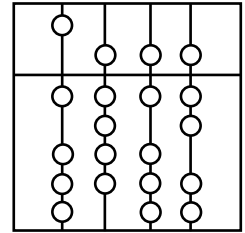


Technische Universität München
Institut für Informatik



Hauptseminar:
Oktaalbäume und hierarchische Basen

Thema:
Raumfüllende Kurven

Autor: Albert Maas
Betreuer: Dipl.-Inf. Markus Pögl
Vortragstermin: 12. Juni 2003

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	3
2	Definition: Kurve, raumfüllende Kurve	3
3	Geschichtliches	4
4	Linearisierung	6
5	Die Lebesgue-Kurve	6
6	Die Hilbert-Kurve	7
7	Die Peano-Kurve	9
8	Die Sierpinski-Kurve	10
9	Versionen der Hilbert- und Peano-Kurve	10
10	Geometrische Konstruktion	11
11	Kurven in 3D	14
12	Zusammenhang mit Oktalbäumen	15

1 Einleitung

Wir stellen uns vor, es sei eine Fläche gegeben, die in Quadrate unterteilt ist. Gesucht ist nun eine Kurve, die jedes einzelne Quadrat durchläuft. Die Bedingungen dabei sind allerdings, dass:

- die Kurve jedes Quadrat exakt einmal durchlaufen muss,
- sie keine Lücken haben darf und
- die Kurve sich nicht selbst überschneiden darf.

Die Einteilung der Fläche kann bis ins Unendliche verfeinert werden und somit überdeckt die Kurve irgendwann die gesamte Fläche. Anders ausgedrückt, wenn wir einen Stift nehmen und mit diesem die unendliche Kurve nachzeichnen, so erhalten wir eine ausgefüllte schwarze Fläche. Interessant dabei ist, dass eine solche Kurve diese Eigenschaften nicht nur im zweidimensionalen hat sondern auch im drei- bzw. mehrdimensionalen. Deshalb werden sie raumfüllende Kurven genannt und nun werden wir diese etwas genauer betrachten.

Bevor wir allerdings die Geschichte der raumfüllenden Kurven näher betrachten führen wir die Definitionen der Kurve und der raumfüllenden Kurve ein. Die Definitionen stammen aus [bader].

2 Definition: Kurve, raumfüllende Kurve

Kurve:

Eine Kurve ist das Bild $f^*(I)$ einer stetigen Abbildung $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$
 $x = f(t), t \in I$ heißt Parameterdarstellung der Kurve.

wobei:

- $I \subset \mathbb{R}$ und I kompakt, z.B: $I = [0, 1]$
- Bild $f(I)$ ist definiert als $f(I) := \{f(x) \in \mathbb{R}^n | x \in I\}$

Raumfüllende Kurve:

Zu einer Abbildung $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ gehörigen Kurve $f(I)$ heißt raumfüllende Kurve, wenn $f(I)$ einen Jordaninhalt (Fläche, Volumen,...) größer als 0 besitzt

Bemerkungen:

- Falls $f : I \rightarrow Q \subset \mathbb{R}^n$ surjektiv ist, dann ist $f(I)$ eine raumfüllende Kurve, sofern Q positive Fläche (Volumen, ...) hat

- Ist Q ein Gebiet mit glattem Rand (differenzierbar), dann gibt es kein bijektives $f : I \rightarrow Q \subset \mathbb{R}^n$, so dass $f(I)$ eine raumfüllende Kurve ist (Beweis: E. Netto)

3 Geschichtliches

Laut [sagan] demonstrierte der russische Mathematiker George Cantor im Jahre 1878, dass ein Intervall $[0, 1]$ die selbe Kardinalität (Anzahl der Elemente) besitzt wie eine Ebene $[0, 1]^2$, bzw. Hyperebene. Dies bedeutet, dass die Mächtigkeit des Einheitsintervalls gleich der Mächtigkeit des Einheitswürfels ist, und eine Abbildung existiert, die bijektiv (surjektiv und injektiv) sein müsste. Folgende Relation demonstriert die Überlegungen Cantors, allerdings ist die Bijektivität nicht gegeben:

$$C(0_2, b_1 b_2 b_3 b_4 \dots) = \begin{pmatrix} 0_2, b_1 b_3 b_5 b_7 \dots \\ 0_2, b_2 b_4 b_6 b_8 \dots \end{pmatrix}$$

Diese Relation bildet allerdings das Intervall $[0, 1]$ auf die Fläche $[0, 1]^2$ ab, da sie eine Zahl in einen Vektor abbildet. Sie ist jedoch nicht stetig. Den vollständigen Beweis hierfür würde zu weit führen, deshalb folgendes Indiz für die Richtigkeit dieser Behauptung:

