersten Zelle sieht (vgl. Abbildung 4.5), nämlich gerade

$$\frac{u_h - 0}{h} = -\frac{4 \cdot 27}{3} = -36,$$

so stellen wir einen erheblichen Unterschied fest. Im allgemeinen Fall werden wir in (4.34) für den Druckterm nochmals einen Fehler der Ordnung h machen.



(a)



(b)

Abbildung 4.6.: (a) Motivation und (b) Bezeichnungen für Druckmittelung und -Extrapolation.

In Bezug auf den Druck haben wir mit unserer Wahl der Elemente noch ein weiteres Problem: der Druck ist diskret nur im Zellmittelpunkt vorhanden. Aufgrund des 5-Punkte-Sterns zerfällt der Druck gerade am Hindernis in zwei Niveaus, ähnlich den bekannten Checkerboard-Mustern (vgl. auch Abbildung 4.6(a)). Für eine sinnvolle Auswertung am Rand müsste man also eine Mittelung durchführen. In [GreshoSani 98] wird dafür beispielsweise eine gewichtete Mittelung der Druckwerte im Inneren und eine lineare Extrapolation auf den Rand vorgeschlagen. Dies stellt sich für uns folgendermaßen dar

$$\begin{aligned} p_i &= \frac{\sum_j p_j h^2}{\sum_j h^2} = \frac{p_1 + p_2 + p_3 + p_4}{4} \\ p_A &= \frac{3p_1 - p_2 + 3p_3 - p_4}{4}, \quad p_B = \frac{3p_1 + 3p_2 - p_3 - p_4}{4} \\ p_C &= p_A + p_B - p_i. \end{aligned} \tag{4.35}$$

Die Indizierung der Druckgrößen ist in Abbildung 4.6(b) visualisiert. Wir haben diese Druckmittelung auch implementiert. Allerdings bedeutet das zusätzlich zum höheren Speicherbedarf einen erheblichen Mehraufwand von 3 Gebietsdurchläufen pro Zeitschritt, um gerade die interessanten Werte an den Rändern zu erhalten.

Insgesamt stellen wir fest, dass der Ansatz der Kraftberechnung über $\underline{\underline{\sigma}}_h$ nach (4.34) für unseren Algorithmus nicht sonderlich geeignet ist. Anders verhält es sich mit den im folgenden Abschnitt beschriebenen konsistenten Kräften.

4.6.2. Konsistente Kräfte

Die Grundidee bei den konsistenten Kräften ist, alle Informationen zu nützen, die bereits bei der Aufstellung der FEM-Gleichungen eingehen.

Wir betrachten neben den N echten Freiheitsgraden $\mathbf{u}_j$ auf Knoten im Gebiet Ω nun zusätzlich virtuelle Freiheitsgrade $\mathbf{u}_j$ auch auf den Dirichlet-Gebietsrändern des Körpers. Die zugehörigen Knoten sollen mit $N + 1, \dots, N_K$ nummeriert sein. Damit stellen wir die approximative FEM-Lösung nun dar als

$$\begin{aligned} u_h &= \tilde{u}_h + \sum_{j=1}^N u_j \Phi_j, & \tilde{u}_h &= \sum_{j=N+1}^{N_K} u_j \tilde{\Phi}_j \\ v_h &= \tilde{v}_h + \sum_{j=1}^N v_j \Phi_j, & \tilde{v}_h &= \sum_{j=N+1}^{N_K} v_j \tilde{\Phi}_j. \end{aligned}$$

Gleichzeitig erhalten wir in der schwachen Form (4.9) nun zusätzliche Kraftanteile $\tilde{\mathbf{F}}$ für den Rand Γ_K , da die zugehörige Testfunktion nur Dirichletdaten und keine (virtuellen) Freiheitsgrade nulliert:

$$\text{Zusatzkraftterm in } l(\mathbf{s}) = \int_{\Gamma_K} \begin{pmatrix} \tilde{\Phi}_i \\ \tilde{\Phi}_i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \tilde{F}_x \\ \tilde{F}_y \end{pmatrix} da, \quad \tilde{F}_{x/y} = \sum_{j=N+1}^{N_K} \tilde{F}_{x/y,j} \tilde{\Phi}_j. \quad (4.36)$$

Die Basisfunktionen $\tilde{\Phi}_j$ der virtuellen Freiheitsgrade sollen die gleiche bilineare Form haben wie Φ_i . Allerdings erstreckt sich ihr Träger nur über den jeweiligen Anteil im Inneren des Fluidgebietes.

Wenn wir nun die diskrete schwache Form der Impulsgleichungen (4.28) - (4.29) auch auf die neuen virtuellen Freiheitsgrade auf den Knoten $i = N + 1, \dots, N_K$ erweitern, so erhalten wir folgenden Zusammenhang

$$\int_{\Gamma_K} \tilde{\Phi}_i \sum_{j=N+1}^{N_K} \tilde{F}_{x,j} \tilde{\Phi}_j da = [A\dot{u}_h + Du_h + C(u_h, v_h)u_h - M_x^T p_h - f_x]_i \quad (4.37)$$

$$\int_{\Gamma_K} \tilde{\Phi}_i \sum_{j=N+1}^{N_K} \tilde{F}_{y,j} \tilde{\Phi}_j da = [A\dot{v}_h + Dv_h + C(u_h, v_h)v_h - M_y^T p_h - f_y]_i. \quad (4.38)$$

Darin sind die unterschiedlichen lokalen Kräfte $\tilde{F}_i$ an den Randknoten nun über Anteile der Randmassenmatrix verkoppelt, so dass man eigentlich ein lineares Gleichungssystem

der Dimension $N_K - N$ lösen müsste. Wie bei den Geschwindigkeitsfreiheitsgraden im Fluidgebiet kann man aber auch hier für den Preis eines gewissen Genauigkeitsverlustes den Ansatz des mass lumpings verwenden. Damit entkoppeln sich die $\tilde{F}_{x/y,i}$

$$\int_{\Gamma_K} \tilde{F}_x \Phi_i \, da = \tilde{F}_{x,i} \int_{\Gamma_K} \Phi_i \, da, \quad \int_{\Gamma_K} \tilde{F}_y \Phi_i \, da = \tilde{F}_{y,i} \int_{\Gamma_K} \Phi_i \, da$$

und wir können sie aus (4.37) bzw. (4.38) direkt lokal berechnen:

$$\tilde{F}_{x,i} = \frac{1}{\int_{\Gamma_K} \tilde{\Phi}_i \, da} [A\dot{u}_h + Du_h + C(u_h, v_h)u_h - M_x^T p_h - f_x]_i \quad (4.39)$$

$$\tilde{F}_{y,i} = \frac{1}{\int_{\Gamma_K} \tilde{\Phi}_i \, da} [A\dot{v}_h + Dv_h + C(u_h, v_h)v_h - M_y^T p_h - f_y]_i. \quad (4.40)$$

An festen Wänden entfällt der Beschleunigungsanteil $A\dot{u}_h$ bzw. $A\dot{v}_h$ in (4.39) bzw. (4.40). Die restlichen Anteile werden im Programmlauf auf Element-level sowieso schon stets mitberechnet, so dass wir keinen zusätzlichen Rechenaufwand haben. Wir müssen lediglich dafür sorgen, dass die Kraftinformation am Rand nicht verloren geht. Daher müssen nun auch die entsprechenden Randpunktdaten über die Stacks geschoben werden. Dieser Aufwand ist aufgrund der im Verhältnis zum Fluidinneren relativ geringen Zahl an Randpunkten nicht enorm.

Aufgrund der bilinearen Ansatzfunktionen ergibt sich also ein Faktor $1/\int_{\Gamma_K} \tilde{\Phi}_i \, da = h$ als Gewicht der rechten Seiten.

Will man nun die Gesamtkraft $\mathbf{F}_R$ berechnen, die auf einen Körper im Fluid wirkt, so integriert man die diskreten Kräfte einfach auf

$$\mathbf{F}_R = - \int_{\Gamma_K} \sum_{j=N+1}^{N_K} \begin{pmatrix} \tilde{F}_{x,j} \tilde{\Phi}_j \\ \tilde{F}_{y,j} \tilde{\Phi}_j \end{pmatrix} da. \quad (4.41)$$

Für unser Rechtecksgitter ist das besonders einfach, da wir stets nur Anteile in Koordinatenrichtungen haben. Damit wird die Integration in (4.41) in mit Hilfe der Trapezregel zu einer einfachen Summation der lokalen Kraftknotenwerte, gewichtet mit der halben Gitterweite:

$$\mathbf{F}_R = - \int_{\Gamma_K} \sum_{j=N+1}^{N_K} \begin{pmatrix} \tilde{F}_{x,j} \tilde{\Phi}_j \\ \tilde{F}_{y,j} \tilde{\Phi}_j \end{pmatrix} da \quad (4.42)$$

Das negative Vorzeichen in (4.41) bzw. (4.42) ist notwendig, da die Krafttrandbedingungen ja eine Kraftvorgabe *auf* das Fluid beschreiben. Damit erhielte man die sogenannte Stützkraft $\mathbf{F}_S$. Diese ist mit $\mathbf{F}_S = -\mathbf{F}_R$ gerade gegengleich zur Reaktionskraft, also der gesuchten Kraft des Fluids auf den Körper. In der Literatur steckt dieses Vorzeichen häufig in der Definition des Normalenvektors $\mathbf{n}$.

Ein kleiner Nachteil dieser Kraftberechnungsmethode ist, dass es nicht möglich ist, Kraftanteile aus Druck- und Viskositätseinflüssen zu trennen. Man erhält stets die gesamte Kraft, die für uns auch völlig ausreichend ist.

Vorteilhaft ist auf jeden Fall aber die Genauigkeit dieser Methode. Wir haben das Szenario des freien Kanals aus dem vorigen Abschnitt mit unserem Programm rechnen lassen. Die Werte von an den Wandknoten ergeben sich dabei lokal stets zu dem analytischen Wert von $\mathbf{F}_S = (-54, 0)^T$. Dies geschieht unabhängig von der Gitterweite h ! Auch wenn der freie Kanal natürlich eine spezielle Situation darstellt, so kann mit den konsistenten Kräften generell die komplette numerische Genauigkeit genutzt werden, die der Finite-Element-Ansatz hergibt.

5. Numerische Ergebnisse

In diesem Kapitel stellen wir die Ergebnisse der numerischen Simulationen vor. Zunächst betrachten wir einige allgemeine Vorgaben an unser Verfahren und gehen auf Teile des Postprocessings ein. Anschließend untersuchen wir als Testbeispiele die Strömung im freien Kanal sowie den Kreiselfluss. Für diese Fälle können wir die analytische Lösung der Navier-Stokes-Gleichungen berechnen und wichtiger Teile des Lösungsalgorithmus überprüfen.

Auf Berechnungen zu dem bekannten Szenario der Nischenströmung ("lid-driven cavity") haben wir verzichtet. Dazu sind in [Weinzierl 05] einige Beispiele aufgeführt. Dafür vergleichen wir unsere Ergebnisse für den Fall der Stufenströmung mit numerischen und experimentellen Daten der Literatur.

Diverse Benchmark-Rechnungen für die Zylinderumströmung ermöglichen uns schließlich eine Validierung in Bezug auf unsere Kraftberechnung.

Die Berechnung von Strömungen um einfache bewegte Hindernisse wie die starre Fahne sind zum Zeitpunkt der Abgabe dieser Arbeit leider noch nicht vollständig abgeschlossen.

5.1. Allgemeines

Wir möchten zunächst einige grundlegende Bemerkungen zu den von uns durchgeführten numerischen Berechnungen machen.

Unser explizites Zeitintegrationsverfahren über die Chorinsche Projektionsmethode bewirkt, dass aus Stabilitätsgründen die Beschränkung der Zeitschrittweite an die Gitterweite h gekoppelt ist. Wir verwenden keine variable Schrittweitensteuerung, nützen aber die in [Griebel et al. 95] dafür vorgeschlagenen Bedingungen

$$\frac{2\Delta t}{\text{Re}} < \left(\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} \right)^{-1}, \quad |u_{\max}|\Delta t < \Delta x, \quad |v_{\max}|\Delta t < \Delta y, \quad (5.1)$$

wobei Δx und Δy bei unserem Gitter identisch mit h sind. Wir können die maximal auftretenden Geschwindigkeiten bei den verschiedenen Strömungskonfigurationen in etwa abschätzen. Zusätzlich berücksichtigen wir auch einen Sicherheitsfaktor der Größenordnung 0.5.

Als Abbruchkriterium für die iterative Druckberechnung aus Gleichungssystem (4.31)

verwenden wir

$$||res^k||_\infty \leq eps ||p_h^k||_\infty \quad (5.2)$$

mit dem Druckresiduum res^k des Iterationsschrittes k und der Maximumsnorm $||\cdot||_\infty$. Zusätzlich können wir die maximale Anzahl an Druckiterationen durch einen Parameter K beschränken: $k \leq K$. Typische Werte von K sind in unseren Rechnungen beispielsweise $K = 100$ oder $K = 250$. Die Toleranz eps ist normalerweise mit $eps = 10^{-5}$ vorgegeben.

In Bezug auf die Messung der Cache-Optimalität ist zu bemerken, dass wir sämtliche Ergebnisse dafür aus Rechnungen auf eine Xeon-Clusters durchgeführt haben. Die einzelnen Knoten sind dabei Intel XEON Doppelprozessoren mit 2.4 GHz und 512 KB cache. Mit dem Werkzeug perfex kann man explizit die auftretenden L2 cache misses messen. Allerdings ist es nicht möglich, die so gewonnenen Daten in Bezug zu bestimmten Teilen des Codes zu setzen.

Wir haben bisher darauf verzichtet, Messungen mit cachegrind durchzuführen. Dieses Tool simuliert die Speicherhierarchie und bewirkt damit eine Laufzeitverlängerung um etwa den Faktor 50, was für unsere Gesamtlaufzeiten wesentlich zu hoch ist.

Für eine detaillierte Beschreibung der verschiedenen Messwerkzeuge verweisen wir auf die Ausführungen in [Günther 04].

Leider war es nicht möglich, L2 Cache-Messungen für sämtliche numerischen Ergebnisse zu erzielen, da uns nur wenige Prozessorknoten für beschränkte Zeiträume zur Verfügung standen. Wenn wir Messungen durchführen konnten, ergab sich für das Gesamtprogramm stets eine cache hit-rate von 98,2 % oder besser.

Zur Visualisierung der Ergebnisse haben wir das Open Source Programm OpenDX verwendet (siehe [OpenDX]). Leider ist es für unsere zellweise gegebenen Druckdaten nicht möglich, Isobaren darzustellen. Das streamline-Modul für die Geschwindigkeiten können wir zwar im Prinzip verwenden. Allerdings bedarf es eines großen Rechenaufwandes und die daraus resultierenden Bilder waren oft wenig hilfreich. Daher werden wir alle unsere Ergebnisse direkt in Druck und Geschwindigkeiten darstellen.

Aufgrund der vielen Zeitschritte, die wir bei den Berechnungen gerade auf den feinen Gittern machen müssen, können wir nicht in jedem Schritt die graphischen Daten speichern. Dies würde eine enorme Menge an Daten bedeuten und auch die effektive Laufzeit unseres Programms negativ beeinflussen. Wir schreiben unsere OpenDX-Dateien daher typischerweise nur alle 500 bis 1000 Zeitschritte auf die Festplatte.

5.2. Testbeispiel des freien Kanals

Um das Verhalten unseres Programms in Bezug auf die Ausflussbedingung zu beobachten, haben wir einige Testfälle zusammengestellt.

Wir betrachten die Situation, die schon in Abbildung 2.2 dargestellt ist: Durch einen quadratischen Ausschnitt eines Kanals strömt Fluid von links nach rechts. An den Wänden gelten Nullrandbedingungen. Interessant ist vor allem das Verhalten am rechten Ausströmrand. Wir erwarten aufgrund der Viskosität des Fluids die Ausprägung einer typischen parabolischen Rohrströmung nach Hagen-Poiseuille (vgl. z. B. [Laschka et al. 01] oder [Batchelor 67]), soweit das bei dem relativ kurzen Kanalstück möglich ist. Bei allen Tests benützen wir eine relativ kleine Reynoldszahl $Re = 1$. Da wir stets eine konstante Dichte $\rho = 1$, sowie $L_\infty = L = 1$ verwenden, ist dies gleichbedeutend mit einer Viskosität $\mu = 1$.

Für verschiedene Gitterfeinheiten haben wir zwei unterschiedliche Geschwindigkeitsvorgaben am linken (Einström-) Rand berücksichtigt. Im Fall *A* geben wir eine über die Kanalhöhe konstante Geschwindigkeitsverteilung vor. Dagegen verwenden wir im Fall *B* ein parabolisches Profil $u(y)$ mit integraler Größe 1:

$$u(y) = -4 h y^2 + 4 h y, \quad h = \frac{3}{2}. \quad (5.3)$$

Die Höhe des Kanals in y -Richtung beträgt 1. Zum Zeitpunkt $t = 0$ ist das Fluid außer am Einlass überall in Ruhe, und auch der Druck ist mit Null initialisiert. Physikalisch gesehen prallt also ein Fluid in Bewegung auf ein solches im Ruhezustand.

Diese Unstetigkeit in der Randvorgabe der Geschwindigkeit, die ja einen Start mit einer nicht divergenzfreien Initiallösung darstellt, hat zur Folge, dass unser Löser je nach Feinheit des Gitters einige Zeitschritte berechnen muss, um die Divergenzfreiheit zu erreichen. Dies ist gleichsam ein Härtetest für die Berechnung. Wir werden sehen, dass unser Verfahren diese Anfangsschwierigkeit aufgrund der Terme $-M_x \gamma \frac{u_h}{dt}$ und $-M_y \gamma \frac{v_h}{dt}$ in (4.31) meistert, wenngleich die Ergebnisse der ersten Rechenschritte dadurch keine physikalisch aussagekräftigen Ergebnisse liefern. Das stört uns an dieser Stelle jedoch nicht sehr, da wir lediglich am stationären Endzustand interessiert sind.

Aus experimentellen Untersuchungen in der Fluidmechanik ist bekannt, dass aufgrund der Viskosität des Fluids in einer laminaren inkompressiblen Rohrströmung der Druck linear mit der Lauflänge abfällt, wohingegen die Geschwindigkeit erhalten bleibt (siehe z. B. [Laschka et al. 01]). Bevor wir die Ergebnisse der numerischen Tests angeben, wollen wir noch kurz ansprechen, was aus Sicht der kontinuierlichen Gleichungen zu erwarten ist.

Für den stationären Fall einer kontinuierlichen parabolischen Geschwindigkeitsverteilung ist die Kontigleichung (2.7) stets erfüllt:

$$0 = \nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 + 0$$

Außerdem fallen einige Anteile in den Impulsgleichungen (2.24) weg. Die zeitliche Ableitung der Geschwindigkeit wird aufgrund der Stationarität zu Null. Der konvektive Term verschwindet, da die Ortsableitungen in x -Richtung (Geschwindigkeitserhalt in Laufrichtung) und die vertikale Komponente v den Wert 0 haben. Der y -Anteil des Laplace-Operators Δ ergibt bei parabolischem Verlauf einen konstanten Term, der im Falle der Modellierung via (5.3) -12 beträgt. Dies ist nach den Impulsgleichungen gleichzeitig der Wert des Druckgradienten:

$$\begin{pmatrix} \nabla_x p \\ \nabla_y p \end{pmatrix} = \nu \begin{pmatrix} \Delta u \\ \Delta v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Mit Hilfe dieser kontinuierlichen Überlegungen können wir nun prüfen, ob wir passende Ausflussrandbedingungen gewählt haben. Gleichzeitig haben wir die Möglichkeit zu testen, ob die Berechnung des diffusiven Terms unseres Verfahrens stimmt. Falsche Skalierungseffekte etc. können wir damit rasch feststellen.

In Bezug auf die numerischen Werte für den Druck ist noch anzumerken, dass diese natürlich von der Wahl der Elemente abhängen. Bei uns ist der Druck stets in der Mitte einer Zelle diskretisiert, daher werden wir im Vergleich zur vollen Länge des Kanals am Einlass und am Auslass je eine halbe Zellbreite verlieren. Dies werden wir bei den nachfolgenden Vergleichsrechnungen stets berücksichtigen.

Fall A: Konstante Geschwindigkeitsverteilung am Einlass

Wir geben eine über den Einlass konstante Geschwindigkeit $u(y) = \frac{4}{3}$ vor. Die verwendeten regulären Gitter lösen das Einheitsquadrat unterschiedlich fein auf. Dabei treten zwischen $3 \times 3 = 9$ und $81 \times 81 = 6561$ Zellen auf.

1.) Gitter 3×3

Dieser erste recht einfache Testfall ermöglichte uns die direkte Kontrolle und Zuordnung sämtlicher Werte des Programms „per Hand“. In Abbildung 5.1 ist der Druck und die Geschwindigkeit nach 3 Zeitschritten der Länge $\tau = 0.1$ angegeben. Wir erkennen klar den linearen Druckabfall auf den (vorgegebenen) Randwert 0. Der Wert in der Einlaufzelle beträgt exakt $p_{\text{inlet}} = 8$, was mit den obigen Überlegungen schön übereinstimmt: Wir erwarten den Wert $12(1 - \frac{2}{6}) = 8$ in den linken Zellen. Der Wert $2/6$ entspricht hier gerade zweimal der halben Gitterweite $h/2 = 1/6$. Die Geschwindigkeiten werden vom Einlass gleichsam durchgereicht und bleiben erhalten, was wiederum einem Parabelprofil am Auslass entspricht. Im Gegensatz zu feineren Gittern stellt sich hier bereits nach wenigen Zeitschritten ein stationärer Zustand ein. Auf diesem groben Level kann das Programm die Unstetigkeiten am Einlauf sehr schnell durch das Gebiet bewegen und die Divergenzfreiheit herstellen.

