Technische Universität München
Institut für Informatik
Prof. Dr. Hans-Joachim Bungartz
Dr. Stefan Zimmer
Dipl.-Inf. Martin Buchholz

WS 2008/2009

Algorithmen des Wissenschaftlichen Rechnens II

Übungsblatt 6: Smolyak-Quadratur und operatorabhängige Prolongation
Lösungsvorschlag Aufgabe 2

Zur Übung am 28.01.2009

1 Smolyak-Quadratur

Siehe Maple-Worksheet

2 Operatorabhängige Prolongation

Wir lösen die Differentialgleichung

$$-u''(x) + k^2 \cdot u(x) = f(x)$$

($k \in \mathbb{R}$) auf dem Einheitsintervall $[0, 1]$, das gleichmäßig in N Teilintervalle aufgeteilt sei ($N \geq 4$ gerade).

- Was für Lösungen hat die homogene ($f \equiv 0$) Gleichung (noch undiskretisiert)?

  Die Nullstellen von $-x^2 + k^2$ sind $x = \pm k$, das gibt die Lösungen der homogenen Gleichung

  $$u(x) = c_1 e^{kx} + c_2 e^{-kx}$$

  mit beliebigen $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ (also gerade genug Freiheitsgraden, um zwei Randbedingungen einzustellen).

- Wie sieht der Finite-Differenzen-Stern für den Differenzialoperator aus?

  $$\begin{array}{l|llll}
  -u'': & [& -N^2 & 2N^2 & -N^2 &] \\
  k^2 u: & [& \cdot & k^2 & \cdot &] \\
  \hline
  -u'' + k^2 u: & [& -N^2 & 2N^2 + k^2 & -N^2 &]
  \end{array}$$

- Und wie das lineare Gleichungssystem für das Randwertproblem mit Dirichlet-Randbedingungen $u(0) = u_0$, $u(1) = u_1$?

  Die Koeffizientenmatrix ist tridiagonal mit $2N^2 + k^2$ auf der Hauptdiagonalen und $-N^2$ in den Nebendiagonalen. Auf der rechten Seite steht der Vektor aus den f_i, $i = 1, \ldots, N-1$, wobei in der ersten Komponente $N^2 u_0$ und in der letzten $N^2 u_1$ dazukommen.

- Konstruieren Sie einen Prolongationsoperator, der aus den Werten in den Grobgitterpunkten (gerader Index) die Werte in den Feingitterpunkten (ungerader Index) so berechnet, dass der Interpolant im Feingitterpunkt die homogene Differenzengleichung erfüllt (d. h. die zugehörige Zeile des LGS mit rechter Seite 0, vgl. Folie 38).

  Wenn die Werte x_{i-1} und x_{i+1} in den beiden (Grobgitter-) Nachbarn eines Feingitterpunkts (i sei ungerade) bekannt sind, bekommen wir mit

  $$x_i = \frac{N^2}{2N^2 + k^2}(x_{i-1} + x_{i+1}) = \frac{1}{2 + k^2/N^2}(x_{i-1} + x_{i+1}) =: \alpha \cdot (x_{i-1} + x_{i+1})$$

  (und unveränderten Grobgitterwerten) einen Interpolanten, der im Feingitterpunkt die homogene Differenzengleichung erfüllt. (Für $k = 0$ ist das die normale lineare Interpolation, für $k \neq 0$ „hängt der Interpolant etwas durch“). Im ersten und im letzten Gitterpunkt gibt's jeweils nur einen Nachbarpunkt, der andere entfällt einfach.

  Als Matrix:

  $$P = \begin{pmatrix} \alpha & & & & \\ 1 & & & & \\ \alpha & \alpha & & & \\ & 1 & & & \\ & \alpha & \alpha & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \alpha & \alpha \\ & & & & 1 \\ & & & & \alpha \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(N-1)\times(N/2-1)}$$

- Was braucht man noch, um ein Mehrgitterverfahren für unser LGS zu bauen?
  - Einen Glätter (z.B. ein paar Gauß-Seidel-Schritte)
  - Eine Restriktion, z.B. P^T
  - Einen Grobgitteroperator in $\mathbb{R}^{(N/2-1)\times(N/2-1)}$, z.B. $A^C := P^T AP$