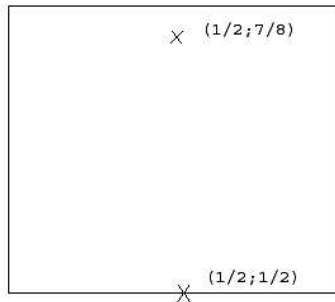


Abbildung 1: Indiz für Unstetigkeit

$$\frac{1}{2} = 0_2, 1 \rightarrow \begin{pmatrix} 0_2, 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$0_2, 011110 \cdot 1 \rightarrow \begin{pmatrix} 0_2, 0 \cdot 1 \\ 0_2 110 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_2, 1 \\ 0_2 111 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{7}{8} \end{pmatrix}$$

Zur Erklärung: $\frac{1}{2}$ ist im Dualsystem $0, 1$. Die zweite Zahl $0, 0111101$ ist nur minimal von $\frac{1}{2}$ entfernt. Wie man aus der Skizze 1 entnehmen kann kommen, obwohl diese beiden Werte nur

minimal bzw. nicht voneinander abweichen, große Unterschiede als Ergebnis heraus, und ein Sprung entsteht. Deshalb kann diese Abbildung nicht differenzierbar sein.

Nun stellte sich allerdings die Frage, ob es eine solche Abbildung gibt, die bijektiv und stetig differenzierbar ist. Auf diese Frage fand ein Jahr später im Jahre 1879 der aus Deutschland stammende Eugen Netto die Antwort. Er bewies nämlich, dass eine raumfüllende Kurve niemals gleichzeitig bijektiv und stetig differenzierbar sein kann.

Mit Hilfe dieses Beweises kann man also sagen, dass die Abbildung zwischen zwei Dimensionen nicht stetig differenzierbar und bijektiv sein kann. Aber welche Eigenschaft besitzt sie dann?

Im kontinuierlichen Fall kann diese Abbildung nicht bijektiv sein, da sie nicht injektiv ist. Dies kann man mit dem Beweis des Zusammenziehens zeigen: Betrachtet man in der Abbildung 2

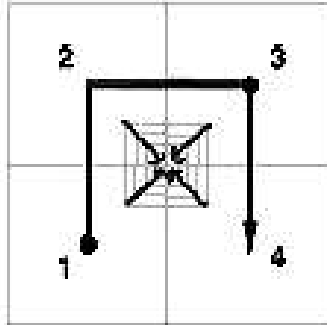


Abbildung 2: Zusammenziehen

den Punkt in der Mitte, nämlich $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Diesen Punkt kann man nicht eindeutig zuweisen. Wie in der Skizze angedeutet kann man nicht sagen aus welchem Quadrat dieser Punkt durch erneute Iterationen entsteht. Also kann die Abbildung nicht injektiv sein, da es zu einem Bildpunkt mehrere Urbilder gibt, und somit ist die Abbildung auch nicht bijektiv.

Aus den Überlegungen von Cantor und Netto kam nun folgende Frage auf: Wenn es eine stetig differenzierbare und surjektive Abbildung eines Intervalls zu einer Fläche gibt, existiert dann auch eine Kurve, die durch jeden Punkt in einem 2-dimensionalen Bereich verläuft? Im Jahre 1890 wurde diese Frage vom Italiener Giuseppe Peano durch die Entwicklung der ersten Raumfüllenden Kurve gelöst, der so genannten Peano-Kurve. Nach Peano's Entdeckung folgte ein Jahr später eine weitere Kurve, die Hilberts Namen trägt und die bis heute wahrscheinlich bekannteste Raumfüllende Kurve sein dürfte. David Hilbert war ein russischer Mathematiker, der den Weg für die Mathematik ins 20. Jahrhundert ebnete. 1904 entdeckte der Franzose Henri Leon Lebesgue die erste fast überall differenzierbare Raumfüllende Kurve, und Waclaw Sierpiński (Russland) war es, der 1912 das Konstruktionsprinzip von Quadratunterteilungen in Triangulierungen veränderte. Diese Arten der Raumfüllenden Kurven wurden durch einige verschiedene Versionen erweitert. Damit endete die Zeit der klassischen Raumfüllenden Kurven. Deutlich später erweckte das Interesse an Fraktalen, die Untersuchungen zu Raumfüllenden Kurven zu neuem Leben. Für eine ausführlichere Zusammenfassung der Geschichte der Raumfüllenden

Kurven kann [sagan] dienen.