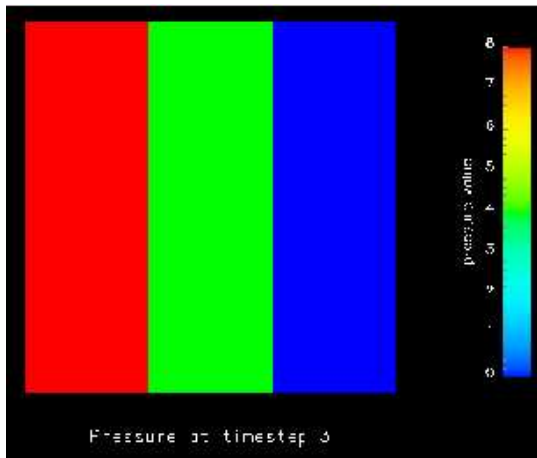
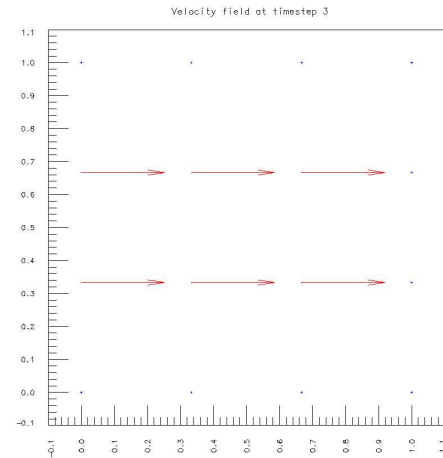
(a) Druck p (b) Geschwindigkeiten u, v

Abbildung 5.1.: 3×3 -Gitter im Fall A: 5.1(a) Druckverlauf, 5.1(b) Geschwindigkeitsverlauf nach dem dritten Zeitschritt.

2.) Gitter 9×9

Für feinere Gitterlevel muss zuerst eine gewisse Zeit gerechnet werden, bevor der stationäre Zustand erreicht ist, da wir eine unstetige und global nicht divergenzfreie Initialgeschwindigkeit vorgegeben haben. Daher haben wir in der Abbildung 5.2 beispielhaft die Ergebnisse nach dem 38. Schritt der Länge $\tau = 0.005$ aufgeführt. Dass die Zeitschrittweite nun geringer ist als beim 3×3 -Gitter, liegt natürlich an unserem expliziten Verfahren, was τ aus Stabilitätsgründen an die Gitterweite koppelt.

Am Einlauf treten aufgrund der konstanten Geschwindigkeit über den Rand nun Drucksingularitäten auf, die man in 5.2(a) gut erkennen kann. Die an den horizontalen Wänden festen Fluidteilchen drängen die neu anströmenden mehr zur Mitte und bewirken so einen vertikalen parabolischen Verlauf von u am Ausfluss.

Der zunächst unphysikalisch hohe Eingangsdruck wird vom Löser erzeugt, um die bisher im Fluidinneren noch nicht vorhandenen Geschwindigkeiten quasi durch den Kanal hindurchzureichen. Mit der Laufzeit stabilisieren sich diese Werte nach und nach auf einem vernünftigen Niveau, das am Ende dem stationären Druckverlauf entspricht.

Der Druck ist außerhalb der Singularitätsbereiche wieder linear geschichtet und hat im Schritt 38 mit $p_{\text{inlet, Mitte}} = 10.27$ fast den Wert, den man aufgrund der bereits oben erwähnten Überlegungen mit der halbverschobenen Position zu 10.66 erwartet. Den Einfluss der Randsingularitäten auf den Einlaufdruck werden wir bei feineren Gittern noch genauer beobachten können.

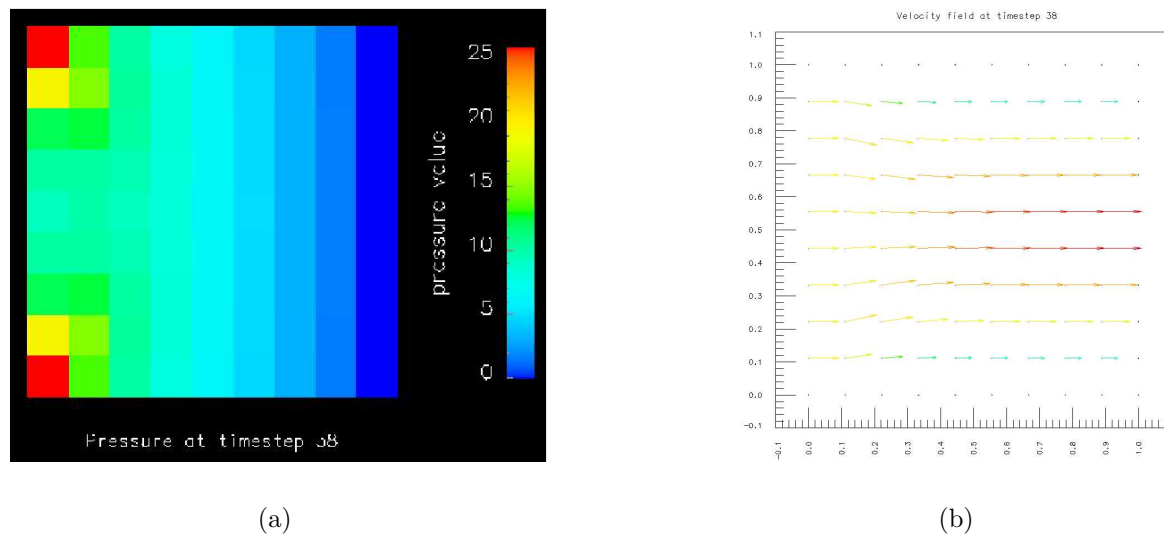


Abbildung 5.2.: 9×9 -Gitter im Fall A: Druck- und Geschwindigkeitsverlauf nach dem 38. Zeitschritt.

3.) Gitter 27×27

Hier ist die Situation ähnlich wie beim 9×9 -Gitter. Erneut wählen wir eine kleinere Schrittweite $\tau = 0.0001$, das Programm braucht also noch etwas mehr Zeitschritte für den stationären Zustand. Deshalb vergleichen wir nun den frühen Zeitschritt 10 mit dem Schritt 1000. Wir beobachten bei konstantem Einfluss $u(y) = \frac{4}{3}$ wieder das Ausbilden der Ecksingularitäten des Drucks, die in Richtung des Fluidinneren abklingen, wie man aus den Abbildungen 5.3(a) und 5.4(a) erkennen kann.

Der Druck verhält sich hier im ersten Drittel eindeutig nicht so linear, wie man es aufgrund den analytischen Überlegungen erwarten würde. Diese gehen aber auch von einer echten quadratischen Rohrströmung aus, so dass dieses Ergebnis sinnvoll ist. Wir erhalten im Zeitschritten 1000 einen Einflusswert des Drucks $p_{\text{inlet, Mitte}}$ von 10.15, im Gegensatz zum analytischen Wert $12 \left(1 - \frac{1}{27}\right) = 11.5\bar{5}$.

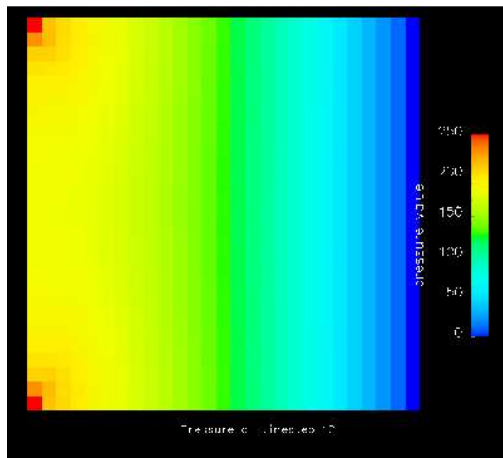
Am Ausfluss bemerken wir wieder die erwünschte Ausbildung eines Parabelprofils für die Geschwindigkeit.

4.) Gitter 81×81

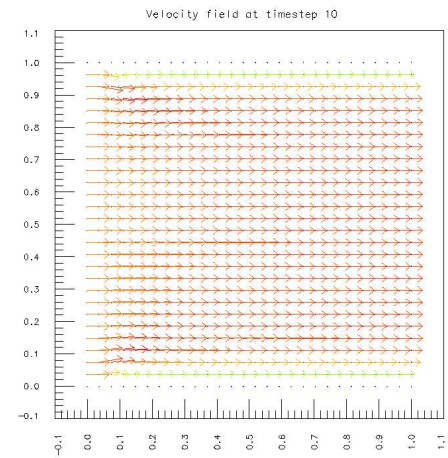
Dieses Gitter stellt das feinste unter den für dieses Beispiel betrachteten Levels dar. Die Zeitschrittweite beträgt mit $\tau = 0.00005$ nun die Hälfte des 27er Gitters. Viele Aussagen lassen sich vom 27×27 -Gitter übertragen.

Wir verzichten auf eine Darstellung der Ergebnisse für Druck und Geschwindigkeit zu einem frühen Zeitschritt, da dies keine neuen Erkenntnisse bringt. Stattdessen sind in Abbildung 5.5 diese Daten zum Zeitschritt 1000 visualisiert.

Der Druck hat nun am Einlauf den Wert $p_{\text{inlet, Mitte}} = 10.297$, der sich wieder



(a)

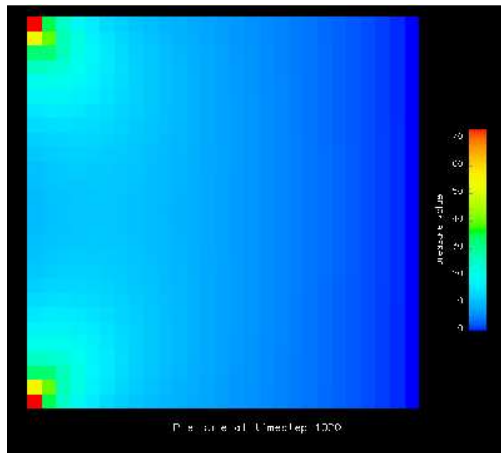


(b)

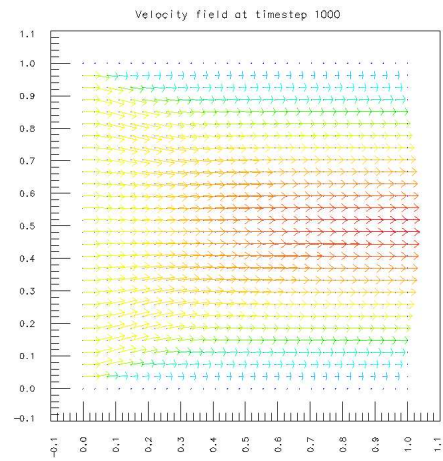
Abbildung 5.3.: 27×27 -Gitter im Fall A: Druck- und Geschwindigkeitsverlauf nach dem 10. Zeitschritt.

unterscheidet von dem analytischen Wert 11.851. Deutlich sieht man wieder den Bereich des Druckverlaufes, der durch die Singularitäten gestört wird. Wo der Einfluss der Singularitäten schwach ist, bildet sich das lineare Druckprofil aus, was man bei Detailbetrachtung erkennt. Das Druckmaximum der Singularität liegt nun mit ca. 213.7 um etwa den Faktor 3 höher als beim 27er Gitter (73.5), da wir aufgrund Gitterverfeinerung näher an die wirkliche Position der Singularität (Ecke) heranrücken.

Wie bei den größeren Gitterlevel ergibt sich eine parabolische Geschwindigkeit am Auslass.

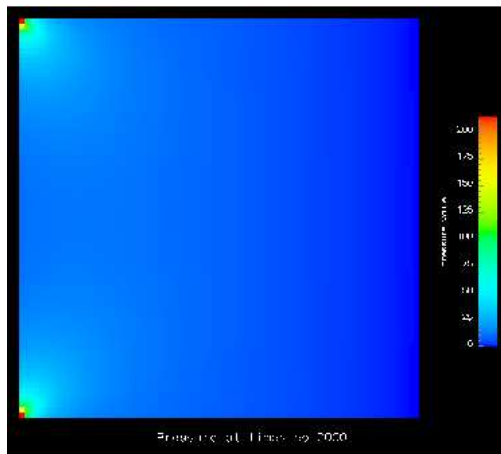


(a)

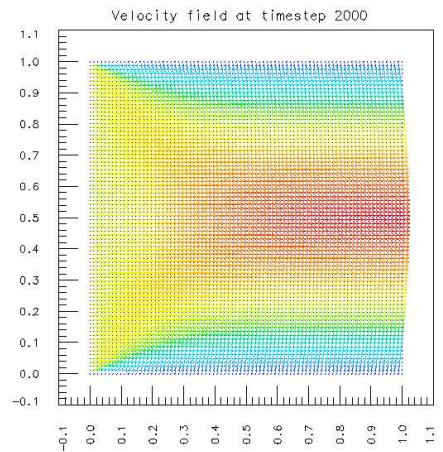


(b)

Abbildung 5.4.: 27×27 -Gitter im Fall A: Druck- und Geschwindigkeitsverlauf nach dem Zeitschritt 1000.



(a)



(b)

Abbildung 5.5.: 81×81 -Gitter im Fall A: Druck- und Geschwindigkeitsverlauf nach dem Zeitschritt 1000.

Fall B: Parabolische Geschwindigkeitsverteilung am Einlass

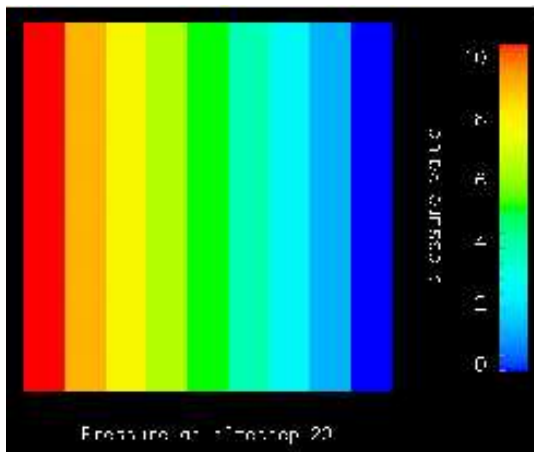
Der grundlegende Unterschied bei der quadratischen Einlaufgeschwindigkeit ist das Fehlen der Drucksingularitäten in den Ecken. Wir erwarten deshalb generell eine schöne lineare Druckschichtung und Druckeinlaufwerte nahe an den Werten der analytischen Überlegung.

Die unterschiedlichen Feinheitsstufen der Gitter sind wie in Fall A zwischen 3 und 81 Zellen pro Kante gewählt. Auch die Zeitschrittweiten sind jetzt jeweils identisch zu den Berechnungen des Falls A.

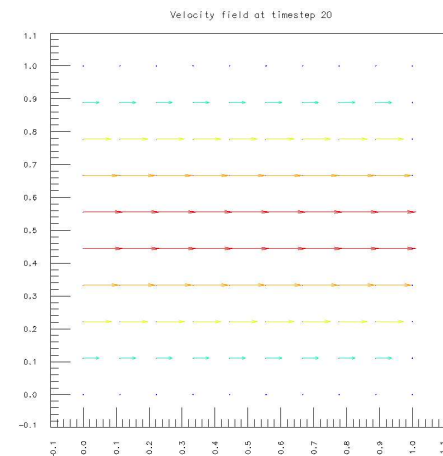
1.) Gitter 3×3

Auf diesem groben Gitterlevel ist für das Programm kein Unterschied zwischen konstanter und parabolischer Geschwindigkeit zu erkennen. Die einzigen beiden Geschwindigkeitsfreiheitsgrade des Parabelprofils am Einlauf haben den gleichen Wert $4/3$. Daher erhalten wir natürlich dieselben numerischen Ergebnisse wie im Fall A (vgl. Abbildung 5.1).

2.) Gitter 9×9



(a) Druck p



(b) Geschwindigkeiten u, v

Abbildung 5.6.: 9×9 -Gitter im Fall B: Druck- und Geschwindigkeitsverlauf nach Zeitschritt 20.

In Abbildung 5.6 sind die Ergebnisse für das 9×9 -Gitter nach dem Zeitschritt 20 dargestellt. Wir erkennen die Ausprägung des Parabelprofils auch am Auslass und die lineare Druckschichtung.

Der Druckwert $p_{\text{inlet}} = 10.667$ am Einlauf entspricht genau dem erwarteten Wert von $12(1 - \frac{1}{9}) = 10.\bar{6}$.

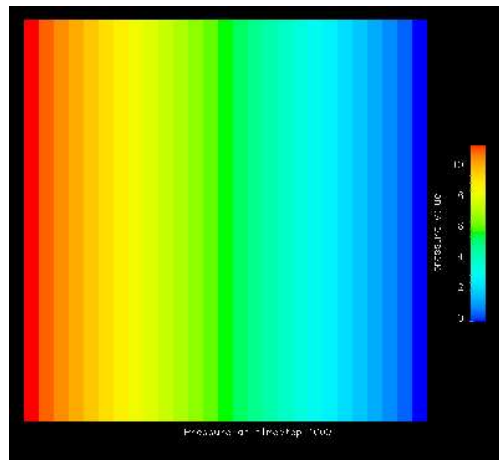
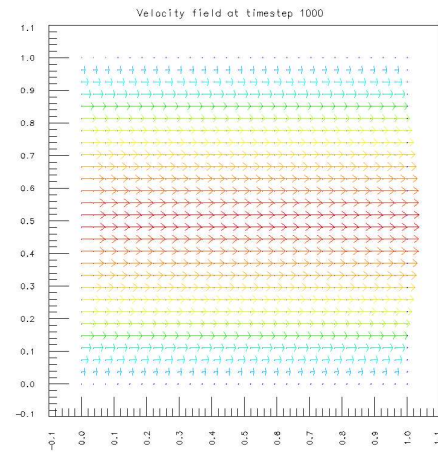
(a) Druck p (b) Geschwindigkeiten u, v

Abbildung 5.7.: 27×27 -Gitter im Fall B : Druck- und Geschwindigkeitsverlauf nach Zeitschritt 1000.

3.) Gitter 27×27

Wir betrachten die nächste Verfeinerungsstufe eines Gitters mit 27×27 Zellen. Die Visualisierung der Ergebnisse für Druck und Geschwindigkeit des Zeitschritts 1000 finden sich in Abbildung 5.7. Wieder stellt sich der lineare Druckverlauf und das Parabelprofil wie erwartet ein.

Am Einlauf erhalten wir einen Druck $p_{\text{inlet}} = 11.5566$, der wieder sehr genau an dem zu erwartenden Wert von $11.5\bar{5}$ liegt.

4.) Gitter 81×81

Die Ergebnisse des feinsten Gitters mit 81×81 Zellen zum Zeitschritt 1000 finden sich in Abbildung 5.8. Das Parabelprofil bildet sich am Auslass wie erwartet aus, und auch der Druck ist wieder linear geschichtet.

Der numerische Wert des Druckes am Einlass beträgt $p_{\text{inlet}} = 11.94$. Dies passt schön zum analytischen Wert von 11.935 .

Als Fazit der Betrachtungen der Fälle A und B lässt sich festhalten, dass die Druck- und Geschwindigkeitswerte mit parabolischer Einlaufgeschwindigkeit keine Störungen durch Singularitäten und dazugehörige Abklinggebiete enthalten. Daher werden wir bei allen späteren Kanalrechnungen als Einlaufbedingungen stets parabolische statt konstante Werte wählen.

Abschließend wollen wir noch erwähnen, dass wir der Vollständigkeit halber für sämtliche Gitterweiten auch einen entsprechende Tests für die Vorgabe von divergenzfreien Initialbedingungen (parabolisches Geschwindigkeitsfeld auf gesamten Rechengebiet) durchgeführt haben. Alle diese Tests haben qualitativ und quantitativ die gleichen Ergebnisse

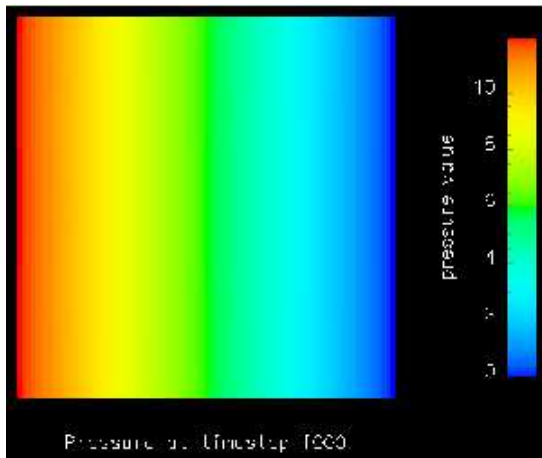
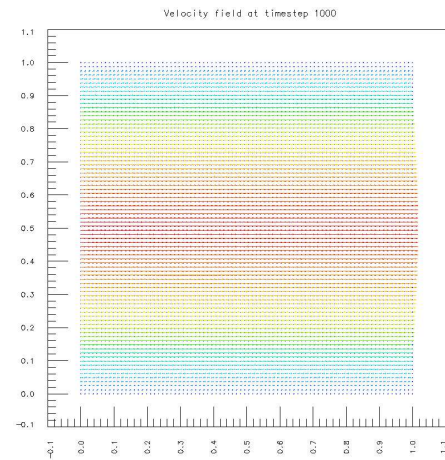
(a) Druck p (b) Geschwindigkeiten u, v

Abbildung 5.8.: 81×81 -Gitter im Fall B : Druck- und Geschwindigkeitsverlauf nach Zeitschritt 1000.

wie die nicht divergenzfreien parabolischen Startgeschwindigkeiten ergeben. Einzig die Berechnung bedurfte weniger Zeitschritte, da die Startlösung der Geschwindigkeit ja bereits korrekt vorlag und nur der Druck noch den passenden Wert annehmen musste.

