

Algorithmen des Wissenschaftlichen Rechnens II

Übungsblatt 5 – Gitteroptimierung, Quadratur

Zur Übung am 14.1.2009

1 Kontinuierliche Optimierung

Ganz wollen wir die kontinuierliche Version der Gitteroptimierung nicht (wie auf Folie 49 behauptet) den Mathematikern überlassen. Interpretieren Sie dazu Kostenfunktion $c(\mathbf{l})$ und Nutzenfunktion $b(\mathbf{l})$ als Funktionen $[0, \infty[^2 \rightarrow \mathbb{R}$ (es sei wieder mal $d = 2$) und geben Sie Integrale an, die die globalen Kosten $C(\mathbf{I})$ und den zugehörigen Nutzen (gemessen in der L^2 -Norm) eines „Teilraumschemas“ $\mathbf{I} \subset [0, \infty[^2$ (näherungsweise) angeben.

Bitten Sie Maple, Ihnen das Kosten-/Nutzenverhältnis mit Höhenlinien aufzumalen und für Sie Kosten und Nutzen für die \mathbf{I} zu berechnen, die dem vollen und dem dünnen Gitter entsprechen (mit gegebener Tiefe n , also Maschenweite $h = 2^{-n}$).

2 Diskrepanz

Gegeben sei auf $\Omega = [0, 1]^2$ eine Menge von n Gitterpunkten $\mathbf{x}_i = (x_i/N, y_i/N)$ mit ganzzahligen $1 \leq x_i, y_i < N, 1 \leq i \leq n$ und festem $N \in \mathbb{N}$. Geben Sie einen Algorithmus an, um die Diskrepanz $D_n^*(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$ gemäß Folie 47 zu berechnen. Wegen der Beschränkung auf Gitterpunkte der Form $(x_i/N, y_i/N)$ brauchen auch nur Rechtecke mit Eckpunkten dieser Form betrachtet zu werden – es dürfte trotzdem besser sein, auch hier Maple oder sonst wen zu bitten, das Zählen für Sie zu erledigen. . .

Probieren Sie das ganze für ein paar volle und dünne Gitter aus!

3 Kombinationstechnik

Verwenden Sie die Kombinationstechnik wie auf Folie 88, allerdings eine Stufe gröber (also auf $\Omega_2^{(1)}$) zur numerischen Quadratur:

- Welche Gitter werden benötigt?
- Wenn auf jedem Gitter mittels der zweidimensionalen Trapezregel integriert wird: Mit welchen Gewichten gehen die Gitterpunkte jeweils ein?
- Wenn nun aus den einzelnen Integralen die Kombinationslösung gebildet wird: Was für Gewichte entstehen nun (unter besonderer Berücksichtigung derjenigen Gitterpunkte, die in mehr als einem Teilgitter vorkommen)?