4 Linearisierung

Raumfüllende Kurven beschreiben eine Abbildung von Punkten des n -dimensionalen Raumes auf ein Intervall der reellen Zahlen. Auf den reellen Zahlen ist eine totale Ordnung definiert und so kann man die Punkte anhand ihrer Bilder einer Reihenfolge unterwerfen. Die Linearisierung ist eine wichtige Eigenschaft der raumfüllenden Kurven. In der Abbildung 3 kann man erkennen, wie die einzelnen Zellen auf das Intervall abgebildet werden.

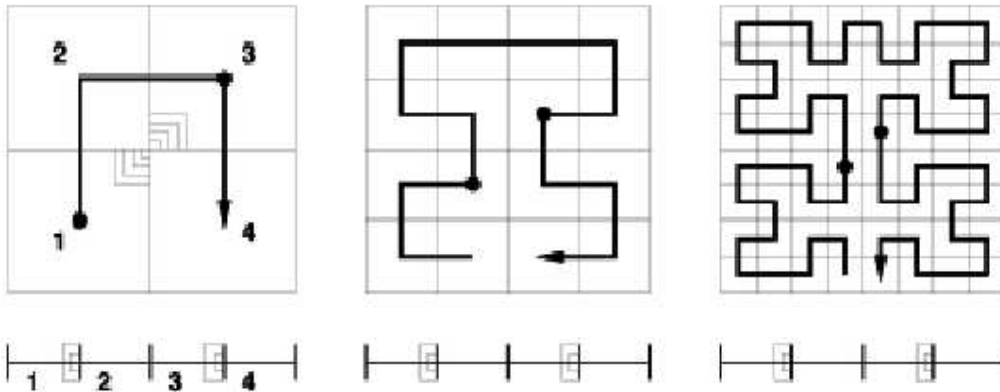


Abbildung 3: Linearisierung der raumfüllenden Kurven

5 Die Lebesgue-Kurve

Die Lebesgue-Kurve ist die graphisch gesehen einfachste Kurve, da sie nur aus einem Generator, der sich in jeder Verfeinerung wiederholt, besteht. Allerdings wird diese raumfüllende Kurve für zahlreiche Anwendungen in der Informatik hergenommen. Sie basiert auf einer 2×2 -Verfeinerung und der Generator ist in Abbildung 4 dargestellt.

Wichtig für die Lebesgue-Kurve ist die Cantor-Menge: Wir betrachten $C_0 = [0; 1]$ und entfernen daraus das mittlere Drittel. Es entstehen zwei Intervalle: $C_1 = [0; \frac{1}{3}]$ und $[\frac{2}{3}, 1]$. Aus diesem C_1 erhält man C_2 usw. Die Punkte in der Cantor Menge sind dann die Randpunkte der herausgenommenen Intervalle, wie in der Abbildung 5 dargestellt. Die Lebesgue-Kurve entsteht durch Interpolation zwischen diesen Punkten der Cantormenge. Die Eigenschaften dieser Kurve sind, dass sie kontinuierlich fast überall differenzierbar ist und dass sie im Gegensatz zu anderen raumfüllenden Kurven nicht selbstähnlich ist. Das bedeutet, dass sie nicht durch Spiegelung und Drehung der Grundkurve entsteht, sondern die Grundkurve bleibt immer die selbe.

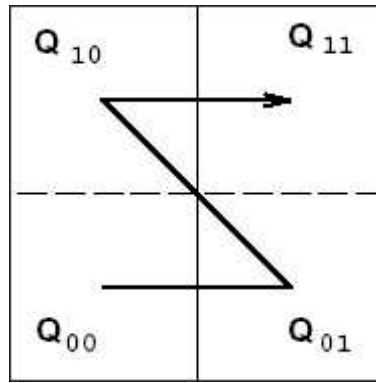


Abbildung 4: Generator der Lebesgue-Kurve

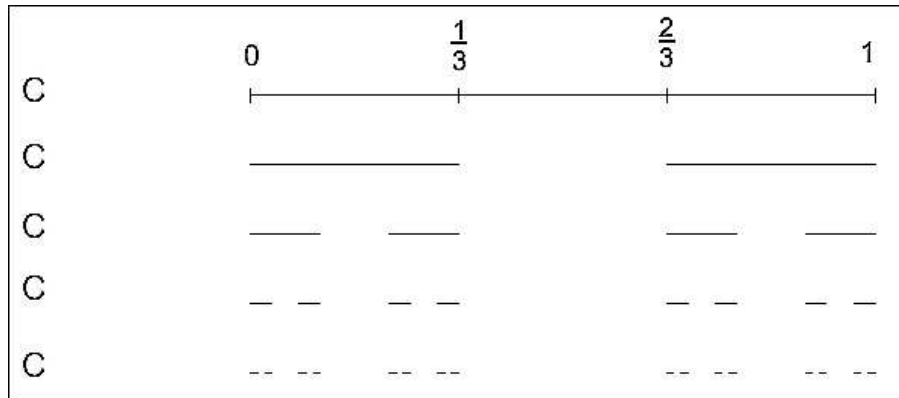


Abbildung 5: Entwicklung der Cantor-Menge

6 Die Hilbert-Kurve

Hilberts Anordnung, basierend auf einer 2×2 -Verfeinerung und besteht aus folgender Grundkurve. Die Kurve entsteht dann durch Spiegelung und Drehung des in Abbildung 6 abgebildeten Generators.