Natürlich haben wir auch eine alternative Steuerung implementiert, die die Einlaufgeschwindigkeit innerhalb einer vorgegebenen Zeitspanne linear auf den endgültig vorgesehenen Wert hochfährt. Diese Steuerung liefert dieselben Ergebnisse und erweist sich bei Problemen mit vielen Freiheitsgraden als sinnvoll, da die Rechenzeit etwas geringer wird.

5.3. Testbeispiel des Kreiselflusses

Einen weiteren einfachen Testfall bietet eine zweidimensionale Kreiselströmung. Die Geschwindigkeiten der Strömung verhalten sich dabei ähnlich wie auf einem rotierenden Festkörper; sie hängen also lediglich vom Abstand zum Drehzentrum ab:

$$u = y \quad (5.4)$$

$$v = -x. \quad (5.5)$$

Damit ergibt sich eine Strömung, die die Kontinuitätsgleichung erfüllt

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 + 0 = 0.$$

Die Impulsgleichungen

$$0 = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \nu \Delta \mathbf{u} + \frac{1}{\rho} \nabla p$$

lauten mit (5.4) und (5.5) für $\rho = 1$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \\ u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} - \nu \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \nabla_x p \\ \nabla_y p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \nabla_x p \\ \nabla_y p \end{pmatrix}.$$

Der Druckgradient ist so an jeder Position unabhängig von der Viskosität ν festgelegt und es ergibt sich ein Druck, der bis auf eine Konstante c bestimmt ist:

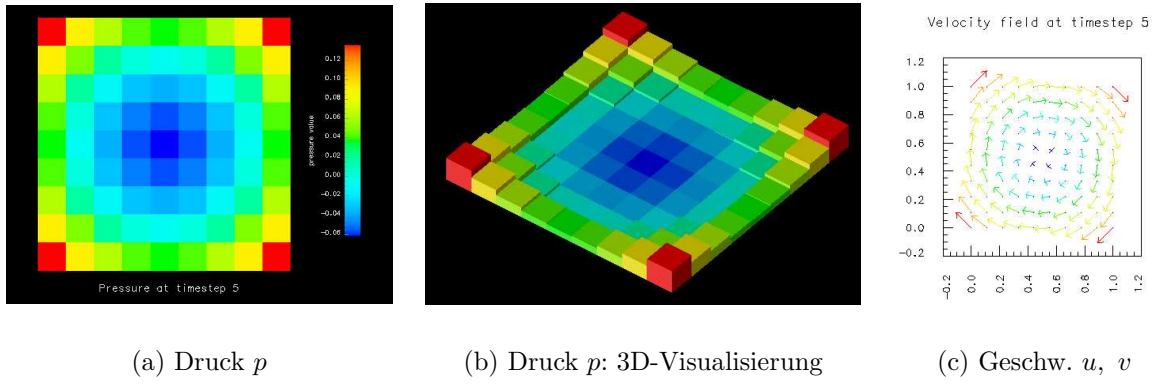
$$\left. \begin{array}{l} \nabla_x p = x \\ \nabla_y p = y \end{array} \right\} \quad p = \frac{1}{2} (x^2 + y^2) + c. \quad (5.6)$$

Wir wählen im Folgenden stets $c = 0$, starten also mit einem Druck $p = 0$ im Drehmittelpunkt.

Nun wollen wir vergleichen, was unser numerischer Löser für dieses Szenario liefert.

Wir wählen dazu als Grundgebiet Ω das Einheitsquadrat $[0; 1]^2$ in zwei Auflösungsstufen. Die Geschwindigkeiten sind tangential und normal zum Rand durch dessen Koordinaten festgelegt. Auch im Inneren des Gebietes geben wir in der Initialisierung schon die richtigen Geschwindigkeiten vor, damit der Löser lediglich noch den Druck passend einstellen muss. Damit sparen wir ein zeitliches Rechnen, das im selben (stationären) Zustand angelangen muss.

Als Referenzwert für den Druck wollen wir stets die rechte obere Ecke des Einheitsquadrates betrachten. Bei der Herleitung von Gleichung (5.6) sind wir von einem Koordinatenursprung im Drehzentrum ausgegangen. Deswegen müssen wir beim Einheitsquadrat alle Koordinaten auf diese Position referenzieren.

Abbildung 5.9.: Kreiselfluss auf $\Omega = [0; 1]^2$: 9×9 -Gitter.

- 9×9 Zellen

Da bei unserer Diskretisierung der Druck in der Mitte jeder Zelle sitzt, müssen wir auch diese Position als Referenz bei den analytischen Werten verwenden. Somit ergibt sich

$$x = y = \left(0.5 - \frac{1}{2 \cdot 9}\right) = 0.\bar{4} \quad (5.7)$$

und damit über (5.6) ein Druck von $p = 0.1975$.

Die numerischen Ergebnisse sind in Abbildung (5.9) dargestellt. Sie zeigen, dass mit dem Eckendruck von $p_E = 0.1360$ und einem Referenzwert von $c_{num} = p_Z = -0.0615$ im Drehzentrum insgesamt genau $p = p_E - p_Z = 0.1975$ erreicht wird. Außerdem sieht man sehr schön die Symmetrie der Lösung.

- 27×27 Zellen

Als Referenzposition für die rechte obere Ecke müssen wir wieder die lokale Gitterweite mit berücksichtigen:

$$x = y = \left(0.5 - \frac{1}{2 \cdot 27}\right) = 0.4814. \quad (5.8)$$

Wir erhalten mit (5.6) also einen Druck von $p = 0.2317$.

Abbildung (5.10) visualisiert die numerischen Ergebnisse. Erneut zeigt sich, dass mit einem Eckendruck von $p_E = 0.1554$ und einem Referenzwert von $c_{num} = p_Z = -0.0763$ im Drehzentrum insgesamt genau $p = p_E - p_Z = 0.2317$ erreicht wird.

Generell ist noch anzumerken, dass in diesem Beispiel der diffusive Term keinen Einfluss auf die Strömungsverhältnisse hat. Der Konvektionsteil liefert als einzigen Nicht-Null-Beitrag Kräfte normal zur Strömungsrichtung. Wir können mit diesem Testbeispiel also nur prüfen, ob unser Konvektionsterm des Algorithmus in normaler Richtung stimmt

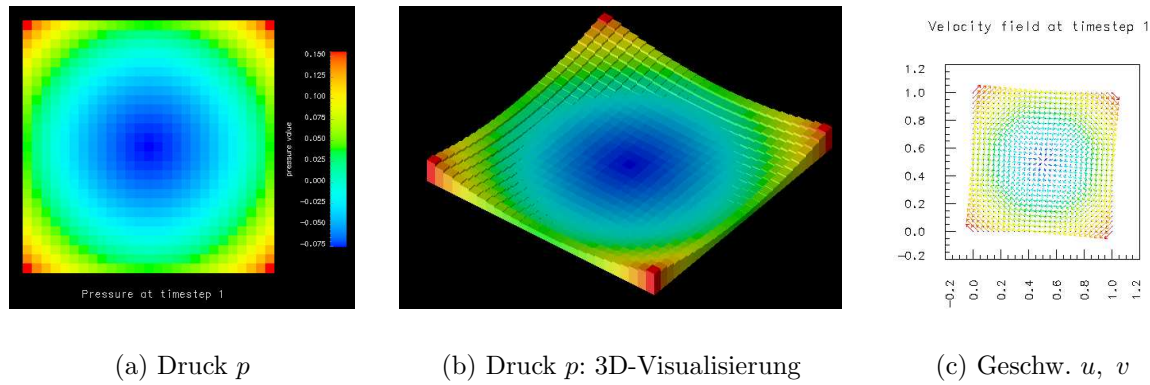


Abbildung 5.10.: Kreiselfluss auf $\Omega = [0; 1]^2$: 27×27 -Gitter.

und ob die Skalierung generell die richtige Größenordnung besitzt (und nicht beispielsweise ein Faktor h falsch gesetzt ist). Tatsächlich erhält man obige Ergebnisse auch mit einem Konvektionsterm, der mit einer Indexvertauschung in der Herleitung berechnet und implementiert wurde und aufgrund der Symmetrien in unserem Testfall nicht zu erkennen ist.

5.4. Stufenströmung

Die Stufenströmung bzw. ”backward-facing step“-Strömung stellt ein interessantes Beispiel dar, da uns hierfür einige experimentelle und numerische Vergleichsdaten zur Verfügung stehen.

Bei diesem Beispiel strömt Fluid von links nach rechts durch einen Kanal, der sich bald in Strömungsrichtung nach unten weitet und so eine Stufe erzeugt. Nach [Wall 99] verhalten sich Strömungen für Reynoldszahlen kleiner als 1200 laminar. Nach einem Übergangsbereich $1200 < Re < 6600$ schlägt das Verhalten in Turbulenz um. Daher haben wir mit $Re = 100, 250, 500, 830$ Szenarien gewählt, die noch eindeutig laminar sind.

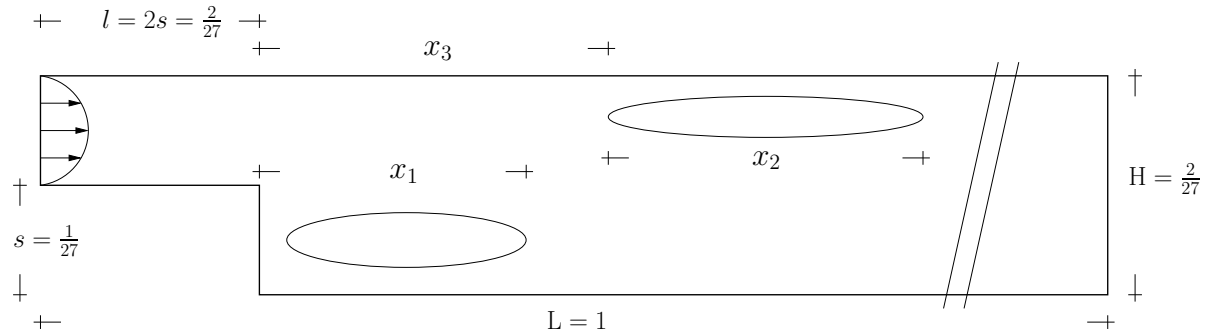


Abbildung 5.11.: Geometrie der ”backward-facing step“-Strömung mit Definition der relevanten Vergleichsgrößen.

In Abbildung (5.11) ist die Geometrie dieser Strömungskonfiguration dargestellt. Aufgrund unseres speziellen quadratischen Gitters haben wir Probleme, das bei [Wall 99] und [Armaly et al. 83] beschriebene Verhältnis von Einströmkanalhöhe/Stufenhöhe exakt gleich $5.2/4.9$ zu wählen. Dazu kommt noch die Tatsache, dass wir Geometriebedingungen nur auf Kanten des größten betrachteten Gitters legen können, wenn wir sicherstellen wollen, dass wir bei Gitterverfeinerung noch dieselbe Geometrie rechnen. Daher haben wir für unsere Simulationen ein Verhältnis $(H - s)/s = 1$ gewählt, wie es auch bei [Griebel et al. 95] verwendet wird.

Neben der Geometriebeschreibung finden sich in Abbildung (5.11) auch die Definitionen der Vergleichsgrößen x_1 , x_2 und x_3 . Diese sogenannten ”Reattachment“-Längen ermöglichen uns zusammen mit der Stufenhöhe s einen quantitativen Vergleich mit den Ergebnissen der gerade zitierten Literatur.

Bei der Ermittlung der Reynoldszahl verwenden wir wie [Armaly et al. 83] und [Wall 99] als charakteristische Länge L_∞ den hydraulischen Durchmesser (doppelte Einströmhöhe $2(H - s) = 2/27$) und als charakteristische Geschwindigkeit die mittlere Einströmgeschwindigkeit $U_\infty = \bar{u}_{in} = 1$ der parabolischen Einlaufvorgabe.

Wir haben für alle Reynoldszahlen je zwei Simulation mit unterschiedlich feinen regulären Gittern aufgeführt. Das gröbere der beiden Gitter wird im Folgenden als 243-

Gitter bezeichnet. Es besitzt $3^5 = 243$ Zellen auf die Gesamtlänge $L = 1$ und damit insgesamt 4212 Elemente. Dagegen hat das feinere 729-Gitter 37908 innere Zellen. Im Vergleich dazu rechnet [Wall 99] beispielsweise mit 7128 Elementen, die allerdings den Strömungsverhältnissen etwas angepasst sind.

Bevor wir die Ergebnisse unserer Simulationsläufe für die verschiedenen Reynoldszahlen auflisten, wollen wir noch kurz ansprechen, dass es bei der Ermittlung und dem Vergleich der Reattachment-Längen zwei Schwierigkeiten gibt. Einerseits haben wir gerade auf dem groben 243-Gitter einen gewissen Spielraum bei der Längenmessung. Wir haben versucht, hierbei möglichst objektiv und einheitlich vorzugehen. Andererseits haben wir als Vergleichswerte in Bezug auf [Armaly et al. 83] nur die dort aufgeführten Diagramme zur Verfügung. Das Ablesen der Werte ist nicht immer ganz einfach und sicher auch nicht immer sehr exakt.

Ergebnisse auf dem 243-Gitter

Hinter der Stufe entsteht durch das darüberströmende Fluid ein Wirbel, der bei zunehmender Reynoldszahl größer wird. Ab einem Wert von $Re \approx 500$ zieht die sinkende Viskosität die Strömung im Nachlauf des Wirbels nach unten und erzeugt so einen weiteren Wirbel an der Oberseite des Kanals.

Tabelle 5.1.: Überblick: Reattachment-Längen x_i zu Stufenhöhe s .

	243-Gitter	[Griebel et al. 95] (num.)	[Wall 99] (num.)	[Armaly et al. 83] (experimentell)	[Armaly et al. 83] (num.)
Re=100 x_1/s	2.94	3.8	2.9	3.0	2.9
Re=250 x_1/s	5.83	5.8	-	5.6	5.65
Re=500 x_1/s	7.2	8.3	-	10.0	8.8
x_2/s	6.6	9.1	-	4.1	3.8
x_3/s	5.8	6.2	-	7.5	6.9
Re=830 x_1/s	9.0	-	11.9	14.0	7.6
x_2/s	7.6	-	10.3	8.6	6.2
x_3/s	10.7	-	9.9	11.4	5.3

In Tabelle 5.1 haben wir die von uns gemessenen Reattachment-Längen x_i im Verhältnis zur Stufenhöhe s aufgelistet. Dort findet man auch die jeweiligen Vergleichswerte aus [Griebel et al. 95], [Wall 99] und [Armaly et al. 83].

Die relativ großen Diskrepanzen zwischen experimentellen Daten aus [Armaly et al. 83] und allen numerischen Simulationen ab einer Reynoldszahl von 500 erklären sich aus der

Tatsache, dass im Experiment dreidimensionale Effekte auftreten, die man mit einem zweidimensionalen Modell natürlich nicht erfassen kann. Außerdem vernachlässigen alle numerischen Berechnungen den wenn auch geringen Einfluss des Eigengewichtes des Fluids.

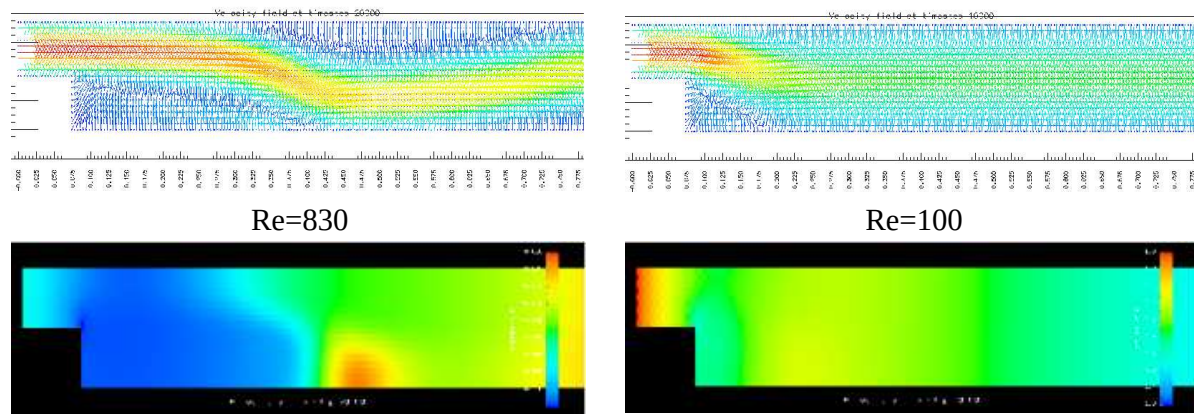
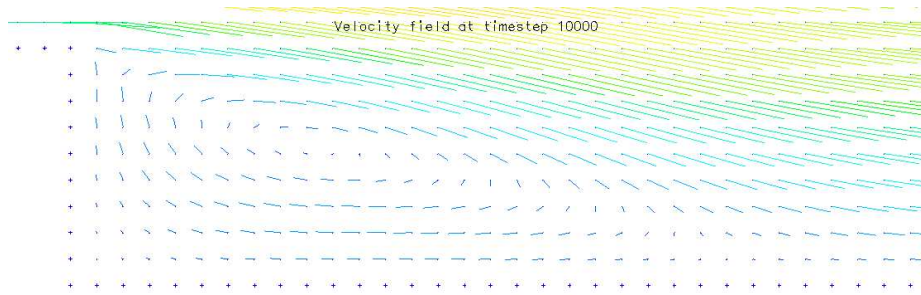


Abbildung 5.12.: Stufenströmung: Geschwindigkeiten und Druck für $Re = 830$ (links) und $Re = 100$ (rechts). Die Bilder für das 243-Gitter sind jeweils zweifach überhöht dargestellt.

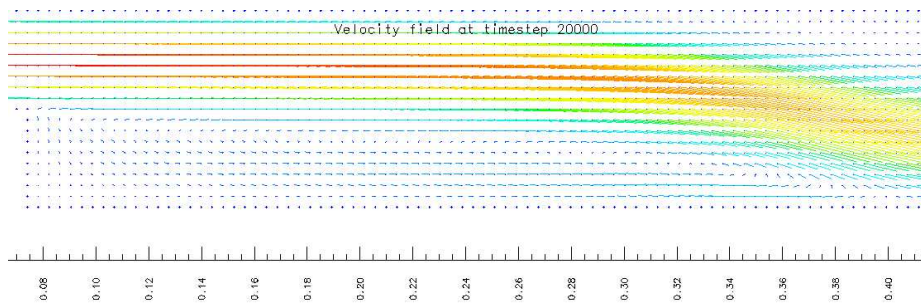
Weiterhin haben wir in Abbildung 5.12 beispielhaft Druck- und Geschwindigkeitswerte für die Fälle $Re = 100$ und $Re = 830$ visualisiert. Dabei ist zu beachten, dass der dargestellte Bereich zweifach überhöht ist und zudem nicht die tatsächliche Länge L des Kanals zeigt, sondern nur $0.75 \cdot L$. Man erkennt auf den beiden unteren Bildern die Drucksingularitäten an der Stufenhecke.

Um die Wirbel zu erkennen, sind die Überblicksdarstellungen in 5.12 allerdings zu klein. Wir haben deshalb die interessanten Bereiche für $Re = 100$ in Abbildung 5.13(a) bzw. für $Re = 830$ in Abbildung 5.13(b) noch einmal vergrößert dargestellt. In den Bildern ist die Geschwindigkeit in Form von Nadeln visualisiert, deren Länge und Farbe den Betrag am jeweiligen Punkt beschreiben.

Für den Fall $Re = 100$ haben wir die Berechnung mit Cache-Messungen durchführen können. Der Wert der L2-cache misses liegt für den gesamten Programmlauf bei 1.31%, was gleichbedeutend ist mit einer cache hit rate von 98.69%.



(a) $Re = 100$



(b) $Re = 830$

Abbildung 5.13.: Wirbel im Nachlauf der Stufe für $Re = 100$ und $Re = 830$.

Ergebnisse auf dem 729-Gitter

Tabelle 5.2.: Stufenströmung auf 729-Gitter: x_i/s für $100 < \text{Re} < 830$

	Re = 100	Re = 250	Re = 500	Re = 830
x_1/s	3.05	5.79	8.10	8.75
x_2/s	-	-	7.31	10.37
x_3/s	-	-	6.62	7.01

Wir betrachten nun knapp die Ergebnisse für dieselben Szenarien wie oben, allerdings auf einem einmal mehr verfeinerten Gitter. Natürlich verhält sich die Strömung mit einem bzw. zwei Wirbeln im Nachlauf analog zum groben Gitter.

In Tabelle 5.2 haben wir die Verhältnisse von Reattachment-Längen x_i zu Stufenhöhe s dargestellt. Erneut stellt man für die eher kleineren Reynoldszahlen 100 und 250 eine recht gute Übereinstimmung mit den experimentellen und numerischen Daten fest (vgl. Tabelle 5.1).

