Technische Universität München
Institut für Informatik
Prof. Dr. Hans-Joachim Bungartz
Dr. Stefan Zimmer
Dipl.-Inf. Martin Buchholz

WS 2008/2009

Algorithmen des Wissenschaftlichen Rechnens II

Übungsblatt 6: Smolyak-Quadratur und operatorabhängige Prolongation

Zur Übung am 28.01.2009

1 Smolyak-Quadratur

In dieser Aufgabe realisieren wir die Quadratur nach Smolyak. Wieder halten wir uns im Zweidimensionalen im Gebiet $[0,1]^2$ auf. Als geschachtelte univariate Quadraturregel $Q_n^{(1)}$ verwenden wir die Trapezsumme. Als Grundlage können wir das Programm von der Kombinationstechnik (Blatt 5, Aufgabe 3) weiter verwenden (Quadraturregeln als assoziative Arrays, Bilder von Quadraturregeln, Kombinieren und Anwenden auf eine Funktion). Neu sind nun eindimensionale Regeln, die wir für die Kombinationstechnik nicht hatten, die gehen aber ganz analog (man braucht eine neue Prozedur, um sie malen zu lassen, wenn man das will).

- Schreiben Sie eine Prozedur, die zu gegebenem p und l die 1D-Trapezregel für p^l Teilintervalle zurückliefert.
- Dann kommt die Differenzenformel $\Delta_l^{(1)}$ (Folie 93), die hier zweckmäßigerweise p, l und eine Prozedur zum Bauen von 1D-Quadraturregeln (wie aus der ersten Teilaufgabe) als Parameter bekommt und eine Quadraturregel zurückliefert.
- Es folgt das Tensorprodukt $\otimes$ (Folie 94), das zwei 1D-Quadraturregeln bekommt und daraus eine 2D-Regel baut.
- Dann können wir schon die Smolyak-Quadratur zusammenbauen, indem wir die Summe von Folie 94 ausprogrammieren. Damit können wir fast die Bilder von Folie 95 erzeugen (fast, weil dort für $Q_0^{(1)}$ in Wirklichkeit die Mittelpunktsregel verwendet wird) und Testrechnungen z.B. für $p = 2, 3, 4$ und verschiedene n durchführen.

2 Operatorabhängige Prolongation

Wir lösen die Differentialgleichung

$$-u''(x) + k^2 \cdot u(x) = f(x)$$

($k \in \mathbb{R}$) auf dem Einheitsintervall $[0, 1]$, das gleichmäßig in N Teilintervalle aufgeteilt sei ($N \geq 4$ gerade).

- Was für Lösungen hat die homogene ($f \equiv 0$) Gleichung (noch undiskretisiert)?
- Wie sieht der Finite-Differenzen-Stern für den Differenzialoperator aus?
- Und wie das lineare Gleichungssystem für das Randwertproblem mit Dirichlet-Randbedingungen $u(0) = u_0$, $u(1) = u_1$?

  Das wäre natürlich mittels eines direkten Lösers sehr billig zu lösen – wir werden im Folgenden trotzdem so tun, als ob wir ein Mehrgitterverfahren konstruieren wollten.
- Konstruieren Sie einen Prolongationsoperator, der aus den Werten in den Grobgitterpunkten (gerader Index) die Werte in den Feingitterpunkten (ungerader Index) so berechnet, dass der Interpolant im Feingitterpunkt die homogene Differenzengleichung erfüllt (d. h. die zugehörige Zeile des LGS mit rechter Seite 0, vgl. Folie 38).
- Was braucht man noch, um ein Mehrgitterverfahren für unser LGS zu bauen?