Bei der Entwicklung der Hilbert-Kurve stand die geometrische Anschauung im Mittelpunkt: Wenn I raumfüllend auf Q abgebildet werden kann, dann auch jedes der vier kongruenten Teilintervalle von I auf eines der Quadrate von Q . Wendet man diesen Unterteilungs- und Zuordnungsprozess unter Wahrung von Nachbarschaftsrelation und Teilmengenrelation rekursiv an, so erhält man im Grenzfall die Hilbert-Kurve. Unter Nachbarschaftsrelationen versteht man, dass benachbarte Teilintervalle über Kanten benachbarter Teilquadrate zugeordnet werden, und unter Teilmengenrelation, dass wenn ein Teilintervall ganz in einem Vorgängerintervall enthalten ist, dann gilt diese Beziehung auch für die beiden entsprechenden Teilquadrate.

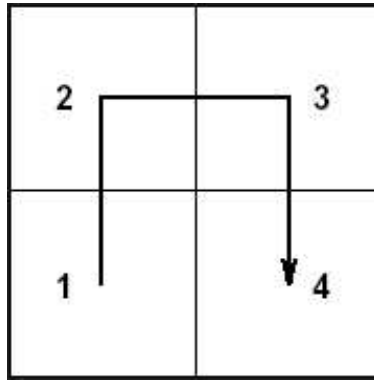


Abbildung 6: Generator der Hilbert-Kurve

Formulieren wir nun die Definition der Hilbert-Kurve laut [bader] etwas mathematischer:

Definition Hilbert-Kurve

- zu jedem $t \in I := [0, 1]$ gehört eine Intervallschachtelung, jedes Intervall entsteht dabei durch Viertelung des Vorhergehenden.
- Jeder Intervallschachtelung ist eindeutig eine 2D-Intervallschachtelung zugeordnet
- Die 2D-Intervallschachtelung konvergiert eindeutig gegen einen Punkt in $Q := [0, 1]^2$, dieser Punkt sei definiert als $h(t)$

Behauptung: $h : I \rightarrow Q$ ist eine raumfüllende Kurve

Zu zeigen:

- h ist eine Abbildung
- $I \rightarrow Q$ ist surjektiv:
Zu jedem Punkt $q \in Q$ lässt sich eine geeignete 2D-Intervallschachtelung konstruieren. Die eindeutig zugeordnete Intervallschachtelung in I definiert ein Urbild von $q \Rightarrow$ jedes $q \in Q$ hat ein Urbild.
- h ist stetig.

Beweis für die Stetigkeit der Hilbert-Kurve:

- gegeben seien $t_1, t_2 \in I$; wähle ein n so, dass $|t_1 - t_2| < 4^{-n}$
- in der n -ten Iteration der Intervallschachtelungen haben alle Intervalle die Länge 4^{-n} , also überlappt das Intervall $[t_1, t_2]$ maximal zwei solche benachbarter Intervalle.

- Aufgrund der Konstruktion der Hilbert-Kurve liegen die Funktionswerte $h(t_1)$ und $h(t_2)$ in zwei benachbarten Quadraten der Seitenlänge 2^{-n}
- Diese beiden benachbarten Quadrate formen zusammen ein Rechteck, dessen Diagonale $2^{-n} * \sqrt{5}$ lang ist, daher gilt: $|h(t_1) - h(t_2)|_2 < 2^{-n} * \sqrt{5}$

Mit dieser Vorkenntnis kommen wir zu folgender Überlegung:

Zu einem $\varepsilon > 0$ wählen wir ein n , so dass für alle t in einer ω -Umgebung von t_0 gilt: $|h(t) - h(t_0)|_2 < 2^{-n} * \sqrt{5} < \varepsilon$

$\Rightarrow h$ ist in t_0 stetig, und da t_0 beliebig ist h auf ganz I stetig.