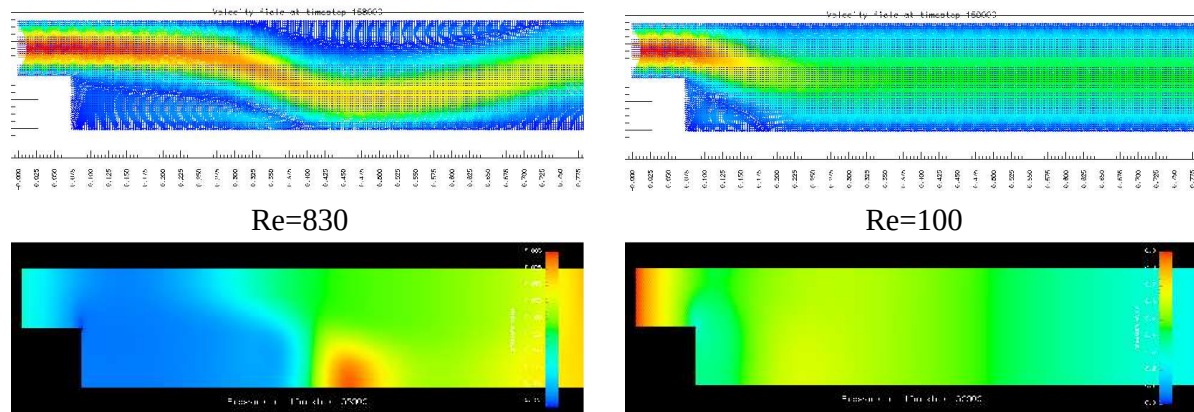
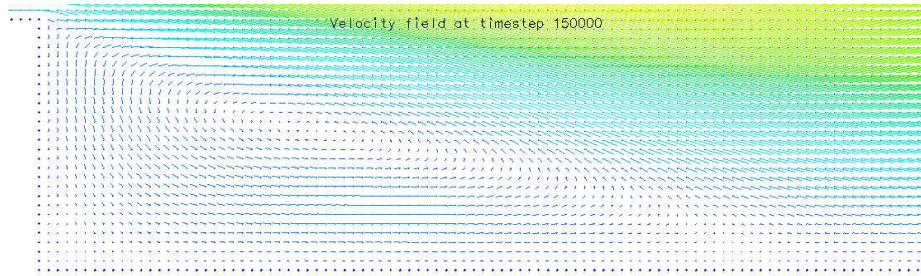


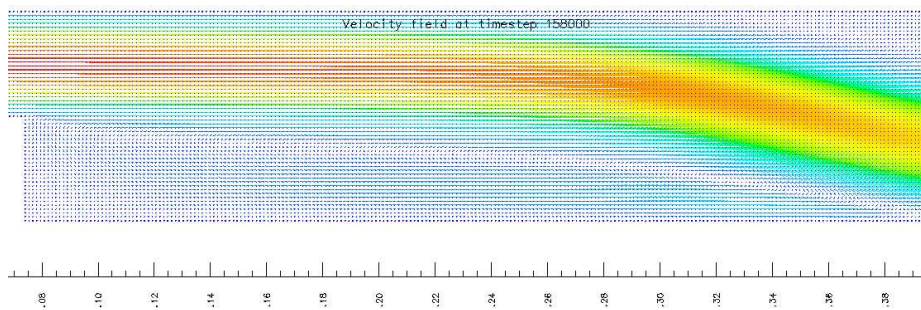
Abbildung 5.14.: Stufenströmung: Geschwindigkeiten und Druck für $\text{Re}=830$ (links) und $\text{Re}=100$ (rechts). Die Bilder für das 729-Gitter sind jeweils zweifach überhöht dargestellt.

Auch die Visualisierung für Druck und Geschwindigkeit in den beiden Fällen $\text{Re} = 100$ und $\text{Re} = 830$ in Abbildung 5.14 zeigt das vom groben Gitter bekannte Bild.

Den ersten Nachlaufwirbel haben wir für das feine Gitter in Abbildung 5.15(a) und 5.15(b) vergrößert visualisiert.



(a) $Re = 100$



(b) $Re = 830$

Abbildung 5.15.: Wirbel im Nachlauf der Stufe für $Re = 100$ und $Re = 830$ auf dem 729-Gitter.

5.5. Zylinderumströmung

Die stationäre bzw. zeitabhängige Umströmung eines Zylinders ist das „klassische“ Beispiel einer inkompressiblen zweidimensionalen Strömung. Neben vielen experimentellen Daten gibt es eine ganze Menge an Literatur zur numerischen Simulation dieses Szenarios. Die Berechnungen des DFG-Benchmark [Turek et al. 97] zeigen aber auch, dass diese Strömungskonfiguration nach wie vor einen Härtetest für Navier-Stokes-Löser darstellt.

Nach [Wall 99] werden bei der Zylinderumströmung folgende charakteristische Strömungsbereiche unterschieden:

- stationäre Umströmung $\text{Re} < 49$
- laminare Wirbelablösung $49 < \text{Re} < 140 - 190$
- Übergang zu 3D-Wirbelbildung $190 < \text{Re} < 260$
- Übergang zu turbulenter Ablösung $260 < \text{Re}$

Interessant ist vor allem das Phänomen der laminaren Wirbelablösung, das auch als Kármánsche Wirbelstraße bekannt ist. Dabei bewirkt eine Instabilität der laminaren Strömung ein Ablösen der beiden gegengleichen Wirbel im Nachlauf des Zylinders. Mit einer gewissen Frequenz schwingen die Nachlaufwirbel dann abwechselnd und lösen ab.

Wir haben im Folgenden numerische Beispiele aus den beiden Bereichen gewählt, die eine rein zweidimensionale Charakteristik aufweisen: die stationäre Zylinderumströmung bei $\text{Re} = 20$ und $\text{Re} = 40$ sowie die laminare Wirbelablösung bei $\text{Re} = 100$. Für diese Reynoldszahlen haben wir eine Reihe numerischer Vergleichswerte aus [Griebel et al. 95], [Turek 98] und [Wall 99] zur Verfügung.

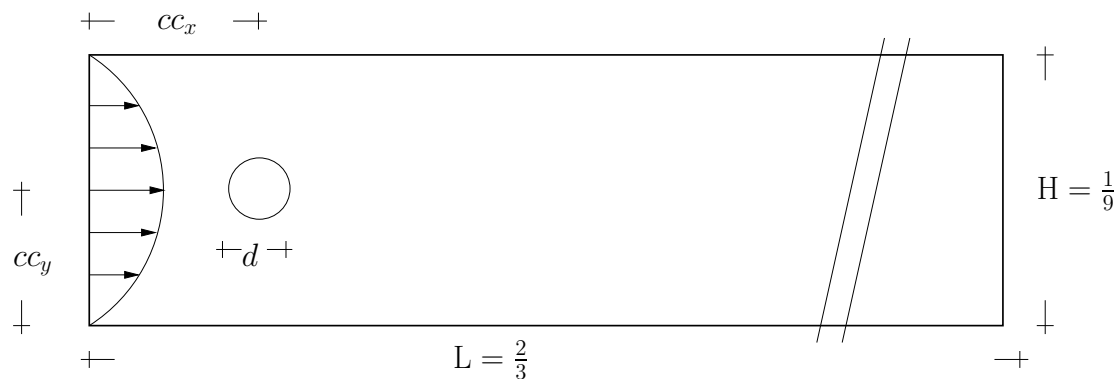


Abbildung 5.16.: Geometrie der Zylinderumströmung. Der Zylinder mit Zentrum in $(cc_x, cc_y) = (0.0555, 0.0535)$ besitzt den Durchmesser $d = 0.025$.

In Abbildung 5.16 sind geometrischen Daten für die folgenden Strömungsberechnungen dargestellt. Diese Wahl der Geometrie entspricht bis auf eine geringfügig größere Kanallänge genau den Vorgaben aus [Griebel et al. 95] und [Turek et al. 97]. In [Wall 99]

wird bei $Re = 40$ dagegen ein Zylinder im freien Fluid betrachtet, so dass gewisse Unterschiede in den Vergleichsrechnungen zu erwarten sind.

Wir haben die jeweiligen Vergleichsfälle für zwei Gitterfeinheiten berechnet. Das gröbere 243-Gitter besitzt 4374 Zellen im Strömungsgebiet, wohingegen das feinere 729-Gitter mit 39366 Zellen aufgelöst ist. Damit liegen wir in Bezug auf die Anzahl der Elemente auf dem 243-Gitter im Vergleich zu [Turek 98] zwischen den Levels 3 und 4 und auf dem 729-Gitter zwischen den Levels 5 und 6. [Turek 98] weist darauf hin, dass für gute qualitative Ergebnisse mindestens ca. 8000 Zellen notwendig sind. Möchte man auch quantitativ aussagekräftige Daten erhalten, so bedarf es 30000 Zellen oder mehr.

Aufgrund unserer veränderten Geometriedaten gegenüber [Griebel et al. 95], [Wall 99] und [Turek et al. 97] haben wir natürlich eine andere charakteristische Länge $L_\infty = d = 0.025$. Wir haben für alle folgenden Simulationen ein linear anwachsendes parabolisches Einlaufprofil über die Kanalhöhe vorgegeben. Ferner hat die Dichte stets den Wert $\rho = 1.0$.

5.5.1. Stationärer Strömungszustand

Re = 20

Dieses Beispiel entspricht genau dem stationären 2D-Testfall aus [Turek et al. 97]. Die hierbei relevanten Vergleichsdaten sind: Länge der Rezirkulationszone L_α im Nachlauf des Zylinders, Druckdifferenz Δp zwischen Staupunkt vorne am Zylinder und dem gegenüberliegenden Punkt auf der Zylinderrückseite, sowie die Druckbeiwerte

$$c_d = \frac{2F_x}{\rho \bar{u}_{in}^2 L_\infty}, \quad c_l = \frac{2F_y}{\rho \bar{u}_{in}^2 L_\infty}.$$

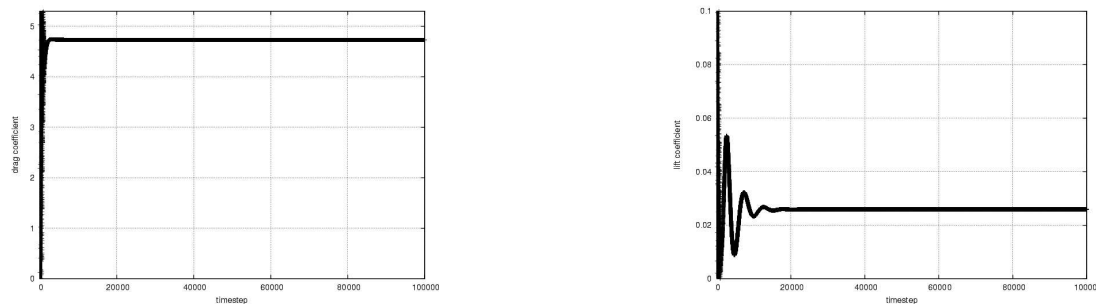


Abbildung 5.17.: Zylinderumströmung bei $Re = 20$: Widerstands- (links) und Auftriebsbeiwert (rechts).

Für unsere Wahl der Strömungskonfiguration bedeutet dies, dass wir die Kraftwerte des Programms jeweils mit einem Faktor 80 gewichten müssen, um die Druckbeiwerte zu

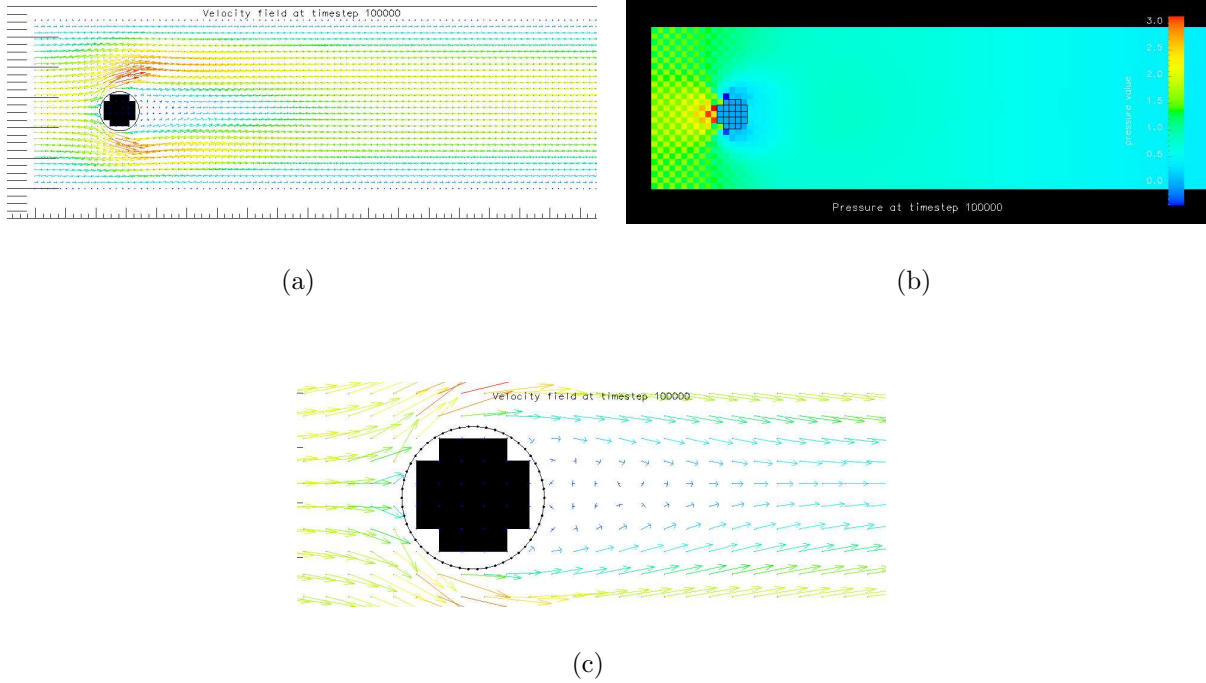


Abbildung 5.18.: Zylinderumströmung bei $Re = 20$: Geschwindigkeits- (a) und Druckverlauf (b) um den Zylinder, sowie dessen Nachlaufzone (c). Hier ist auch der echte Zylinder und das daraus vom Programm ermittelte Hindernis visualisiert.

erhalten. Die charakteristische Länge $L_\infty = d = 0.025$ ist bei uns genau vier mal kleiner als in [Turek et al. 97]. Diesen Geometriefaktor $G = 4$ müssen wir bei Längenangaben stets berücksichtigen.

In Abbildung 5.18 haben wir Strömungsverhältnisse im stationären Zustand für das 243-Gitter dargestellt. Das Ablesen der Rezirkulationslänge ist auf diesem eher groben Gitter mit Schrittweite $h = 1/243$ natürlich nicht ganz eindeutig. Wir messen $L_\alpha \approx 5h = 0.0205$, was mit dem oben erwähnten Geometriefaktor G zu $GL_\alpha \approx 0.0823$ wird. Im Vergleich dazu wird in [Turek et al. 97] ein Bereich von 0.0842 bis 0.0852 angegeben.

In Bezug auf die Druckdifferenz Δp direkt vor und hinter dem Zylinder verwenden wir gemittelte Vergleichswerte wie in (4.35). Damit erhalten wir einen Wert von $\Delta p = 2.28$, der im Vergleich zum Referenzwert 0.117 wesentlich zu hoch ist.

Eine Visualisierung der Druckbeiwerte findet sich in Abbildung 5.17. Wir beobachten einen Einschwingvorgang aufgrund des Erreichens des vollen Parabelprofils erst nach $T = 0.1$ und aufgrund der relativ engen Vorgabe von $K = 100$ in Bezug auf die maximal erlaubte Anzahl von Druckiterationen. Danach stabilisieren sich Widerstands- und Auftriebsbeiwert im stationären Zustand bei $c_d = 4.728$ bzw. $c_l = 0.025$. Die Vergleichswerte

aus [Turek et al. 97] betragen $c_d = 5.580$ und $c_l = 0.0107$.

Wir wollen abschließend die Ergebnisse der selben Konfiguration auf dem feinen 729-Gitter darstellen.

Bei der Kraftberechnung konnten wir einen kleinen aber wirkungsvollen Programmierfehler leider erst knapp vor der Fertigstellung dieser Arbeit eliminieren. Dieser Fehler betrifft lediglich das korrekte Aufsammeln der Kraftanteile in y -Richtung. Für die Simulationen auf den groben Gittern stellt das kein Problem dar, wir konnten die Berechnungen einfach wiederholen. In Bezug auf die feinen 729-Gitter sind die Ersatz-Simulationen aufgrund der langen Laufzeit derzeit noch nicht abgeschlossen.

Deshalb können wir alle Vergleichsdaten bis auf die korrekten Auftriebsbeiwert c_l darstellen. Insbesondere sind bei dem festen Hindernis die Strömungsverhältnisse durch Fehler in der Kraft natürlich nicht betroffen, so dass die Visualisierungen stimmen.

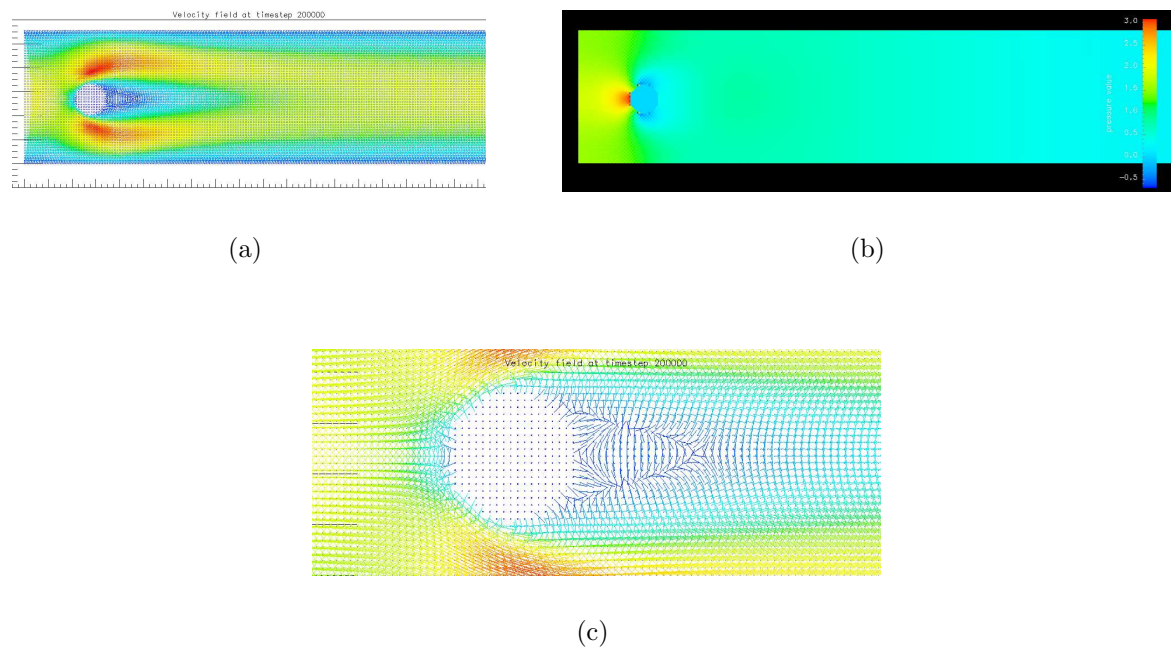


Abbildung 5.19.: Zylinderumströmung bei $Re = 20$: Geschwindigkeits- (a) und Druckverlauf (b) um den Zylinder, sowie dessen Nachlaufzone (c) auf dem 729-Gitter.

In Abbildung 5.19 sind die Ergebnisse des feinen Gitters dargestellt. Wir haben die Nachlaufzone diesmal mit Geschwindigkeitspfeilen visualisiert, damit man das Hindernis gut identifizieren kann.

Wir messen eine Nachlauflänge von $L_\alpha \approx 17h$, was mit dem Geometrieskalierungsfaktor $G = 4$ einen Wert von 0.0932 liefert. Die Druckdifferenz ergibt mit $\Delta p = 2.62$ wie beim groben Gitter einen höheren Wert als in [Turek et al. 97]. Der Widerstandsbeiwert $c_d = 5.317$ liegt auf dem feinen Gitter nun näher am Vergleichswert 5.58.

Alle Ergebnisse sind im Überblick in Tabelle 5.3 nochmals den Werten des DFG-Benchmarks gegenübergestellt.

Tabelle 5.3.: Zylinderumströmung bei $Re = 20$: Überblick der Referenzwerte.

	L_α	c_d	c_l	Δp
243-Gitter	0.0823	4.728	0.025	2.29
729-Gitter	0.0932	5.317	-	2.62
[Turek et al. 97]	0.0847	5.580	0.0107	0.117

Im Anhang B ist mit B.1 eine Abbildung des stationären Strömungszustandes für $Re = 26$ enthalten, die aus experimentellen Untersuchungen entstand und in [Van Dyke 82] zu finden ist. Man erkennt dort schön die beiden gegenläufigen Nachlaufwirbel, die wir auch in unserer Simulation erhalten haben.

Re = 40

Die stationäre Zylinderumströmung bei einer Reynoldszahl von 40 wird in [Wall 99] beschrieben. Leider werden dort als Referenzwerte nur das Verhältnis von Rezirkulationslänge zu Zylinderradius $2L_\alpha/d$ und der Winkel α des Ablösepunktes am Zylinder angegeben. Die Druckdifferenz Δp lässt sich aus dem dort angegebenen Druckverlauf zu $\Delta p = 0.95$ bestimmen.

Den Winkel α können wir auf dem groben 243-Gitter nicht wirklich messen und selbst beim feinen Gitter ist das nicht sehr genau. Daher beschränken wir uns auf einen Vergleich von $2L_\alpha/d$.

Die Ergebnisse unserer Simulation sind in Abbildung 5.20 dargestellt. Wie erwartet wird die Nachlaufzone aufgrund der höheren Reynoldszahl im Vergleich zum vorhergehenden Beispiel mit $Re = 20$ nun länger.

Wir ermitteln aus Abbildung 5.20(c) ein Verhältnis $2L_\alpha/d \approx 3.52$. Dagegen gibt Wall einen Wert von 4.27 an. In Bezug auf den Druckunterschied erreichen wir mit $\Delta p = 1.99$ wieder einen erheblich höheren Wert als die Referenz.

Bevor zu den Ergebnissen des feineren 729-Gitters kommen, geben wir noch die Druckbeiwerte im stationären Endzustand unserer Rechnung an:

$$c_d = 3.409, \quad c_l = -0.014.$$

Auf dem 729-Gitter finden wir das oben beschriebene Verhalten bestätigt. Die Ergebnisse sind in Abbildung 5.21 zusammengefasst.

Der Druckunterschied Δp ist ähnlich zum groben Gitter mit $\Delta p = 2.33$ wieder relativ hoch. Dagegen ist das Verhältnis von Rezirkulationslänge zu Zylinderradius $2L_\alpha/d =$

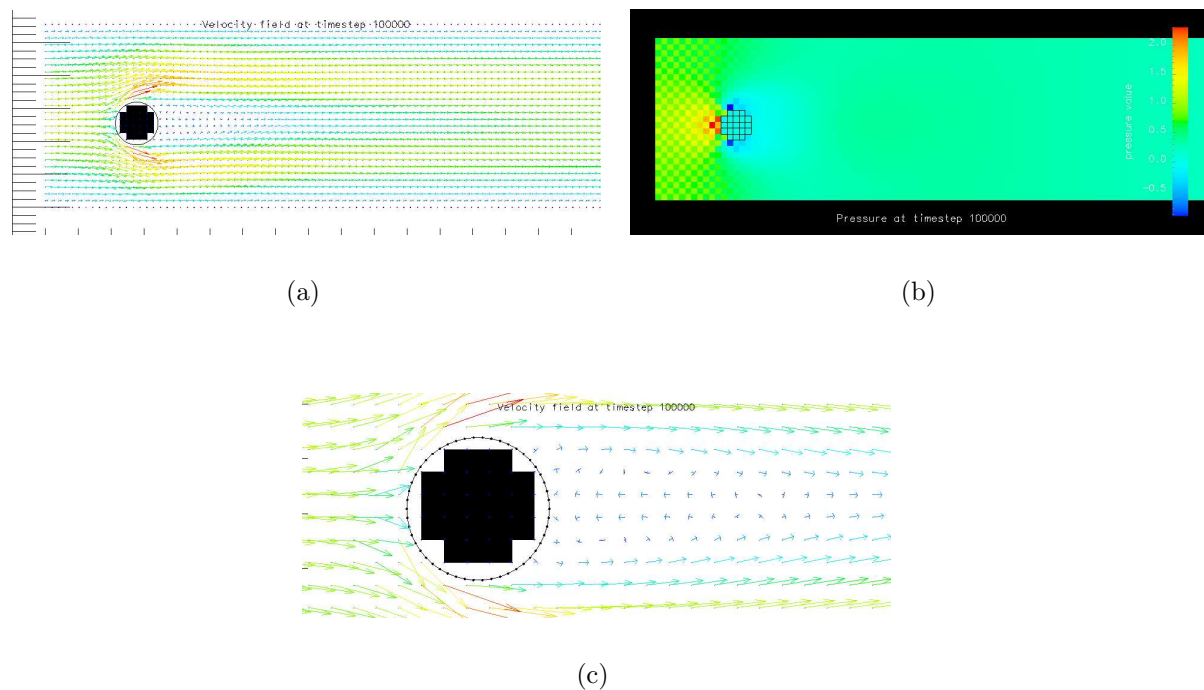


Abbildung 5.20.: Zylinderumströmung bei $Re = 40$: Geschwindigkeits- (a) und Druckverlauf (b) um den Zylinder, sowie dessen Nachlaufzone (c).

4.279 jetzt praktisch identisch mit dem in [Wall 99] angegebenen Wert von 4.27. Für den Widerstandsbeiwert erhalten wir $c_d = 3.88$. Der Winkel α zwischen x -Achse mit Zentrum im Zylinderzentrum und der Position der Ablösung der Nachlaufwirbel beträgt etwa 48° .

Tabelle 5.4.: Zylinderumströmung bei $Re = 20$: Überblick der Referenzwerte.

	L_α/R	c_d	Δp	α
243-Gitter	3.520	3.40	1.99	-
729-Gitter	4.279	3.88	2.33	48°
[Wall 99]	4.270	-	0.95	52°

In Tabelle 5.4 sind die Vergleichswerte nochmals aufgelistet.

Die Visualisierung eines zu dieser Konfiguration nahezu identischen Experimentes ist in Anhang B zu finden. Dort wird in B.2 ein freier Zylinder bei $Re = 41$ umströmt. Man erkennt sehr schön die Rezirkulationszone mit den beiden stationären Wirbeln.

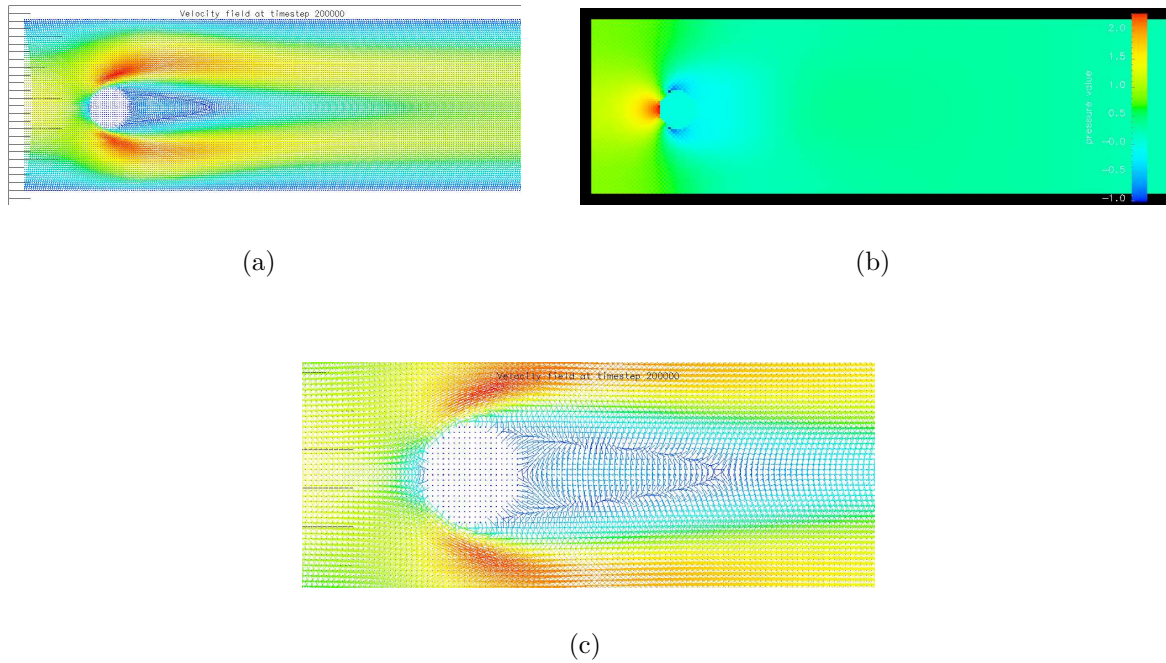


Abbildung 5.21.: Zylinderumströmung bei $Re = 40$: Geschwindigkeits- (a) und Druckverlauf (b) um den Zylinder, sowie dessen Nachlaufzone (c) auf dem 729-Gitter.

5.5.2. Instationärer Strömungszustand: Kármánsche Wirbelstraße

In diesem Abschnitt stellen wir die numerischen Ergebnisse für die instationäre Zylinderumströmung vor. Wie bei den vorherigen Beispielen vergleichen wir auch hier das gröbere 243-Gitter mit dem 729-Gitter. Wir vergleichen einerseits die Referenzwerte aus [Turek et al. 97], andererseits haben wir mit den Bildern aus [Turek 98] auch einen direkten graphischen Vergleich in Bezug auf die Druckbeiwerte.

Alle Rechnungen liefen bis zu einer Gesamtzeit von $T = 2$ Sekunden in unserer Zeitskala. Das entspricht aufgrund der dimensionslosen Zusammenhänge einer Endzeit von $T_{DFG} = 8$ in der Skala von [Turek 98], die bei ihren Vergleichsrechnungen $T_{DFG} = 5$ verwenden.

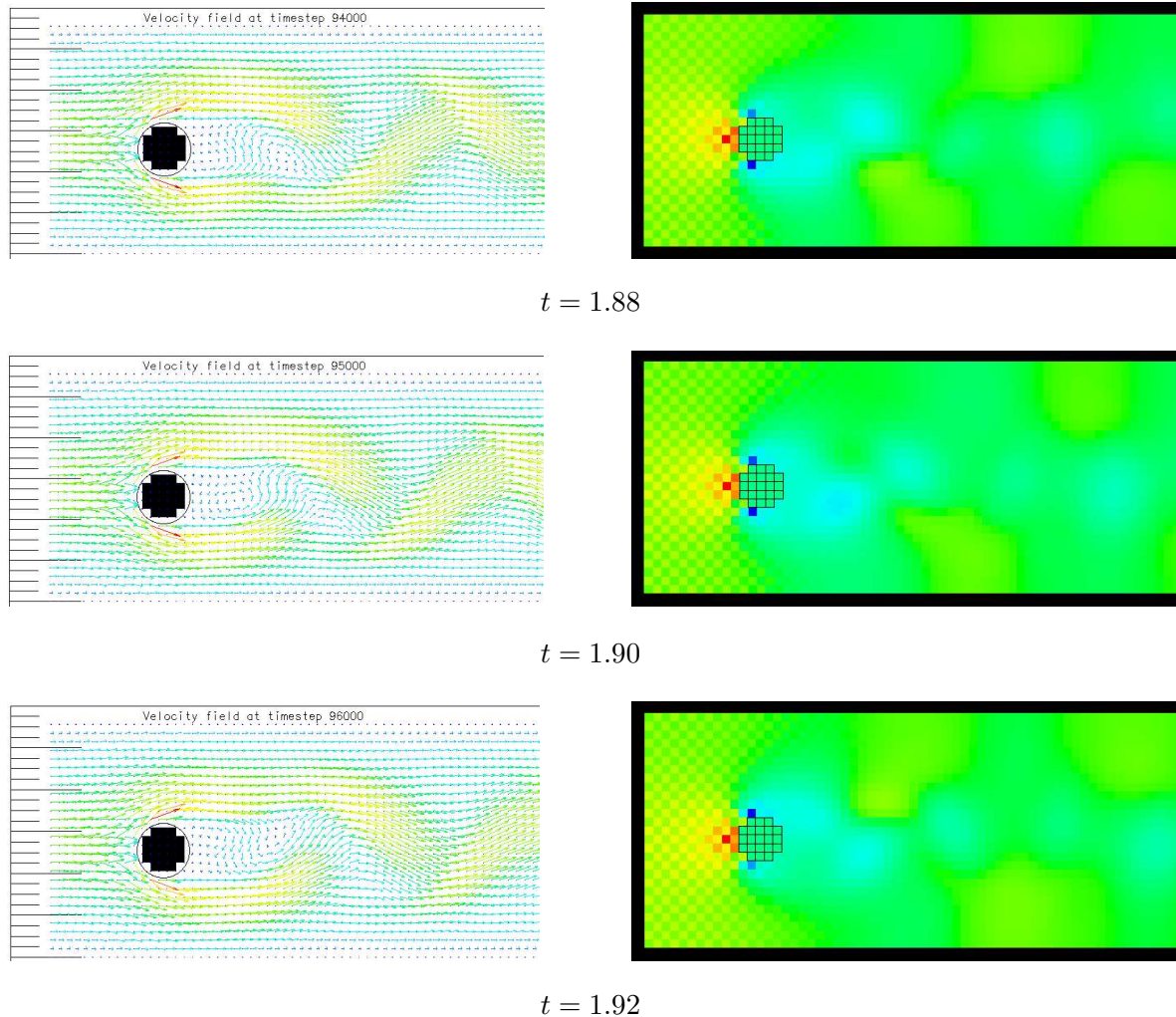


Abbildung 5.22.: Zylinderumströmung bei $Re = 100$: Lösung zu drei Zeitschritten, die zusammen eine halbe Periode ergeben: $0.04 \approx 0.0838/2$.

Wir stellen nun unsere Ergebnisse des 243-Gitters vor. Die Veränderung von Druck und

Geschwindigkeit über etwa die Hälfte einer Periode sind in Abbildung 5.22 dargestellt. Die Periodendauer T_{per} konnten wir mit Hilfe der Kraftkoeffizienten auf $T_{per} = 0.0838$ Sekunden ermitteln. Damit ergibt sich eine Strouhalzahl von

$$St := \frac{L_{\infty}}{\bar{u}_{in} T_{per}} = \frac{0.025}{0.0838} = 0.298 \quad (5.9)$$

Dieses Ergebnis stimmt sehr gut mit dem Referenzwert von $St =$ aus [Turek et al. 97] überein. Wir erhalten ferner eine Druckdifferenz von $\Delta p = 1.87$ sowie maximale Druckbeiwerte $c_{d,max} = 2.63$ und $c_{l,max} = 497$. Die Vergleichsdaten aus [Turek et al. 97] sind $\Delta p = 2.48$, $c_{d,max} = 3.23$ und $c_{l,max} = 1.0$. Wir sehen also, dass der dort beschriebene Effekt für grobe Gitter tatsächlich eintritt: Obwohl die Strömung die typische Wirbelablösung aufweist, sind die quantitativen Ergebnisse nicht sonderlich nahe an der Realität. Eine Überprüfungen der Rechnungen „nach Optik“ liefert also keine Garantie für ein gutes Verfahren bzw. eine ausreichende Diskretisierung.

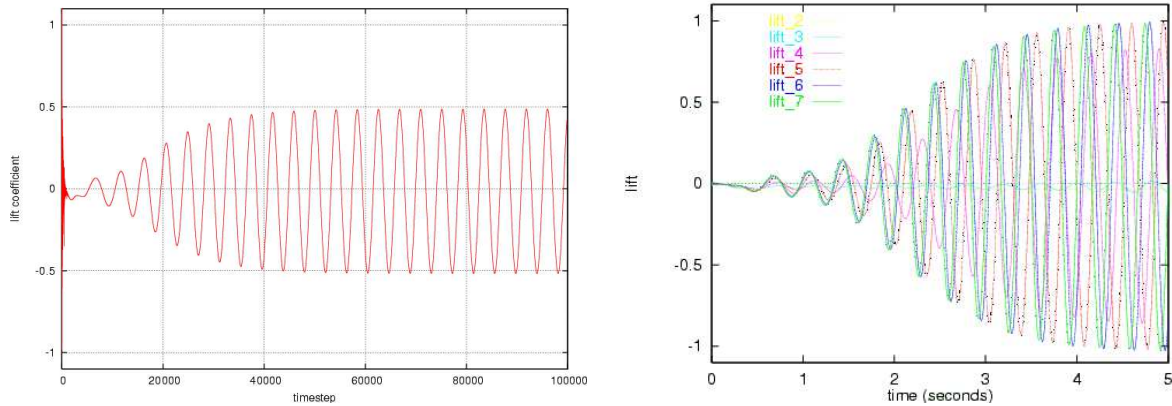


Abbildung 5.23.: Zylinderumströmung bei $Re = 100$: Auftriebsbeiwert c_l unserer Rechnungen (links) und Graphik aus [Turek 98] (rechts).

Außerdem haben wir den zeitlichen Verlauf der Widerstand- und Auftriebsbeiwerte in Abbildung 5.23 bzw. 5.24 zusammen mit den entsprechenden Graphiken aus [Turek 98] dargestellt. Wir befinden uns mit dem 243-Gitter in Bezug auf die Anzahl an Zellen gerade zwischen Level 3 (hellblau) und Level 4 (pink) der DFG-Rechnungen. Dies wird am Auftriebsbeiwert in 5.23 besonders deutlich, wo unsere Werte auch genau zwischen den Verläufen dieser beiden Levels liegen.

Die Messungen in Bezug auf die Cache-Performance haben einen Anteil von 1.52% cache misses ergeben. Dieser Wert entspricht wieder einer guten cache hit rate von 98.48%.

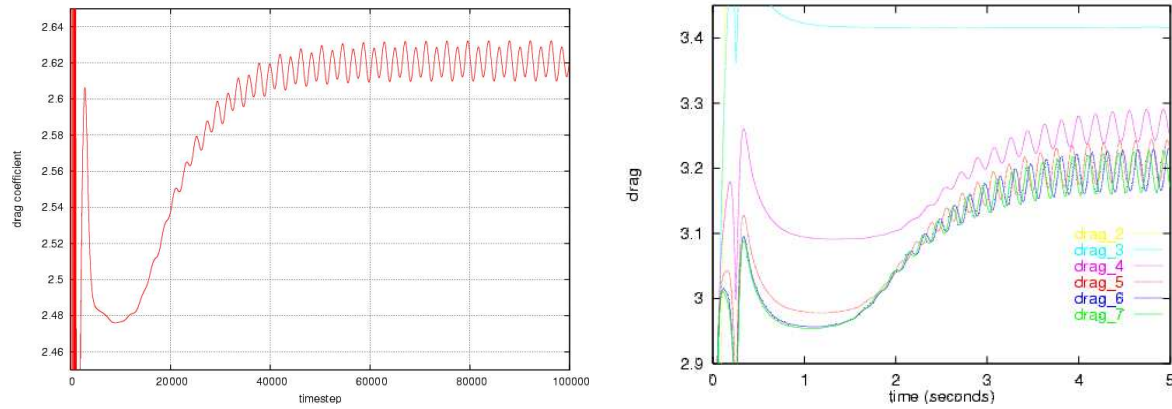


Abbildung 5.24.: Zylinderumströmung bei $Re = 100$: Widerstandsbeiwert c_d unserer Rechnungen (links) und Graphik aus [Turek 98] (rechts).

Wenn wir die numerischen Ergebnisse unseres feinen 729-Gitters betrachten, so stellen wir eine deutliche Verbesserung in Bezug auf die Referenzwerte fest. Aus den Verläufen der Druckbeiwerte lässt sich eine Periodendauer $T_{per} = 0.084$ ableiten. Dies ergibt nach (5.9) zusammen mit dem Zylinderdurchmesser d eine Strouhalzahl von $St = 0.297$. Ferner erhalten wir maximale Druckbeiwerte von $c_d = 3.25$ und 1.05 . Die Druckdifferenz beläuft sich nun auf $\Delta p = 2.23$.

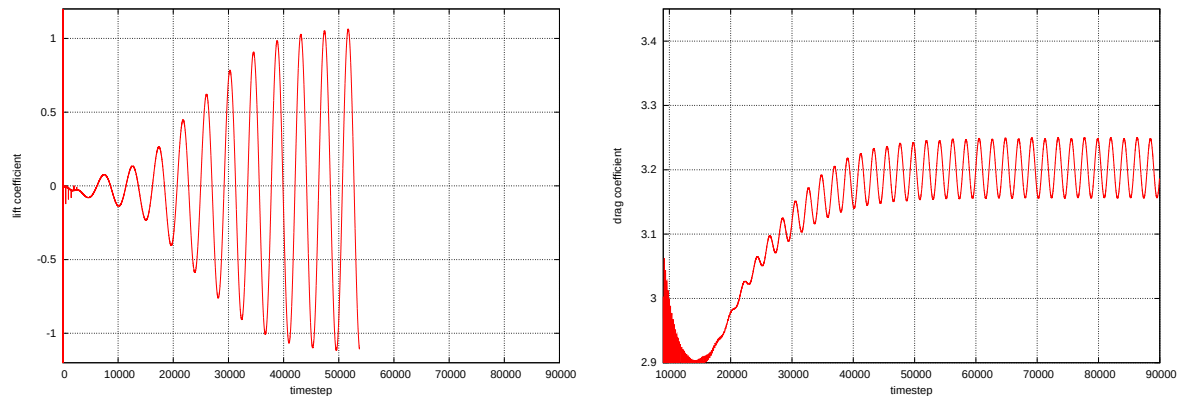


Abbildung 5.25.: Zylinderumströmung bei $Re = 100$ auf dem 729-Gitter: Auftriebsbeiwert c_l (links) und Widerstandsbeiwert c_d (rechts).

In Abbildung 5.26 sind die Ergebnisse für Druck und Geschwindigkeit visualisiert. Wieder beträgt der ausgewählte Zeitraum in etwa eine halbe Periodendauer $T_{per} = 0.084$.

Schließlich sind die zeitlichen Verläufe von Auftriebs- und Widerstandsbeiwerten in Abbildung 5.25 dargestellt.