Abbildung 7 zeigt nun noch die Hilbert-Kurve in der zweiten und dritte Iteration:

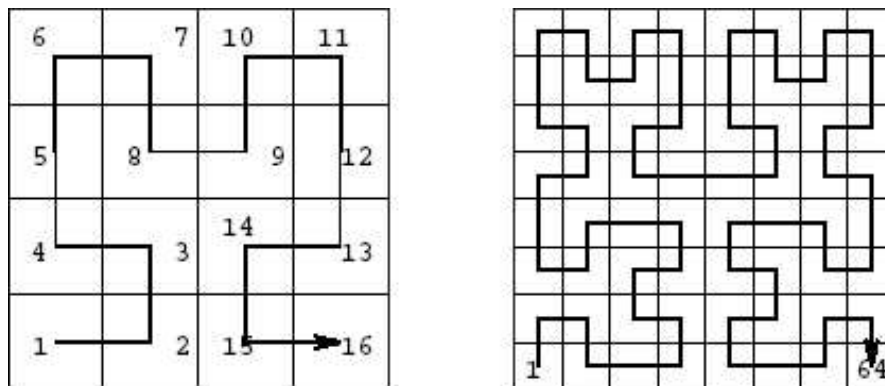


Abbildung 7: 2-te und 3-te Iteration der Hilbert-Kurve

7 Die Peano-Kurve

Die Peano Kurve ist der Urahn der raumfüllenden Kurven, da es die erste raumfüllende Kurve überhaupt war. Peano gab allerdings lediglich eine rein formale Definition der Abbildung, ohne geometrische Anschauung, an. Wir nähern uns allerdings wiederum über das Leitmotiv, sprich mit Hilfe der Grundkurve. Bei der Peano-Kurve erfolgt die Verfeinerung nicht wie bisher auf 4 Quadrate sondern auf 9. Demnach wird das Ausgangsquadrat in 9 gleiche Teilquadrate eingeteilt. Die Abbildung 8 zeigt den Generator. In der Abbildung 9 ist die Peano-Kurve bei erneuter Iteration abgebildet.

Man erkennt hier die geschlängelte Form der Peano-Kurve, deshalb wird dieser Typ auch "Serpentinentyp" genannt. Dies werden wir bei den Versionen der Peano-Kurve jedoch noch näher betrachten.

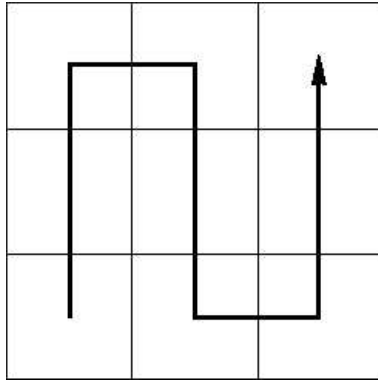


Abbildung 8: Generator der Peano-Kurve

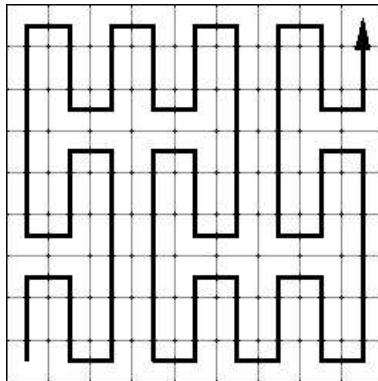


Abbildung 9: Peano-Kurve in der 2-ten Iteration

8 Die Sierpinski-Kurve

Hier wird keine Quadratverfeinerung sondern eine Dreiecksverfeinerung gemacht. Ein Dreieck wird dabei in 4 Unterdreiecke unterteilt. Diese Unterteilung wird Triangulierung genannt. In Abbildung 10 ist die Grundkurve der Sierpinski-Kurve zu sehen. Abbildung 11 zeigt eine weitere Iteration der Sierpinski-Kurve.

9 Versionen der Hilbert- und Peano-Kurve

Die Moore-Kurve ist die geschlossene Hilbertkurve. Diese erreicht man dadurch, dass man bei der ersten Iteration sich anders orientiert. Dies ist die einzige Version der Hilbert-Kurve im zweidimensionalen Fall. In Abbildung 12 ist die Grundkurve und zwei weitere Iterationen der Moore-Kurve abgebildet. Bemerkungen zur Peano-Kurve: Die Richtung der Schlingelung kann sowohl vertikal als auch horizontal oder aber auch gemischt sein. Dadurch lassen sich 272 verschiedene geschlängelte Peano-Kurven konstruieren. Dieser Typ der Peano-Kurven wird Ser-

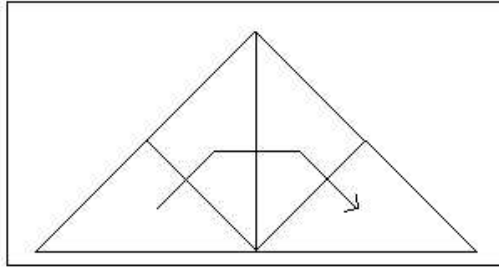


Abbildung 10: Generator der Sierpinski-Kurve

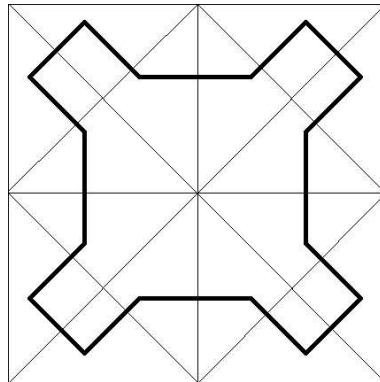


Abbildung 11: Sierpinski-Kurve in der 2-ten Iteration

pentinentyp genannt. Dazu kommen noch 2 so genannte Meander-Peano-Kurven, die nicht geschlängelt sind. Zum Vergleich es gibt nur 2 Hilbertkurven. In 13 sieht man auf der linken Seite einen gemischten Serpentinertyp, in der Mitte einen horizontalen Serpentinertyp und auf der rechten Seite eine Meander-Peano-Kurve.

10 Geometrische Konstruktion

[bartholdi] beschreibt folgende Geometrische Konstruktion:

Zuerst muss untersucht werden, welche Basisformen vorhanden sind, wie sich diese bei größerer Verfeinerung verhalten und wie die einzelnen Teilkurven zusammengefügt werden.

Wir führen eine neue alternative Darstellungsmöglichkeit ein: Die Darstellung mit Bögen ist in Abbildung 14 skizziert. Sie enthält mehr Informationen, nämlich wo die Kurve in die Zelle eintritt, wo sie verschwindet und den Verlauf der Kurve.

Eine wichtige Eigenschaft der raumfüllenden Kurven ist, dass eine Ebene der Kurve eine Zusammensetzung von unteren Ebenen ist. Algorithmen von raumfüllenden Kurven basieren auf einer geometrischen Analyse. Der Algorithmus den wir jetzt betrachten untersucht das Verhalten

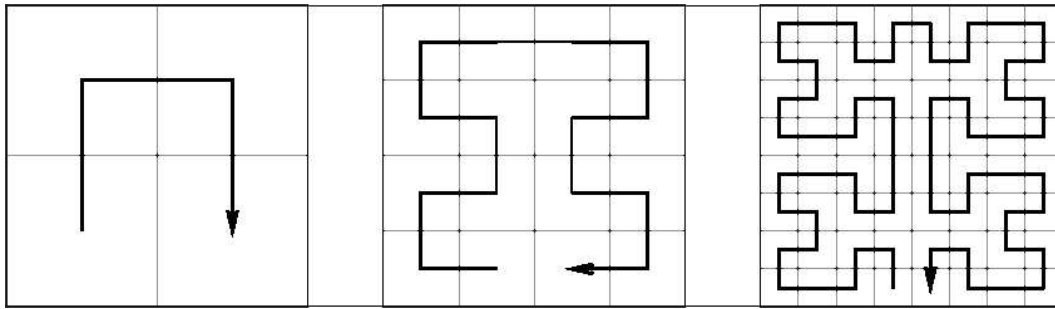


Abbildung 12: Moore-Kurve

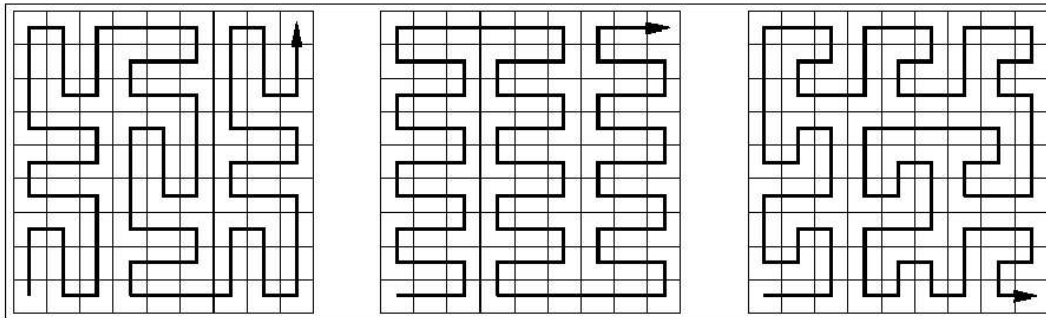


Abbildung 13: Versionen der Pano-Kurve

der Unterzelle zu einer Zelle. Dazu ist eine Ordnung nötig um die einzelnen Zellen zu nummerieren. Die Nummerierung beginnt mit dem Ausgangsquadrat, das mit 0 bezeichnet wird. Bei der ersten Iteration werden die einzelnen Unterquadrate wie folgt weiter nummeriert: Das rechte untere Quadrat wird mit 0.0, das rechte obere mit 0.1, das linke obere mit 0.2 und das linke untere mit 0.3 beschriftet. Diese Art der Nummerierung wird Hilbert-Code genannt.