Der Auftriebsbeiwert ist aufgrund des oben erwähnten Programmierfehlers bei der Kraft-

berechnung nur bis Zeitschritt 54000 dargestellt, da die Ersatzsimulation erst bis dorthin gerechnet hat. Man sieht aber in Analogie zum groben Gitter, dass die endgültige Amplitude der Schwingungen schon erreicht ist, so dass der c_l -Verlauf bereits aussagekräftig ist.

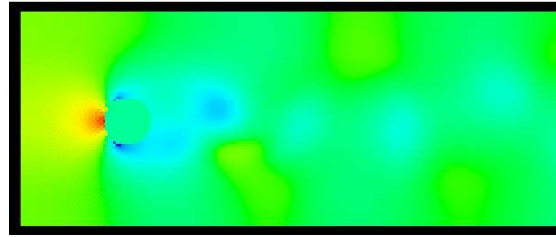
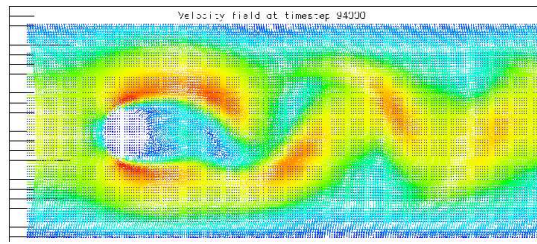
Tabelle 5.5.: Zylinderumströmung bei $Re = 100$: Überblick der Referenzwerte.

	$c_{d,max}$	$c_{l,max}$	St	Δp
243-Gitter	2.63	0.49	0.298	1.87
729-Gitter	3.25	1.05	0.297	2.23
[Turek et al. 97]	3.23	1.00	0.299	2.48

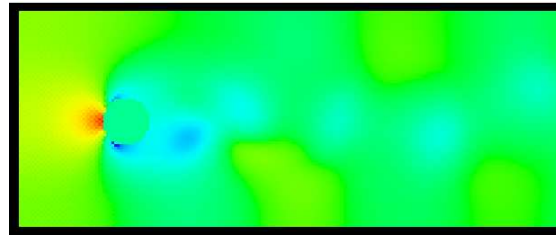
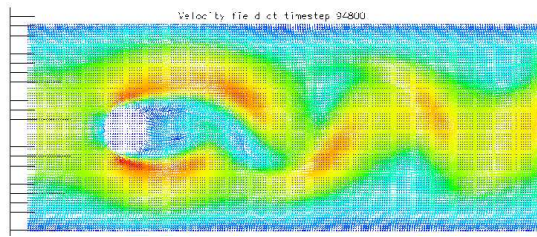
Sämtliche Ergebnisse für die Referenzwerte des groben und feinen Gitters sind in Tabelle 5.5 nochmals den Vergleichsdaten aus [Turek et al. 97] gegenübergestellt. Mit dem feineren 729-Gitter erhalten wir wie erhofft eindeutig bessere Ergebnisse. Allerdings liegt die Zahl der ca. 39000 Gitterzellen nur knapp über der des Level 5 aus [Turek 98]. Dies erkennt man auch am Verlauf unseres Widerstandsbeiwertes: Das Niveau, um das c_d in 5.25(b) schwingt, entspricht relativ genau dem von Level 5 (rot) in 5.24(b).

Abschließend verweisen wir auf Anhang B, wo in Abbildung B.3 ein experimentelles Ergebnis der Kármánschen Wirbelstraße für $Re = 105$ aus [Van Dyke 82] dargestellt ist. Die ablösenden Wirbel können sich dort natürlich relativ ungestört vertikal ausdehnen, da die Wände des Experimentalkanals einen wesentlich größeren Abstand zum Zylinder besitzen.

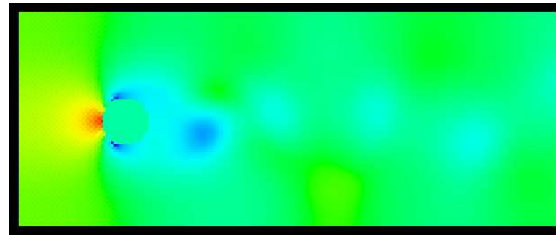
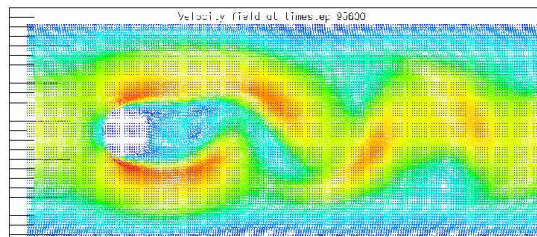
Auch in der Natur tritt das Phänomen der Kármánschen Wirbelstraße auf. So ist beispielsweise in [Griebel et al. 95] mit Bild 11.9 auf Seite 185 ein Satellitenbild dargestellt, das die an einer Insel im Atlantik ablösende Wolkenverwirbelung zeigt.



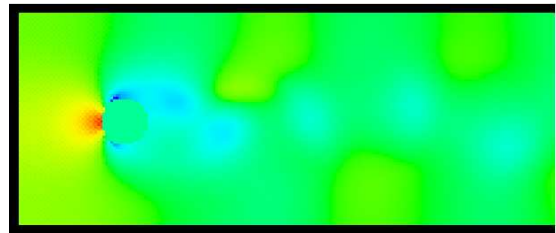
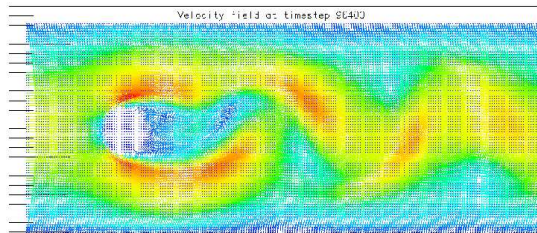
$t = 1.880$



$t = 1.896$



$t = 1.912$



$t = 1.928$

Abbildung 5.26.: Zylinderumströmung bei $Re = 100$: Lösungen über ca. eine halbe Periode $T_{per} = 0.084$.

6. Zusammenfassung und Ausblick

Zum Schluss dieser Arbeit möchten wir die wesentlichen Ergebnisse zusammenfassen und einen Ausblick auf sinnvolle Erweiterungen geben.

Wir haben gesehen, dass die Cache-Effizienz der zugrundeliegenden Programmstruktur aus [Günther 04] bei Erweiterung auf die Lösung der Navier-Stokes-Gleichungen im Wesentlichen erhalten bleibt. Obwohl wir einige Zusatzdaten in den Knoten über die Keller schicken müssen, bewegt sich die cache hit rate immer in einem Bereich oberhalb von 98%.

Die Testfälle des freien Kanals und des Kreiselflusses haben sich gerade wegen ihrer Einfachheit als wirksames und sinnvolles Instrument erwiesen. Damit konnten wir Änderungen im Programmcode auf groben Gittern schnell und einfach überprüfen.

Bei den anspruchsvolleren Szenarien wie der einspringenden Stufe und der Zylinderumströmung konnten wir qualitativ und quantitativ recht gute Ergebnisse erzielen. Gerade die Kraftberechnung mit Hilfe der konsistenten Kräfte hat durch ihre Genauigkeit und ihre einfache Struktur in unserem Programmansatz überzeugt.

Die in unseren Augen dringlichste Aufgabe besteht im Moment darin, die Gesamtlaufzeit des Verfahrens zu verbessern. Dazu gibt es verschiedene Ebenen, auf denen gleichzeitig vorgegangen werden könnte.

Aufgrund der historischen Entwicklung des Programms werden derzeit verschiedene Berechnungen jeweils einzeln behandelt. Damit durchlaufen wir in jedem Zeitschritt das Gebiet wesentlich häufiger als nötig. Eine geschickte Kombination der unterschiedlichen Aufgaben in wenige Zellbaumdurchläufe würde diesen Nachteil beseitigen.

Außerdem ist eine Erweiterung des Verfahrens auf a priori adaptive (aber während des Programmlaufes feste) Gitter nötig. Es gilt, die bereits erarbeiteten Grundlagen hierzu noch vollends umzusetzen. So könnte man eine gezielte Verfeinerung des Gitters in interessanten Bereichen des Strömungsgebietes vor dem Programmstart festlegen.

Praktisch wäre auch die Möglichkeit des Einsatzes von Mehrgitterverfahren zur Lösung der Druckpoissonsgleichung. Die Zeitersparnis im Programmlauf würde dabei auf alle Fälle weiterhelfen. Wesentliche Ansätze der Mehrgitteralgorithmik für den Peano-Ansatz sind bereits in [Weinzierl 05] erarbeitet worden.

Eine Erweiterung des Verfahrens auf Probleme der Raumdimension drei ist nicht nur aufgrund der vielfältigen interessanten Anwendungsaspekte wünschenswert. Zusätzlich ließen sich so andere Ergebnisse unserer Arbeitsgruppe verwenden, wie beispielsweise die Umsetzung der Parallelisierung (vgl. [Herder 05] und [Langlotz 04]). Auch die Ansätze

zu Adaptivität und Extrapolation aus [Dieminger 05] und [Krahnke 05] bieten sinnvolle Erweiterungsoptionen.

Till Wagner befasst sich in [Wagner 05] mit einer verbesserten Randbehandlung. Diese ist gerade in Hinblick auf die Interaktion von Fluid und Struktur von Interesse.

Wir sehen also, dass noch einiges Potential im Ansatz der cache-optimalen Finite-Element-Implementierung vorhanden ist, das es in Zukunft auszuschöpfen gilt.

A. Randbedingungen für die Druckpoissonsgleichung

Die Randbedingungen unseres zu lösenden Problems sind in Form von Bedingungen an die Geschwindigkeiten formuliert. Ziel dieses Abschnitts ist es darzustellen, wie diese Geschwindigkeitsrandbedingungen durch unseren Finite-Element-Ansatz in Bezug auf den Druck zu interpretieren sind.

Entscheidend ist hierbei erneut der Massenerhalt $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$, der auch auf dem Rand Γ erfüllt sein muss.

Wir halten uns bei der Herleitung der Randbedingungen an das Konzept von Gresho und Sani, das beispielsweise in [GreshoSani 87] dargestellt ist. Dabei geht man von der Zeitableitung der räumlich diskretisierten Kontinuitätsgleichung auf einem Element aus (Schritt 1) und ersetzt die auftretenden freien Beschleunigungen durch die Anteile, die die semidiskretisierten Impulsgleichungen (4.28) und (4.29) liefern (Schritt 2). Nach einer Taylorentwicklung um den Mittelpunkt des betrachteten Elementes (Schritt 3) fasst man alle Terme zusammen und führt einen Grenzübergang $h \rightarrow 0$ durch (Schritt 4).

Ausgangspunkt ist also das semidiskretisierte System der Navier-Stokes-Gleichungen, hier nochmals explizit für beide Raumrichtungen x und y notiert:

$$A\dot{u}_h + Du_h + C(u_h, v_h)u_h - M_x^T p_h = f_x \quad (\text{A.1})$$

$$A\dot{v}_h + Dv_h + C(u_h, v_h)v_h - M_y^T p_h = f_y \quad (\text{A.2})$$

$$M_x \dot{u}_h + M_y \dot{v}_h = 0. \quad (\text{A.3})$$

Wir verzichten zukünftig auf den Index h , der die räumliche Diskretisierung über Finite Elemente bezeichnet, um die Übersichtlichkeit der Notation zu erleichtern. Der Lastvektor $(f_x, f_y)^T$ der rechten Seite enthält eventuelle Anteile aus Volumenkräften und natürlichen Randbedingungen. Für unsere konkrete Problemstellung entfallen diese beiden Anteile. Die Beiträge der inhomogenen Dirichlet-Bedingungen der Geschwindigkeiten am Rand sollen in dieser Notation der Gleichungen noch wie echte Geschwindigkeitsfreiheitsgrade auf der linken Seite vorhanden sein.

Die Kontinuitätsgleichung ist in der Form (A.3) gegenüber unserer ursprünglichen Notation (4.30) lediglich einmal nach der Zeit abgeleitet. Außerdem werden wir im Folgenden die dimensionslose Formulierung der Navier-Stokes-Gleichungen verwenden ($1/\text{Re}$ statt ν beim diffusiven Term). Damit sparen wir uns ein unnötiges Mitziehen der Dichte als Faktor, ohne die Gültigkeit der Ergebnisse zu beeinträchtigen.



1.) Schritt: semidiskrete Kontinuitätsgleichung auf Element 3

$$\frac{h}{2}(-\dot{u}_7 + \dot{u}_8 - \dot{u}_4 + \dot{u}_5) + \frac{h}{2}(\dot{v}_7 + \dot{v}_8 - \dot{v}_4 - \dot{v}_5) = 0. \quad (\text{A.4})$$

2.) Schritt: Anteile der freien Beschleunigungen aus den Impulsgleichungen

88

Ferner wird sich im Laufe der Rechnung zeigen, dass die exakte Form der semi-diskreten konvektiven Anteile nicht wirklich relevant sein wird, so dass wir diese Terme in verkürzter Notation behandeln werden, um die Übersichtlichkeit der Rechenschritte zu gewährleisten. Wir wollen mit C_i^u bzw. C_i^v den konvektiven Beitrag von u bzw. v in Zelle i bezeichnen. In [GreshoSani 98] wird dafür eine vereinfachte Berechnungsvorschrift über eine 1-Punkt-Quadratur vorgeschlagen. Diese lautet zum Beispiel am Element 1 in unserem Fall folgendermaßen

$$\begin{aligned} C_1^u &= \frac{1}{4}(u_1 + u_2 + u_4 + u_5) \frac{1}{2h}(u_2 - u_1 + u_5 - u_4) \\ &\quad + \frac{1}{4}(v_1 + v_2 + v_4 + v_5) \frac{1}{2h}(u_4 - u_1 + u_5 - u_2), \\ C_1^v &= \frac{1}{4}(u_1 + u_2 + u_4 + u_5) \frac{1}{2h}(v_2 - v_1 + v_5 - v_4) \\ &\quad + \frac{1}{4}(v_1 + v_2 + v_4 + v_5) \frac{1}{2h}(v_4 - v_1 + v_5 - v_2). \end{aligned}$$

Mit dieser Notation stellt sich Gleichung (A.1) für Knoten 5 aufgelöst nach $h^2 u_5$ folgendermaßen dar:

$$\begin{aligned} h^2 u_5 &= \frac{1}{3\text{Re}} (-8u_5 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_6 + u_7 + u_8 + u_9) \\ &\quad - \frac{h^2}{4} (C_1^u + C_2^u + C_3^u + C_4^u) - \frac{h}{2} (-p_3 + p_4 - p_1 + p_2). \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Analog verfährt man mit v_5 , u_8 und v_8 und erhält damit

$$\begin{aligned} h^2 v_5 &= \frac{1}{3\text{Re}} (-8v_5 + v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_6 + v_7 + v_8 + v_9) \\ &\quad - \frac{h^2}{4} (C_1^v + C_2^v + C_3^v + C_4^v) - \frac{h}{2} (p_3 + p_4 - p_1 - p_2), \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

$$\begin{aligned} h^2 u_8 &= \frac{1}{3\text{Re}} (-8u_8 + u_4 + u_5 + u_6 + u_7 + u_9 + u_{10} + u_{11} + u_{12}) \\ &\quad - \frac{h^2}{4} (C_3^u + C_4^u + C_5^u + C_6^u) - \frac{h}{2} (-p_5 + p_6 - p_3 + p_4), \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

$$\begin{aligned} h^2 v_8 &= \frac{1}{3\text{Re}} (-8v_8 + v_4 + v_5 + v_6 + v_7 + v_9 + v_{10} + v_{11} + v_{12}) \\ &\quad - \frac{h^2}{4} (C_3^v + C_4^v + C_5^v + C_6^v) - \frac{h}{2} (p_5 + p_6 - p_3 - p_4). \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Nützen wir nun diese Darstellung der freien Beschleunigungen und setzen (A.5) -

(A.8) in Gleichung (A.4) gewichtet mit $\frac{1}{h}$ ein, so erhalten wir schließlich

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{1}{2}(-u_7 + u_8 - u_4 + u_5) + \frac{1}{2}(v_7 + v_8 - v_4 - v_5) \\
&= -\frac{1}{2}(u_4 + u_7) + \frac{1}{2}(v_7 - v_4) - \frac{1}{4h}(p_2 - p_1 + 2(p_4 - p_3) + p_6 - p_5) \\
&\quad - \frac{1}{4h}(p_1 + p_2 + p_5 + p_6 - 2(p_3 + p_4)) \\
&\quad + \frac{1}{6h^2\text{Re}}(-7u_5 - 7u_8 + u_1 + u_2 + u_3 + 2(u_4 + u_6 + u_7 + u_9) + u_{10} + u_{11} + u_{12}) \\
&\quad + \frac{1}{6h^2\text{Re}}(9v_5 - 9v_8 - v_1 - v_2 - v_3 + v_{10} + v_{11} + v_{12}) \\
&\quad - \frac{1}{8}(C_1^u + C_2^u + 2C_3^u + 2C_4^u + C_5^u + C_6^u) - \frac{1}{8}(C_5^v + C_6^v - C_1^v - C_2^v). \tag{A.9}
\end{aligned}$$

3.) Schritt: Taylorentwicklung der Terme um Element 3

Die Darstellung der Formeln für die zweidimensionale Taylorentwicklung um den Mittelpunkt von Element 3 können wir aufgrund unserer quadratischen Elemente etwas vereinfachen, da die Gitterweite h sowohl für die x - als auch die y -Richtung gilt.

Für die Druckanteile verwenden wir folgenden Zusammenhang

$$\begin{aligned}
p(\mathbf{x}) &= p_3 + \nabla p^T(\mathbf{x} - \mathbf{x}_3) + \frac{1}{2!}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_3)^T \begin{pmatrix} \nabla_{xx}p & \nabla_{xy}p \\ \nabla_{yx}p & \nabla_{yy}p \end{pmatrix} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_3) + O(h^3) \\
p_i &= p_3 + h(a_i \nabla_x p + b_i \nabla_y p) \\
&\quad + \frac{h^2}{2!}(a_i^2 \nabla_{xx}p + a_i b_i \nabla_{xy}p + b_i a_i \nabla_{yx}p + b_i^2 \nabla_{yy}p) + O(h^3) \tag{A.10}
\end{aligned}$$

mit den Abkürzungen

$$\nabla_{x_i}p = \frac{\partial p}{\partial x_i}(\mathbf{x}_3), \quad \nabla_{x_i x_j}p = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial p}{\partial x_i} \right) (\mathbf{x}_3)$$

sowie

$$\begin{aligned}
p_1 : \quad a_1 &= 0 \quad b_1 = -1 \\
p_2 : \quad a_2 &= 1 \quad b_2 = -1 \\
p_4 : \quad a_4 &= 1 \quad b_4 = 0 \\
p_5 : \quad a_5 &= 0 \quad b_5 = 1 \\
p_6 : \quad a_6 &= 1 \quad b_6 = 1
\end{aligned} \tag{A.11}$$

Nützen wir die Formel (A.10) für den Druckterm $\frac{1}{4h}(p_2 - p_1 + 2(p_4 - p_3) + p_6 - p_5)$

aus Gleichung (A.9), so genügen sogar die Glieder erster Ordnung um

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{4h}(p_2 - p_1 + 2(p_4 - p_3) + p_6 - p_5) = \\
& = \frac{1}{4h} [p_3 - h\nabla_y p + h\nabla_x p - p_3 + h\nabla_y p + 2(p_3 + h\nabla_x - p_3) \\
& \quad + p_3 + h\nabla_x p + h\nabla_y p - p_3 - h\nabla_y p] + \frac{1}{h} O(h^2) \\
& = \frac{4h}{4h} \nabla_x p + \frac{1}{h} O(h^2) = \frac{\partial p}{\partial x}(\mathbf{x}_3) + O(h) \tag{A.12}
\end{aligned}$$

zu erhalten.

Für den zweiten Druckterm aus (A.9) berechnen wir unter Berücksichtigung der Glieder zweiter Ordnung

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{4h}(p_1 + p_2 + p_5 + p - 2(p_3 + p_4)) = \\
& = -\frac{h^2}{2 \cdot 4h} [\nabla_{yy} p + \nabla_{xx} p - \nabla_{yx} p - \nabla_{xy} p + \nabla_{yy} p + \nabla_{xx} p \\
& \quad + \nabla_{xy} p + \nabla_{yx} p + \nabla_{yy} p - 2\nabla_{xx} p] + O(h^2) \\
& = -\frac{h}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial p}{\partial y} \right) (\mathbf{x}_3) + O(h^2). \tag{A.13}
\end{aligned}$$

Für die Taylorentwicklung der ebenfalls zellbasiert dargestellten Konvektionsterme $C_i^{u/v}$ können wir die selben Formeln (A.10) und (A.11) verwenden wie für den Druck. Damit ergibt sich

$$-\frac{1}{8}(C_1^u + C_2^u + 2C_3^u + 2C_4^u + C_5^u + C_6^u) = -C_3^u + O(h) \tag{A.14}$$

$$-\frac{1}{8}(C_5^v + C_6^v - C_1^v - C_2^v) = -\frac{h}{2} \frac{\partial C_3^v}{\partial y} + O(h^2). \tag{A.15}$$

Schließlich fehlen noch die diffusiven Anteile sowie die auf dem Rand vorgegebenen Beschleunigungen aus Gleichung (A.9). Die Entwicklungsformeln hierfür können wir in analoger Schreibweise folgendermaßen darstellen:

$$\begin{aligned}
u(\mathbf{x}) &= u_3 + \nabla u^T(\mathbf{x} - \mathbf{x}_3) + \frac{1}{2!}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_3)^T \begin{pmatrix} \nabla_{xx} u & \nabla_{xy} u \\ \nabla_{yx} u & \nabla_{yy} u \end{pmatrix} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_3) + O(h^3) \\
u_i &= u_3 + \frac{h}{2}(a_i \nabla_x u + b_i \nabla_y u) \\
& \quad + \frac{h^2}{2! \cdot 4}(a_i^2 \nabla_{xx} u + a_i b_i \nabla_{xy} u + b_i a_i \nabla_{yx} u + b_i^2 \nabla_{yy} u) + O(h^3), \tag{A.16}
\end{aligned}$$

wobei wir aufgrund der Versetztheit des Geschwindigkeitsgitters gegenüber dem

Druck folgende Koeffizienten haben

$$\begin{array}{llll}
u_1 : & a_1 = -1 & b_1 = -3 & u_7 : & a_7 = -1 & b_7 = 1 \\
u_2 : & a_2 = 1 & b_2 = -3 & u_8 : & a_8 = 1 & b_8 = 1 \\
u_3 : & a_3 = 3 & b_3 = -3 & u_9 : & a_9 = 3 & b_9 = 1 \\
u_4 : & a_4 = -1 & b_4 = -1 & u_{10} : & a_{10} = -1 & b_{10} = 3 \\
u_5 : & a_5 = 1 & b_5 = -1 & u_{11} : & a_{11} = 1 & b_{11} = 3 \\
u_6 : & a_6 = 3 & b_6 = -1 & u_{12} : & a_{12} = 3 & b_{12} = 3.
\end{array} \tag{A.17}$$

Damit erhalten wir für die diffusiven Anteile

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{6h^2\text{Re}} (-7u_5 - 7u_8 + u_1 + u_2 + u_3 + 2(u_4 + u_6 + u_7 + u_9) + u_{10} + u_{11} + u_{12}) = \\
& = \frac{h^2}{2 \cdot 4 \cdot 6h^2\text{Re}} (48\nabla_{xx}u + 48\nabla_{yy}u) + O(h) = \frac{1}{\text{Re}} \Delta u(\mathbf{x}_3) + O(h), \tag{A.18}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{6h^2\text{Re}} (9v_5 - 9v_8 - v_1 - v_2 - v_3 + v_{10} + v_{11} + v_{12}) = \\
& = \frac{h^2}{2 \cdot 4 \cdot 6h^2\text{Re}} (0) + O(h) = O(h). \tag{A.19}
\end{aligned}$$

Die Dirichlet-Beschleunigungen ergeben sich zu

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2}(\dot{u}_4 + \dot{u}_7) &= -\frac{1}{2}(2\dot{u} - h/2\nabla_x\dot{u} - h/2\nabla_y\dot{u} - h/2\nabla_x\dot{u} + h/2\nabla_y\dot{u}) + O(h^2) \\
&= -\frac{\partial u}{\partial t}(\mathbf{x}_3) + O(h), \tag{A.20}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}(\dot{v}_7 - \dot{v}_4) &= -\frac{1}{2}(-h/2\nabla_x\dot{v} + h/2\nabla_y\dot{v} + h/2\nabla_x\dot{v} + h/2\nabla_y\dot{v}) + O(h^2) \\
&= \frac{h}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right) (\mathbf{x}_3) + O(h^2). \tag{A.21}
\end{aligned}$$

4.) Schritt: Zusammenfassen aller Terme, $h \rightarrow 0$

Wir setzen nun die Ergebnisse der Taylorentwicklung (A.12), (A.13), (A.14), (A.15), (A.18), (A.19), (A.20) und (A.21) in Gleichung (A.9) ein und bringen noch den ersten Druckterm $\frac{1}{4h}(p_2 - p_1 + 2(p_4 - p_3) + p_6 - p_5)$ auf die andere Seite. Damit erhalten wir als Randbedingung an den Druck in Element 3

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\text{Re}} \Delta u - (\mathbf{u} \cdot \nabla)u + \frac{h}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right) + O(h)$$

und nach Grenzübergang $h \rightarrow 0$ schließlich

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\text{Re}} \Delta u - (\mathbf{u} \cdot \nabla)u. \tag{A.22}$$

Wir haben somit aus den Dirichlet-Geschwindigkeitsvorgaben eine Neumann-Randbedingung für den Druck abgeleitet, die genau dem x -Anteil der Impulsgleichungen entspricht. Würden wir statt einer linken Kante den Fall einer rechten Randkante untersuchen, so erhielten wir mit den analogen Schritten wie oben wieder Gleichung (A.22), lediglich auf beiden Seiten mit einem Faktor -1 multipliziert. Das liegt daran, dass die freien Anteile der Impulsgleichungen $\dot{u}_5$ und $\dot{u}_8$ dabei mit jeweils anderem Vorzeichen in die Kontinuitätsgleichung (A.4) eingehen.

Mit analoger Vorgehensweise für Kanten an oberen oder unteren Rändern erhalten wir ebenfalls als Ergebnisse wieder Neumann-Druck-Randbedingungen, die diesmal der Impulsgleichung in y -Richtung entsprechen:

$$\frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{\text{Re}}\Delta v - (\mathbf{u} \cdot \nabla)v.$$

Insgesamt erhalten wir die allgemeine Form der Neumann-Druckrandbedingungen an reinen Kanten unter Verwendung des Normalenvektors $\mathbf{n}$:

$$\frac{\partial p}{\partial n} = \mathbf{n} \cdot \nabla p = \mathbf{n} \cdot \left[-\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{1}{\text{Re}}\Delta \mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} \right]. \quad (\text{A.23})$$

Wenn wir (A.23) für unsere linke Kante (also für $\mathbf{n} = (-1, 0)^T$) ausschreiben, so erhalten wir bis auf einen Faktor -1 auf beiden Seiten genau wieder (A.22). Die Orientierung des Normalenvektors einer Kante sorgt also dafür, dass genau die nötigen Vorzeichenwechsel auf beiden Seiten der Randbedingung (A.23) erfolgen, die wir bei unserer expliziten Herleitung der linken Kante im Vergleich zur rechten auch beobachtet haben.

A.2. Geschwindigkeits-Dirichlet-Randbedingungen an Ecken

In diesem Abschnitt wollen wir analog zum Vorgehen bei reinen Kanten die passenden Druckrandbedingungen für Eckelemente herleiten. Wir wählen eine linke obere Fluidecke wie in Abbildung A.2 dargestellt. Um Teile der Ergebnisse der obigen Rechnungen direkt benutzen zu können, trägt das Eckelement wieder die Nummer 3.

1.) Schritt: semidiskrete Kontinuitätsgleichung auf Element 3

Der Massenerhalt für Element 3 in Beschleunigungsform lautet (ohne den Faktor h)

$$\frac{1}{2}(-\dot{u}_7 + \dot{u}_8 - \dot{u}_4 + \dot{u}_5) + \frac{1}{2}(\dot{v}_7 + \dot{v}_8 - \dot{v}_4 - \dot{v}_5) = 0. \quad (\text{A.24})$$

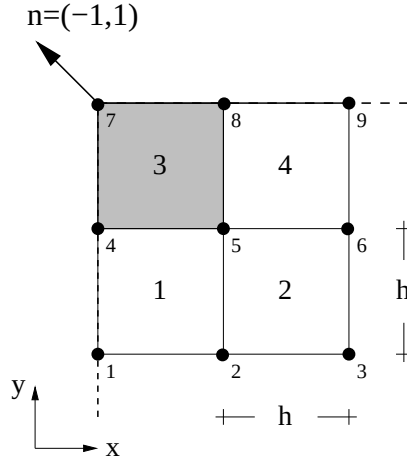


Abbildung A.2.: Notwendige Elemente und Knoten für eine Dirichlet-Ecke links oben. Betrachtet wird erneut Element 3.

2.) Schritt: Anteile der freien Beschleunigungen aus den Impulsgleichungen

In unserem Eckelement sind die Geschwindigkeiten an den Knoten 4, 7 und 8 vorgegeben. Damit sind auch die entsprechenden Beschleunigungen $\dot{\mathbf{u}}_4$, $\dot{\mathbf{u}}_7$ und $\dot{\mathbf{u}}_8$ fest und wir haben lediglich einen freien Term $\dot{\mathbf{u}}_5$. Dafür können wir die aufgelöste Form der Impulsgleichungen (A.5) und (A.5) nützen. Insgesamt ergibt sich dann mit (A.24)

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{1}{2}(-\dot{u}_7 + \dot{u}_8 - \dot{u}_4 + \dot{u}_5) + \frac{1}{2}(\dot{v}_7 + \dot{v}_8 - \dot{v}_4 - \dot{v}_5) \\
&= \frac{1}{2}(\dot{u}_8 - \dot{u}_4 - \dot{u}_7) + \frac{1}{2}(\dot{v}_7 + \dot{v}_8 - \dot{v}_4) \\
&\quad - \frac{1}{4h}(p_2 - p_1 + p_4 - p_3) + \frac{1}{4h}(p_3 - p_1 + p_4 - p_2) \\
&\quad + \frac{1}{6h^2 \text{Re}}(-8u_5 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_6 + u_7 + u_9) \\
&\quad - \frac{1}{6h^2 \text{Re}}(-8v_5 + v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_6 + v_7 + v_9) \\
&\quad - \frac{1}{8}(C_1^u + C_2^u + C_3^u + C_4^u) + \frac{1}{8}(C_1^v + C_2^v + C_3^v + C_4^v). \quad (\text{A.25})
\end{aligned}$$

3.) Schritt: Taylorentwicklung der Terme um Element 3

Wie im vorigen Abschnitt für die Kanten entwickeln wir nun auch für die Ecke sämtliche Anteile in eine zweidimensionale Taylordarstellung um den Mittelpunkt von Element 3.

Damit erhalten wir für die Druckanteile

$$p(\mathbf{x}) = p_3 + \nabla p^T (\mathbf{x} - \mathbf{x}_3) + O(h^2)$$

$$p_1 = p_3 - h \nabla_y p + O(h^2) \quad (\text{A.26})$$

$$p_2 = p_3 + h \nabla_x p - h \nabla_y p + O(h^2) \quad (\text{A.27})$$

$$p_4 = p_3 + h \nabla_x p + O(h^2). \quad (\text{A.28})$$

Wir nützen (A.26) - (A.28), um

$$-\frac{1}{4h}(p_2 - p_1 + p_4 - p_3) = -\frac{1}{2}\nabla_x p + O(h) \quad (\text{A.29})$$

$$\frac{1}{4h}(p_3 - p_1 + p_4 - p_2) = \frac{1}{2}\nabla_y p + O(h) \quad (\text{A.30})$$

zu berechnen. Analog können wir wieder für die konvektiven Anteile vorgehen und erhalten

$$-\frac{1}{8}(C_1^u + C_2^u + C_3^u + C_4^u) = -\frac{1}{2}C_3^u + O(h) \quad (\text{A.31})$$

$$\frac{1}{8}(C_1^v + C_2^v + C_3^v + C_4^v) = \frac{1}{2}C_3^v + O(h). \quad (\text{A.32})$$

Für die Taylorentwicklung der Geschwindigkeitsgrößen verwenden wir in Analogie zum Kantenfall die Darstellung (A.16)

$$\begin{aligned} u_i &= u_3 + \frac{h}{2}(a_i \nabla_x u + b_i \nabla_y u) \\ &+ \frac{h^2}{2! \cdot 4}(a_i^2 \nabla_{xx} u + a_i b_i \nabla_{xy} u + b_i a_i \nabla_{yx} u + b_i^2 \nabla_{yy} u) + O(h^3), \end{aligned}$$

wobei wir wieder die folgenden Koeffizienten haben

$$\begin{array}{llll} u_1 : & a_1 = -1 & b_1 = -3 & u_6 : & a_6 = 3 & b_6 = -1 \\ u_2 : & a_2 = 1 & b_2 = -3 & u_7 : & a_7 = -1 & b_7 = 1 \\ u_3 : & a_3 = 3 & b_3 = -3 & u_8 : & a_8 = 1 & b_8 = 1 \\ u_4 : & a_4 = -1 & b_4 = -1 & u_9 : & a_9 = 3 & b_9 = 1 \\ u_5 : & a_5 = 1 & b_5 = -1. & & & \end{array}$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{6h^2\text{Re}} (-8u_5 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_6 + u_7 + u_9) = \\
& = \frac{1}{6h^2\text{Re}} \frac{h^2}{2! \cdot 4} (24\nabla_{xx}u + 24\nabla_{xx}u) + O(h) \\
& = \frac{1}{2\text{Re}} \Delta u_3 + O(h)
\end{aligned} \tag{A.33}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{6h^2\text{Re}} (-8v_5 + v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_6 + v_7 + v_9) = \\
& = -\frac{1}{6h^2\text{Re}} \frac{h^2}{2! \cdot 4} (24\nabla_{xx}v + 24\nabla_{xx}v) + O(h) \\
& = -\frac{1}{2\text{Re}} \Delta v_3 + O(h)
\end{aligned} \tag{A.34}$$

Schließlich erhalten wir noch die Entwicklungsterme der festen Beschleunigungen zu

$$\frac{1}{2}(\dot{u}_8 - \dot{u}_4 - \dot{u}_7) = -\frac{1}{2}\dot{u}_3 + O(h) \tag{A.35}$$

$$\frac{1}{2}(\dot{v}_7 + \dot{v}_8 - \dot{v}_4) = \frac{1}{2}\dot{v}_3 + O(h). \tag{A.36}$$

4.) Schritt: Zusammenfassen aller Terme, $h \rightarrow 0$

Die Ergebnisse der Taylorentwicklung (A.29), (A.30), (A.31), (A.32), (A.33), (A.34), (A.35) und (A.36) setzen wir nun in Gleichung (A.25) ein. Dabei bringen wir den Druckterm auf die andere Seite und kommen insgesamt also auf

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}(\nabla_x p - \nabla_y p) &= \frac{1}{2\text{Re}} (\Delta u_3 - \Delta v_3) - \frac{1}{2}(\dot{u}_3 - \dot{v}_3) \\
&\quad - \frac{1}{2} [C_3^u - C_3^v] + O(h).
\end{aligned}$$

Ein Grenzübergang $h \rightarrow 0$ ergibt schließlich die gewünschte Randbedingung in der Ecke:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \left(\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y} \right) (\mathbf{x}_3) &= \frac{1}{2\text{Re}} (\Delta u - \Delta v) (\mathbf{x}_3) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial v}{\partial t} \right) (\mathbf{x}_3) \\
&\quad - \frac{1}{2} [(\mathbf{u} \cdot \nabla)u - (\mathbf{u} \cdot \nabla)v] (\mathbf{x}_3).
\end{aligned} \tag{A.37}$$

Diese Randbedingung lässt sich erneut über den Normalenvektor $\mathbf{n}$ beschreiben, der in der Ecke gerade in diagonaler Richtung liegt: $\sqrt{2}\mathbf{n} = (-1, 1)^T$. Damit lautet die allgemeine Form wieder

$$\frac{\partial p}{\partial n} = \mathbf{n} \cdot \nabla p = \mathbf{n} \cdot \left[-\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{1}{\text{Re}} \Delta \mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right] \tag{A.38}$$

Wir weisen daraufhin, dass analog zum Kantenfall die Form (A.38) bis auf einen Faktor $-\sqrt{2}$ auf beiden Seiten identisch ist zu Gleichung (A.37). Hätten wir eine andere Ecke als gerade das Element links oben gewählt, so würden wir in expliziter Form eine Darstellung erhalten, die durch den jeweiligen Normalenvektor wieder (A.38) entspricht.

A.3. Geschwindigkeits-Neumann-Randbedingungen an Kanten

An Ausflussrändern herrschen Neumann-Randbedingungen an die Geschwindigkeit. Im Folgenden werden wir sehen, dass sich diese Bedingungen als Dirichlet-Randbedingungen für den Druck am Auslass interpretieren lassen.

Um ein konkretes Rechenszenario zu schaffen, gehen wir erneut davon aus, dass der Neumann-Rand die linke Kante in Figur A.1 ist. Damit können wir teilweise auf bereits hergeleitete Ausdrücke des Dirichlet-Falles zurückgreifen.

- 1.) Schritt: semidiskrete Kontinuitätsgleichung auf Element 3

Die Kontinuitätsgleichung lautet wieder

$$\frac{h}{2}(-u_4 - u_7 + u_5 + u_8) + \frac{h}{2}(v_7 - v_4 + v_8 - v_5) = 0. \quad (\text{A.39})$$

- 2.) Schritt: Anteile der freien Beschleunigungen aus den Impulsgleichungen

Sämtliche Beschleunigungen in (A.39) sind nun frei und müssen durch die entsprechenden Anteile der diskreten Impulsgleichungen ersetzt werden.

Da der Träger der Basisfunktionen Φ_i am Rand nur mehr halb so groß ist, verändert sich die Massenmatrix am Rand und wir erhalten nach mass lumping einen Faktor $1/2$ bei den Beschleunigungen. Auch die Terme der Konvektion, Diffusion und des Druckgradienten ändern sich am Rand gerade passend ab, indem nur die Elemente im Fluidgebiet Anteile liefern.

Außerdem tauchen aufgrund des Oberflächenintegrals in (4.13) der schwachen Form nun zusätzliche Kraftanteile $\mathbf{f}$ auf. Wir wollen diese Anteile, die ja in Koordinatenrichtung definiert sind, über den Zusammenhang

$$\begin{aligned} f_n &= \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \end{pmatrix} = -f_x \\ f_\tau &= \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\tau} = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \tau_x \\ \tau_y \end{pmatrix} = -f_y \end{aligned}$$

in Richtungen normal und tangential zum Rand darstellen.

Normalenvektor $\mathbf{n}$ und Tangentialvektor τ haben in unserem Fall der linken Kante die Gestalt $\mathbf{n} = (-1, 0)^T$ und $\tau = (0, -1)^T$.

Wir verwenden dabei die Abkürzung $f_{n_j}^i$ bzw. $f_{\tau_j}^i$ für den normalen bzw. tangentialen Anteil der Kraft von Element i auf Knoten j . Dieser Kraftanteil soll ähnlich dem Druck konstant auf einer Elementkante sein. Daher ergibt der gesamte Kraftanteil der schwachen Form gerade

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_N \cap \Omega^i} \Phi_j f_x d\tau &= \int_{\Gamma_{N_i}} \Phi_j (-f_n) d\tau = -f_{n_j}^i \int_{\Gamma_{N_i}} \Phi_j d\tau = -\frac{h}{2} f_{n_j}^i \\ \int_{\Gamma_N \cap \Omega^i} \Phi_j f_y d\tau &= \int_{\Gamma_{N_i}} \Phi_j (-f_\tau) d\tau = -f_{\tau_j}^i \int_{\Gamma_{N_i}} \Phi_j d\tau = -\frac{h}{2} f_{\tau_j}^i. \end{aligned}$$

Insgesamt verwenden wir also folgende Ausdrücke

$$\begin{aligned} \frac{h^2}{2} \dot{u}_4 &= \frac{1}{3\text{Re}} \left(-4u_4 + \frac{1}{2}u_1 + u_2 + u_5 + \frac{1}{2}u_7 + u_8 \right) \\ &\quad - \frac{h^2}{4} (C_1^u + C_3^u) - \frac{h}{2} (p_3 + p_1) - \frac{h}{2} (f_{n_4}^1 + f_{n_4}^3), \end{aligned} \quad (\text{A.40})$$

$$\begin{aligned} \frac{h^2}{2} \dot{v}_4 &= \frac{1}{3\text{Re}} \left(-4v_4 + \frac{1}{2}v_1 + v_2 + v_5 + \frac{1}{2}v_7 + v_8 \right) \\ &\quad - \frac{h^2}{4} (C_1^v + C_3^v) - \frac{h}{2} (p_3 - p_1) - \frac{h}{2} (f_{\tau_4}^1 + f_{\tau_4}^3), \end{aligned} \quad (\text{A.41})$$

$$\begin{aligned} \frac{h^2}{2} \dot{u}_7 &= \frac{1}{3\text{Re}} \left(-4u_7 + \frac{1}{2}u_4 + u_5 + u_8 + \frac{1}{2}u_{10} + u_{11} \right) \\ &\quad - \frac{h^2}{4} (C_3^u + C_5^u) - \frac{h}{2} (p_5 + p_3) - \frac{h}{2} (f_{n_7}^3 + f_{n_7}^5), \end{aligned} \quad (\text{A.42})$$

$$\begin{aligned} \frac{h^2}{2} \dot{v}_7 &= \frac{1}{3\text{Re}} \left(-4v_7 + \frac{1}{2}v_4 + v_5 + v_8 + \frac{1}{2}v_{10} + v_{11} \right) \\ &\quad - \frac{h^2}{4} (C_3^v + C_5^v) - \frac{h}{2} (p_5 - p_3) - \frac{h}{2} (f_{\tau_7}^3 + f_{\tau_7}^5). \end{aligned} \quad (\text{A.43})$$

Setzen wir sämtliche Terme der freien Beschleunigungen (A.40) - (A.43) in die

Kontinuitätsgleichung (A.39) ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
 0 &= \frac{h}{2}(-\dot{u}_4 - \dot{u}_7 + \dot{u}_5 + \dot{u}_8) + \frac{h}{2}(\dot{v}_7 - \dot{v}_4 + \dot{v}_8 - \dot{v}_5) \\
 &= -\frac{2h}{4h}(p_2 - p_1 + 2(p_4 - p_3) + p_6 - p_5) - \frac{2h}{4h}(p_1 + p_2 - 2(p_4 + p_3) + p_5 + p_6) \\
 &\quad + \frac{2h}{6h^2\text{Re}}(-7u_5 - 7u_8 + u_1 + u_2 + u_3 + 2(u_4 + u_6 + u_7 + u_9) + u_{10} + u_{11} + u_{12}) \\
 &\quad + \frac{2h}{6h^2\text{Re}}(9v_5 - 9v_8 - v_1 - v_2 - v_3 + v_{10} + v_{11} + v_{12}) \\
 &\quad - \frac{2h}{8}(C_1^u + C_2^u + 2C_3^u + 2C_4^u + C_5^u + C_6^u) - \frac{2h}{8}(C_5^v + C_6^v - C_1^v - C_2^v) \\
 &\quad - \frac{2h}{2} \left\{ \frac{1}{3h^2\text{Re}} \left(-4u_4 + \frac{1}{2}u_1 + u_2 + u_5 + \frac{1}{2}u_7 + u_8 \right) \right. \\
 &\quad \quad \left. - \frac{1}{4}(C_1^u + C_3^u) - \frac{1}{2h}(p_3 + p_1) - \frac{1}{2h}(f_{n_4}^1 + f_{n_4}^3) \right\} \\
 &\quad - \frac{2h}{2} \left\{ \frac{1}{3h^2\text{Re}} \left(-4u_7 + \frac{1}{2}u_4 + u_5 + u_8 + \frac{1}{2}u_{10} + u_{11} \right) \right. \\
 &\quad \quad \left. - \frac{1}{4}(C_3^u + C_5^u) - \frac{1}{2h}(p_5 + p_3) - \frac{1}{2h}(f_{n_7}^3 + f_{n_7}^5) \right\} \\
 &\quad + \frac{2h}{2} \left\{ \frac{1}{3h^2\text{Re}} \left(-4v_7 + \frac{1}{2}v_4 + v_5 + v_8 + \frac{1}{2}v_{10} + v_{11} \right) \right. \\
 &\quad \quad \left. - \frac{1}{4}(C_3^v + C_5^v) - \frac{1}{2h}(p_5 - p_3) - \frac{1}{2h}(f_{\tau_7}^3 + f_{\tau_7}^5) \right\} \\
 &\quad - \frac{2h}{2} \left\{ \frac{1}{3h^2\text{Re}} \left(-4v_4 + \frac{1}{2}v_1 + v_2 + v_5 + \frac{1}{2}v_7 + v_8 \right) \right. \\
 &\quad \quad \left. - \frac{1}{4}(C_1^v + C_3^v) - \frac{1}{2h}(p_3 - p_1) - \frac{1}{2h}(f_{\tau_4}^1 + f_{\tau_4}^3) \right\}. \tag{A.44}
 \end{aligned}$$

3.) Schritt: Taylorentwicklung der Terme um Element 3

Wie für den Fall der Dirichletränder entwickeln wir sämtliche Anteile in eine 2-d Taylorform um den Mittelpunkt von Element 3.