Nun verfeinern wir die Ordnung indem wir den Verlauf der Kurve einfügen. Bei a ist der Eintrittspunkt, bei d der Austrittspunkt und dazwischen durchläuft die Kurve b und c . Diese Beschriftung führt uns nun zu folgendem Algorithmus. Man erweitert bei einer Verfeinerung den Hilbert-Code wie folgt:

$0 \rightarrow a$

$1 \rightarrow b$

$2 \rightarrow c$

$3 \rightarrow d$

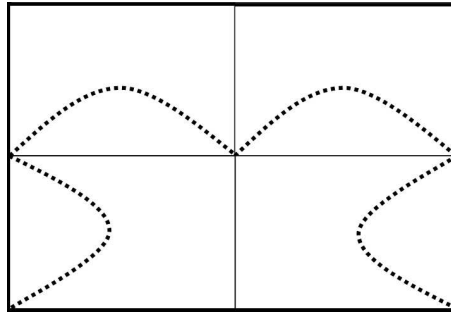


Abbildung 14: Darstellung der Hilbert-Kurve mit Bögen

Die einzelnen Scheitelpunkte werden nun wie folgt abgebildet:

Für Zelle 0.0:

$$a_{new} = a$$

$$b_{new} = (a + d) / 2$$

$$c_{new} = (a + c) / 2$$

$$d_{new} = (a + b) / 2$$

Zelle 0.1:

$$a_{new} = (a + b) / 2$$

$$b_{new} = b$$

$$c_{new} = (b + c) / 2$$

$$d_{new} = (b + d) / 2$$

Zelle 0.2:

$$a_{new} = (a + c) / 2$$

$$b_{new} = (b + c) / 2$$

$$c_{new} = c$$

$$d_{new} = (c + d) / 2$$

Zelle 0.3:

$$a_{new} = (d + c) / 2$$

$$b_{new} = (b + d) / 2$$

$$c_{new} = (d + a) / 2$$

$$d_{new} = d$$

Nun kann man die Kurve durch die einzelnen Scheitelpunkte legen beginnend beim Quadrat 0.0 im Punkt a weiter durch b und c und über d ins Quadrat 0.1, bis man beim Quadrat 0.3 im Punkt

d angekommen ist. Nun kann beim nächsten Iterationsschritt wiederum der Hilbert-Code wie oben beschrieben für jedes Unterquadrat erweitert werden und die Scheitelpunkte wieder neu gesetzt werden. Dies wird nun so lange wiederholt, bis die benötigte Genauigkeit erreicht wird. Mit Hilfe dieses Algorithmus kann auch ein Punkt im Intervall ausgehend von der Fläche gefunden werden, indem man den Algorithmus so lange durchläuft, bis der Punkt in der Fläche erreicht wird. Somit hat man den Hilbert-Code eines bestimmten Punktes in der Fläche. Mit der selben Methode kann man auch umgekehrt einen Punkt vom Intervall in der Fläche finden. Dies ist zwar ein mögliches Vorgehen um diese beiden Funktionen zu implementieren, allerdings beschreibt [oberhofer] eine viel effizienteren Algorithmus in seinem Bericht.

11 Kurven in 3D

Die Eigenschaften der raumfüllenden Kurven im zweidimensionalen gelten auch in 3D und sogar im Mehrdimensionalen. Die 3 Grundkurven der dreidimensionalen Hilbert-Kurve ist in 15 dargestellt. Durch zusätzliche Spiegelung und Änderung der Durchlaufrichtung lassen sich laut

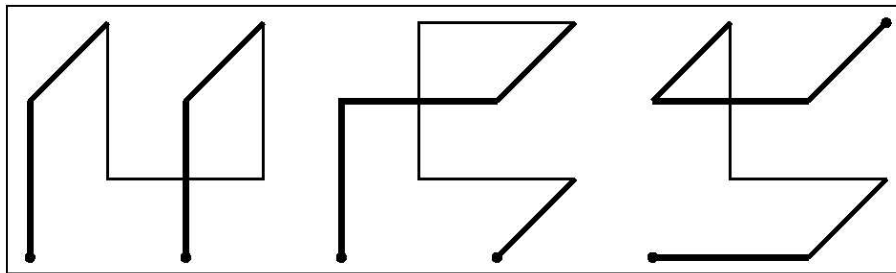


Abbildung 15: 3-D Hilbert-Kurve

[zumbusch] bis zu 1536 verschiedene Hilbertkurven im 3D konstruieren. In Abbildung 16 ist ein Beispiel einer 3D-Hilbertkurve abgebildet. Bei der dreidimensionalen Peano-Kurve konzentriert