Für die Druckterme erhalten wir nach Zusammenfassen mit Hilfe von (A.10) und (A.11)

$$\begin{aligned}
 &-\frac{2h}{4h}(p_2 - p_1 + 2(p_4 - p_3) + p_6 - p_5) - \frac{2h}{4h}(p_1 + p_2 - 2(p_4 + p_3) + p_5 + p_6) \\
 &\quad + \frac{h}{2h}(p_3 + p_1) + \frac{h}{2h}(p_5 + p_3) - \frac{h}{2h}(p_5 - p_3) + \frac{h}{2h}(p_3 - p_1) \\
 &= -\frac{1}{2}[2p_2 - 8p_3 + 2p_6] = -\frac{1}{2}[-4p_3 + 4h\nabla_x p_3 + O(h^2)] \\
 &= 2p_3 + O(h). \tag{A.45}
 \end{aligned}$$

Analog gehen wir auch für die zellbasierten Konvektionsterme $C_i^{u/v}$ vor:

$$\begin{aligned}
& -\frac{2h}{8}(C_1^u + C_2^u + 2C_3^u + 2C_4^u + C_5^u + C_6^u) - \frac{2h}{8}(C_5^v + C_6^v - C_1^v - C_2^v) \\
& + \frac{h}{4}(C_1^u + C_3^u) + \frac{h}{4}(C_3^u + C_5^u) - \frac{h}{4}(C_3^v + C_5^v) + \frac{h}{4}(C_1^v + C_3^v) \\
& = -\frac{h}{4}[C_2^u + 2C_4^u + C_6^u - 2C_1^v - C_2^v + 2C_5^v + C_6^v] \\
& = -\frac{h}{4}[4C_3^u + 4h\nabla_x C_3^u + 6h\nabla_y C_3^v + O(h^2)] = O(h). \tag{A.46}
\end{aligned}$$

Für die diffusiven Anteile nützen wir die Formeln (A.16) und (A.17). Damit erhalten wir für die horizontalen Geschwindigkeitsanteile u

$$\begin{aligned}
& \frac{2h}{6h^2\text{Re}}(-7u_5 - 7u_8 + u_1 + u_2 + u_3 + 2(u_4 + u_6 + u_7 + u_9) + u_{10} + u_{11} + u_{12}) \\
& - \frac{h}{3h^2\text{Re}}\left(-4u_4 + \frac{1}{2}u_1 + u_2 + u_5 + \frac{1}{2}u_7 + u_8\right) \\
& - \frac{h}{3h^2\text{Re}}\left(-4u_7 + \frac{1}{2}u_4 + u_5 + u_8 + \frac{1}{2}u_{10} + u_{11}\right) \\
& = \frac{1}{3h\text{Re}}\left[\frac{1}{2}u_1 + u_3 + \frac{11}{2}u_4 - 9u_5 + 2u_6 + \frac{11}{2}u_7 - 9u_8 + 2u_9 + \frac{1}{2}u_{10} + u_{12}\right] \\
& = \frac{1}{12h\text{Re}}[-24h\nabla_x u_3 + O(h^2)] = -\frac{2}{\text{Re}}\nabla_x u_3 + O(h), \tag{A.47}
\end{aligned}$$

sowie für die vertikalen Geschwindigkeitsanteile v

$$\begin{aligned}
& \frac{2h}{6h^2\text{Re}}(9v_5 - 9v_8 - v_1 - v_2 - v_3 + v_{10} + v_{11} + v_{12}) \\
& + \frac{h}{3h^2\text{Re}}\left(-4v_7 + \frac{1}{2}v_4 + v_5 + v_8 + \frac{1}{2}v_{10} + v_{11}\right) \\
& - \frac{h}{3h^2\text{Re}}\left(-4v_4 + \frac{1}{2}v_1 + v_2 + v_5 + \frac{1}{2}v_7 + v_8\right) \\
& = \frac{1}{6h\text{Re}}[-3v_1 - 4v_2 - 2v_3 + 9v_4 + 18v_5 - 9v_7 - 18v_8 + 3v_{10} + 4v_{11} + 2v_{12}] \\
& = \frac{1}{6h\text{Re}}\left[0\frac{h}{2}\nabla_y v_3 + O(h^2)\right] = O(h). \tag{A.48}
\end{aligned}$$

Schließlich fehlt uns noch der Term der Pseudokräfte $\mathbf{f}$. Für deren Taylorentwicklung verwenden wir

$$f(x) = f_3 + a\frac{h}{2}\nabla_x f_3 + b\frac{h}{2}\nabla_y f_3 + O(h^2)$$

mit

$$\begin{aligned}
f^1 : & \quad a_1 = -1 \quad b_1 = -2 \\
f^3 : & \quad a_3 = -1 \quad b_3 = 0 \\
f^5 : & \quad a_5 = -1 \quad b_5 = 2.
\end{aligned}$$

was sich aus Abbildung A.3 erklärt.

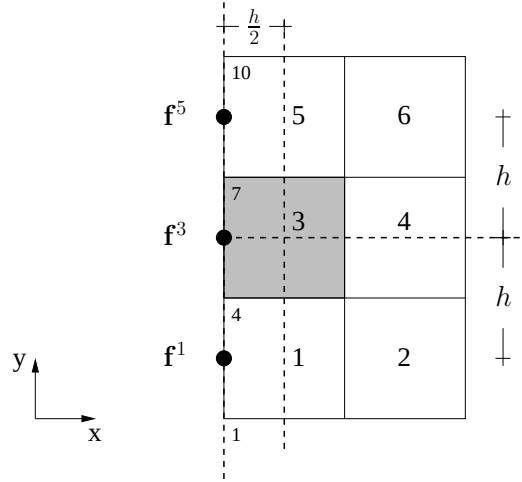


Abbildung A.3.: Position der Pseudokraftwerte $\mathbf{f}^i$.

Wir berechnen so

$$\begin{aligned} & \frac{2h}{4h} (f_{n_4}^1 + f_{n_4}^3 + f_{n_7}^3 + f_{n_7}^5 + f_{\tau_4}^1 + f_{\tau_4}^3 - f_{\tau_7}^3 - f_{\tau_7}^5) \\ &= \frac{1}{2} [4f_{3,n} - 2h\nabla_x f_{3,n} - 2h\nabla_y f_{3,\tau} + O(h^2)] = 2f_{3,n} + O(h). \quad (\text{A.49}) \end{aligned}$$

4.) Schritt: Zusammenfassen aller Terme, $h \rightarrow 0$

Mit den Ergebnissen (A.45) - (A.49) können wir nun Gleichung (A.44) auswerten und erhalten insgesamt nach Division durch 2

$$0 = p_3 - \frac{1}{\text{Re}} \nabla_x u_3 + f_{3,n} + O(h).$$

Mit einem Grenzübergang $h \rightarrow 0$ bleibt somit genau der Normalanteil der Vorgabe des Neumannrandes übrig

$$f_n(\mathbf{x}_3) = \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial u}{\partial x}(\mathbf{x}_3) - p(\mathbf{x}_3) = \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial u_n}{\partial n}(\mathbf{x}_3) - p(\mathbf{x}_3). \quad (\text{A.50})$$

Wie bei den Dirichletvorgaben für Ecke und Kante würden wir auch hier für eine andere Kante als die linke das gleiche Ergebnis erhalten, da jeweils die Orientierung des Normalenvektors $\mathbf{n}$ die passenden Vorzeichenwerte und Anteile liefert.

In Bezug auf den Druck lässt sich (A.50) natürlich als Dirichletrandbedingung interpretieren:

$$p = \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial u_n}{\partial n} - f_n.$$

B. Experimentelle Zylinderumströmung

In diesem Abschnitt finden sich Visualisierungen experimenteller Strömungsuntersuchungen für den Zylinder. Es werden zwei Bilder der stationären Zylinderumströmung dargestellt, sowie eine Photographie einer Kármánschen Wirbelstraße. Alle Abbildungen sind aus [Van Dyke 82] entnommen.

B.1. Stationäre Umströmung



Abbildung B.1.: Experimentelle Zylinderumströmung bei $Re = 26.0$ (aus [Van Dyke 82], S. 28).

Für die stationäre Zylinderumströmung geben wir zwei Photographien experimenteller Untersuchungen aus [Van Dyke 82] an. In Abbildung B.1 sehen wir den stationären Zustand bei einer Reynoldszahl von 26.0. Dagegen zeigt Abbildung B.2 die Umströmung bei $Re = 41.0$, also kurz vor dem Umschlagen in eine Wirbelablösung.

Die beiden experimentellen Szenarien entsprechen mit ihren Reynoldszahlen in etwa unseren numerischen Tests mit $Re = 20$ bzw. $Re = 40$.

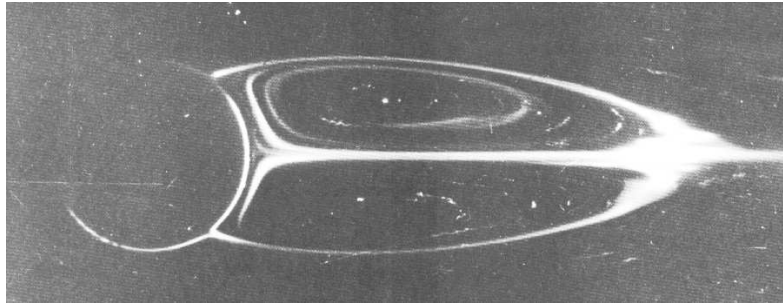


Abbildung B.2.: Experimentelle Zylinderumströmung bei $Re = 41.0$ (aus [Van Dyke 82], S. 30).

B.2. Kármánsche Wirbelstraße

Für den instationären Strömungszustand findet sich in [Van Dyke 82] die Photographie eines Experimentes mit einer Reynoldszahl von 105, die in Abbildung B.3 dargestellt ist. Diese Konfiguration ist wieder recht nahe an unserem Simulationsbeispiel mit $Re = 100$. Allerdings steht der Wirbelablösung im Experiment wesentlich mehr Fluidraum über bzw. unter dem Zylinder zur Verfügung. Daher breiten sich die experimentell abgeschwemmten Wirbel vertikal etwas aus, was in der numerischen Simulation durch die relativ nahen Kanalwände verhindert wird.

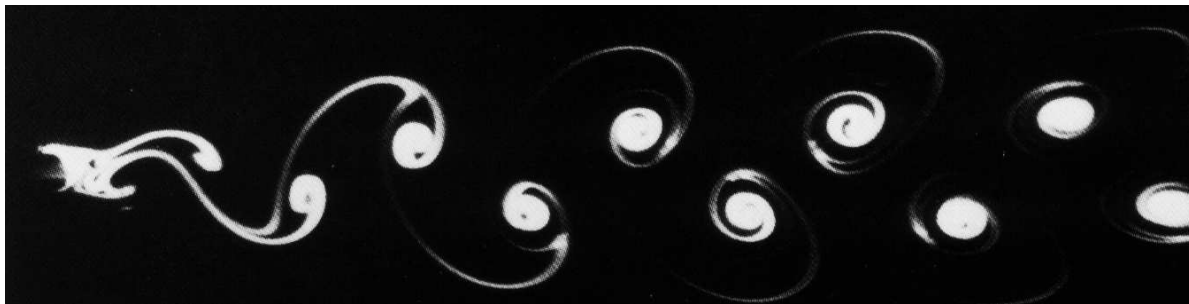


Abbildung B.3.: Experimentelle Zylinderumströmung: Kármánsche Wirbelstraße bei $Re = 105.0$ (aus [Van Dyke 82], S. 57).

Literaturverzeichnis

- [Armaly et al. 83] B.F. ARMALY, F. DURST, J.C.F. PEREIRA AND B. SCHÖNUNG, *Experimental and theoretical investigation of backward-facing step flow*, Journal of Fluid Mechanics, Volume 127, pp. 473–496, 1983
- [Batchelor 67] G. K. BATCHELOR, *An introduction to fluid dynamics*, Cambridge University Press, Cambridge, 1967/2000
- [Blanke 04] CORNELIA BLANKE *Kontinuitätserhaltende Finite-Element-Diskretisierung der Navier-Stokes-Gleichungen*, Diplomarbeit, Institut für Informatik der TU-München, 2004
- [Braess 97] DIETRICH BRAESS, *Finite Elemente: Theorie, schnelle Löser und Anwendungen in der Elastizitätstheorie*, Springer, Berlin, 1997
- [Chorin 68] ALEXANDRE J. CHORIN, *Numerical Solution of the Navier-Stokes Equations*, Math. Comput., Volume 22, p. 745, 1968
- [de Castro Lopo et al. 00] E. DE CASTRO LOPO, P. AITKEN, B. L. JONES, *SAMS teach yourself C for Linux Programming in 21 days*, SAMS Publishing, Indianapolis, 2000
- [Dieminger 05] NADINE DIEMINGER *Kriterien für die Selbstadaption cache-effizienter Mehrgitteralgorithmen*, Diplomarbeit, Fakultät für Mathematik der TU-München, 2005
- [Donea et al. 03] JEAN DONEA AND ANTONIO HUERTA, *Finite Element Methods for Flow Problems*, John Wiley & Sons Ltd, Chichester, 2003
- [Doxygen] *Doxygen*, <http://www.doxygen.org>, 2005
- [Gamnitzer 04] PETER GAMNITZER, *Überlappende Gebietszerlegungsmethoden in Anwendung auf die inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen*, Diplomarbeit, Fakultät für Mathematik der TU-München, 2004
- [Gerthsen 97] HELMUT VOGEL, *Gerthsen Physik*, Springer, Berlin, 1997

- [Gleirscher et. al. 03] M. GLEIRSCHER, S. KIENZL, *Anwendung von Peano-Kurven zur Parallelisierung von Berechnungen in der Strömungsmechanik*, Interdisziplinäres Projekt im Nebenfach Mathematik, Fakultät für Informatik der TU-München, 2003
- [Glück 03] M. GLÜCK, *Ein Beitrag zur numerischen Simulation von Fluid-Struktur-Interaktionen - Grundlagenuntersuchungen und Anwendung auf Membrantragwerke*, Dissertation, Technische Fakultät der Universität Erlangen-Nürnberg, Shaker Verlag, 2003
- [GreinerDiehl 74] W. GREINER, H. DIEHL, *Theoretische Physik*, Band 2: Mechanik II, Verlag Harri Deutsch, Zürich, 1974
- [GreshoSani 87] P. M. GRESHO, R. L. SANI, *On Pressure Boundary Conditions for the Incompressible Navier-Stokes Equations*, International Journal for Numerical Methods in Fluids, Volume 7, pp. 1111–1145, 1987
- [GreshoSani 94] P. M. GRESHO, R. L. SANI, *Resume and remarks on the open boundary condition minisymposium*, International Journal for Numerical Methods in Fluids, Volume 18, pp. 983–1008, 1994
- [GreshoSani 98] P. M. GRESHO, R. L. SANI, *Incompressible flow and the finite element method*, John Wiley & Sons Ltd, Chichester, (1998)
- [Griebel 94] MICHAEL GRIEBEL, *Multilevelmethoden als Iterationsverfahren über Erzeugendensystemen*, Teubner, Stuttgart, 1994
- [Griebel et al. 95] MICHAEL GRIEBEL, THOMAS DORNSEIFER, TILMAN NEUNHOEFFER, *Numerische Simulation in der Strömungsmechanik*, Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden, 1995
- [Günther 04] FRANK GÜNTHER, *Eine cache-optimale Implementierung der Finite-Element-Methode*, Dissertation, Institut für Informatik der TU-München, 2004
- [Hartmann 04] JUDITH HARTMANN *Entwicklung eines cache-optimalen Finite-Element-Verfahrens zur Lösung d-dimensionaler Probleme*, Diplomarbeit, Institut für Informatik der TU-München, 2004
- [Herder 05] WOLFGANG HERDER *Lastverteilung und parallelisierte Erzeugung von Eingabedaten für ein paralleles Cache-optimales Finite-Element-Verfahren*, Diplomarbeit, Institut für Informatik der TU-München, 2005
- [Knabner et al. 00] PETER KNABNER, LUTZ ANGERMANN, *Numerik partieller Differentialgleichungen*, Springer, Berlin, 2000
- [Koenig. 97] KONRAD KÖNIGSBERGER, *Analysis 2*, Springer, Berlin, 1997
- [Krahnke 05] ANDREAS KRAHNKE, *Adaptive Verfahren höherer Ordnung auf cache-optimalen Datenstrukturen für dreidimensionale Probleme*, Dissertation, Institut für Informatik der TU-München, 2005

- [Langlotz 04] MARKUS LANGLOTZ *Parallelisierung eines Cache-optimalen Finite-Element-Verfahrens*, Diplomarbeit, Institut für Informatik der TU-München, 2004
- [Laschka et al. 01] B. LASCHKA, A. PECHLOFF, *Fluidmechanik I*, Vorlesungsbegleitendes Manuskript, Lehrstuhl für Fluidmechanik der TU-München, 2001
- [OpenDX] *OpenDX*, <http://www.opendx.org>, 2002
- [Panton 96] RONALD L. PANTON, *Incompressible flow*, John Wiley & Sons Inc., New York, 1996
- [Pögl 04] MARKUS PÖGL, *Entwicklung eines cache-optimalen 3D Finite-Element-Verfahrens für große Probleme*, Dissertation, Institut für Informatik der TU-München, 2004
- [Salençon 02] JEAN SALENÇON, *Mécanique des milieux continus*, Editions de l'Ecole Polytechnique, Palaiseau, 2002
- [Turek 98] S. TUREK, *The 'DFG-Benchmark 1995/6': Channel flow around a circle at $Re=100$* , http://www.featflow.de/album/catalog/bench_cyl_2d/data.html, 1998
- [Turek et al. 97] M. SCHÄFER, S. TUREK, *Benchmark Computations of Laminar Flow Around a Cylinder*, http://www.featflow.de/bench_all/paper.html, 1997
- [Van Dyke 82] MILTON VAN DYKE, *An Album of Fluid Motion*, The Parabolic Press, Stanford, 1982
- [Wagner 05] TILL WAGNER, Diplomarbeit, Fakultät für Mathematik der TU-München, Fertigstellung voraussichtlich 2005
- [Wall 99] W. A. WALL, *Fluid-Struktur-Interaktion mit stabilisierten Finiten Elementen*, Dissertation, Universität Stuttgart, 1999
- [Weinzierl 05] TOBIAS WEINZIERL, *Eine Cache-optimale Implementierung eines Navier-Stokes-Lösers unter besonderer Berücksichtigung physikalischer Erhaltungssätze*, Diplomarbeit, Institut für Informatik der TU-München, Fertigstellung voraussichtlich 02/2005