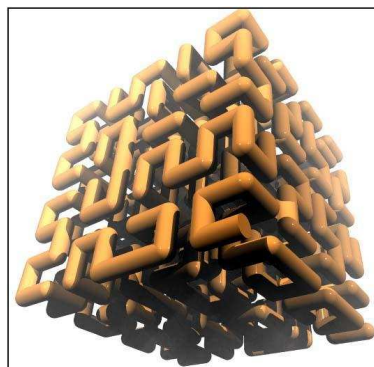


Abbildung 16: Hilbert-Kurve in 3D

man sich auf die “geschlängelten“ Peano-Kurven, also auf den Serpentinentyp. Trotzdem gibt es noch unzählige Anordnungstypen. Abbildung 17 zeigt einige Beispiele der 3D-Peano-Kurve.

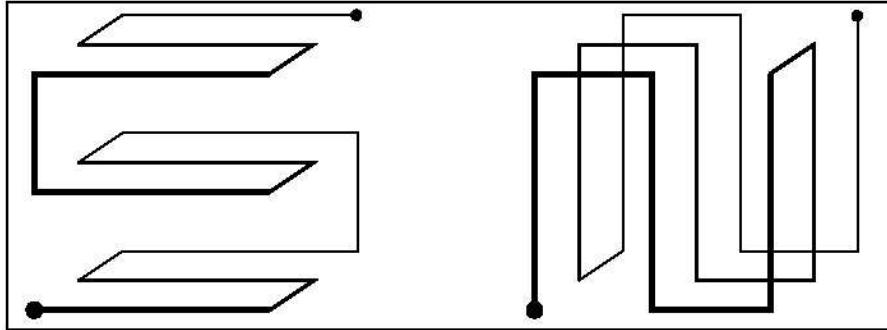


Abbildung 17: Peano-Kurve in 3D

12 Zusammenhang mit Oktalbäumen

Es kann ein Baum erzeugt werden mit der Anfangszelle als Wurzel und den maximalen Verfeinerung in den Blättern. Im 2D hat dabei die Hilbert-Kurve und die Lebesgue 4 Unterknoten, weil eine Verfeinerung in 4 Unterquadrate durchgeführt wird. Dies wird in Abbildung 18 dargestellt. Im 3D hingegen haben diese Kurven 8 Unterzellen und so mit hat der Baum auch 8 Unterknoten (Oktalbaum). Im Gegensatz dazu hat die Peano-Kurve im 2D bereits 9 Unterzellen und im 3D bereits 27. Abbildung 18 zeigt ein Beispiel eines Baumes mit 4 Unterknoten.

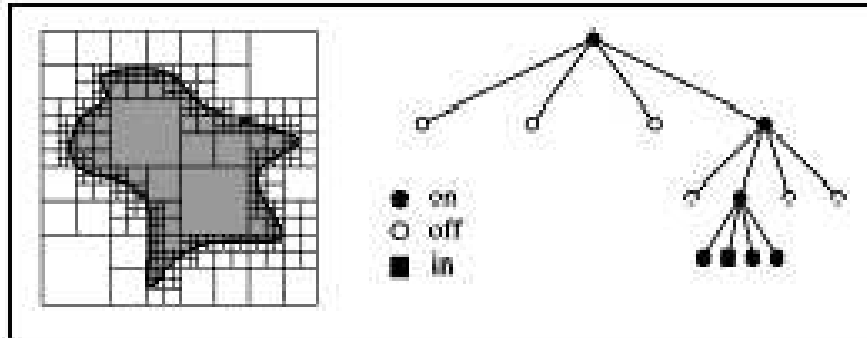


Abbildung 18: Oktalbaum

Literatur

- [oberhofer] Peter Oberhofer, Anwendungen zu Raumfüllende Kurven, Arbeit im Rahmen des Hauptseminars Oktalbäume und hierarchische Basen, 2003
- [sagan] Hans Sagan, Space-Filling Curves, Springer-Verlag, 1994
- [bader] Michael Bader, Raumfüllende Kurven, Unterlagen zur Vorlesung Algorithmen des wissenschaftlichen Rechnens, 2003
- [bartholdi] John J. Bartholdi und Paul Goldsman, Vertex-Labeling Algorithms for the Hilbert Spacefilling Curve, 2000
- [zumbusch] Gerhard Zumbusch, Adaptive Parallel Multilevel Methods for Partial Differential Equations, Habilitationsschrift Universität Bonn, 2001