WS 2014/15

Diskrete Strukturen

Kapitel 2: Grundlagen (Mengen)

Hans-Joachim Bungartz

Lehrstuhl für wissenschaftliches Rechnen
Fakultät für Informatik
Technische Universität München

http://www5.in.tum.de/wiki/index.php/Diskrete_Strukturen_-_Winter_14

- Mathematische und notationelle Grundlagen
  - **Mengen**
  - Relationen und Abbildungen
  - Aussagen- und Prädikatenlogik
  - Beweismethoden
  - Wachstum von Funktionen

Kapitel 2: Grundlagen (Mengen)

- Einführung in die Mengentheorie:
  - Eine Menge ist eine Struktur, die eine ungeordnete Sammlung von null oder mehreren unterscheidbaren Objekten (Elementen) beinhaltet.
  - Die Mengentheorie behandelt Operationen auf Mengen, Beziehungen zwischen und Aussagen über diesen.
  - Sämtliche Inhalte der Mathematik können mittels mengentheoretischer Aussagen definiert werden.
  - Mengen sind allgegenwärtig in jeglicher Art von Softwaresystemen.

Kapitel 2: Grundlagen (Mengen)

- Jede Ansammlung oder Klasse von Objekten, die wir beschreiben können, stellt eine Menge dar.
- Die Elemente einer Menge können selbst Mengen sein.
- Mengen, die sich selbst als Element enthalten (oder als Element eines Elements etc.), müssen sorgfältig behandelt werden:
  - Sei M die Menge aller Mengen, die sich nicht selbst enthalten. Dann ist M Element von M gdw. M kein Element von M ist!
- Die Lösung dieses Problems ist nicht trivial. Wir brauchen jedoch keine solche Mengen.

- Eine Menge kann extensional oder intensional beschrieben werden:
  - Extensionale Beschreibung: Explizite Aufzählung der Elemente der Menge. Möglich nur für endliche Mengen.

    Notation: $\{a, b, c\}$ ist die Menge, die aus den 3 Objekten a, b, c besteht.
  - Intensionale Beschreibung: Die Menge wird beschrieben durch diejenigen Elemente einer anderen Menge, die eine Eigenschaft P erfüllen.

    Notation: wenn D die Menge aller Deutschen ist, und $M(x)$ bezeichnet, dass x in München lebt, dann beschreibt $\{d \in D \mid M(d)\}$ die Menge aller Münchener.

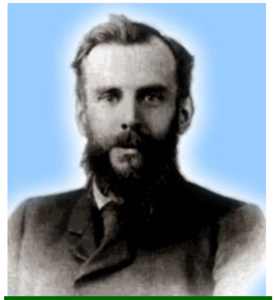
- Eigenschaften von Mengen:
  - Mengen sind inhärent ungeordnet (die Reihenfolge der Elemente ist unerheblich):
    - Unabhängig davon, was a, b, und c darstellen, $\{a, b, c\} = \{a, c, b\} = \{b, a, c\} = \{b, c, a\} = \{c, a, b\} = \{c, b, a\}$.
  - Alle Elemente einer Menge sind unterschiedlich; mehrfache Auflistung macht keinen Unterschied.
    - Wenn $a = b$, dann gilt: $\{a, b, c\} = \{a, c\} = \{b, c\} = \{a, a, b, a, b, c, c, c, c\}$.
    - Diese Menge enthält (höchstens) 2 Elemente.
  - Zwei Mengen sind genau dann gleich, wenn sie exakt die gleichen Elemente beinhalten.

- Unterschied zwischen Mengen und geordneten n-Tupeln:
  - Ein *n*-Tupel bezeichnet eine geordnete Zusammenstellung von Objekten; im Gegensatz zu Mengen, deren Elemente keine festgelegte Reihenfolge haben.
  - Ein geordnetes *n*-Tupel (eine Sequenz oder Liste) der Länge *n* wird geschrieben als $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.
  - Beachte, dass $(1, 2) \neq (2, 1) \neq (2, 1, 1)$.

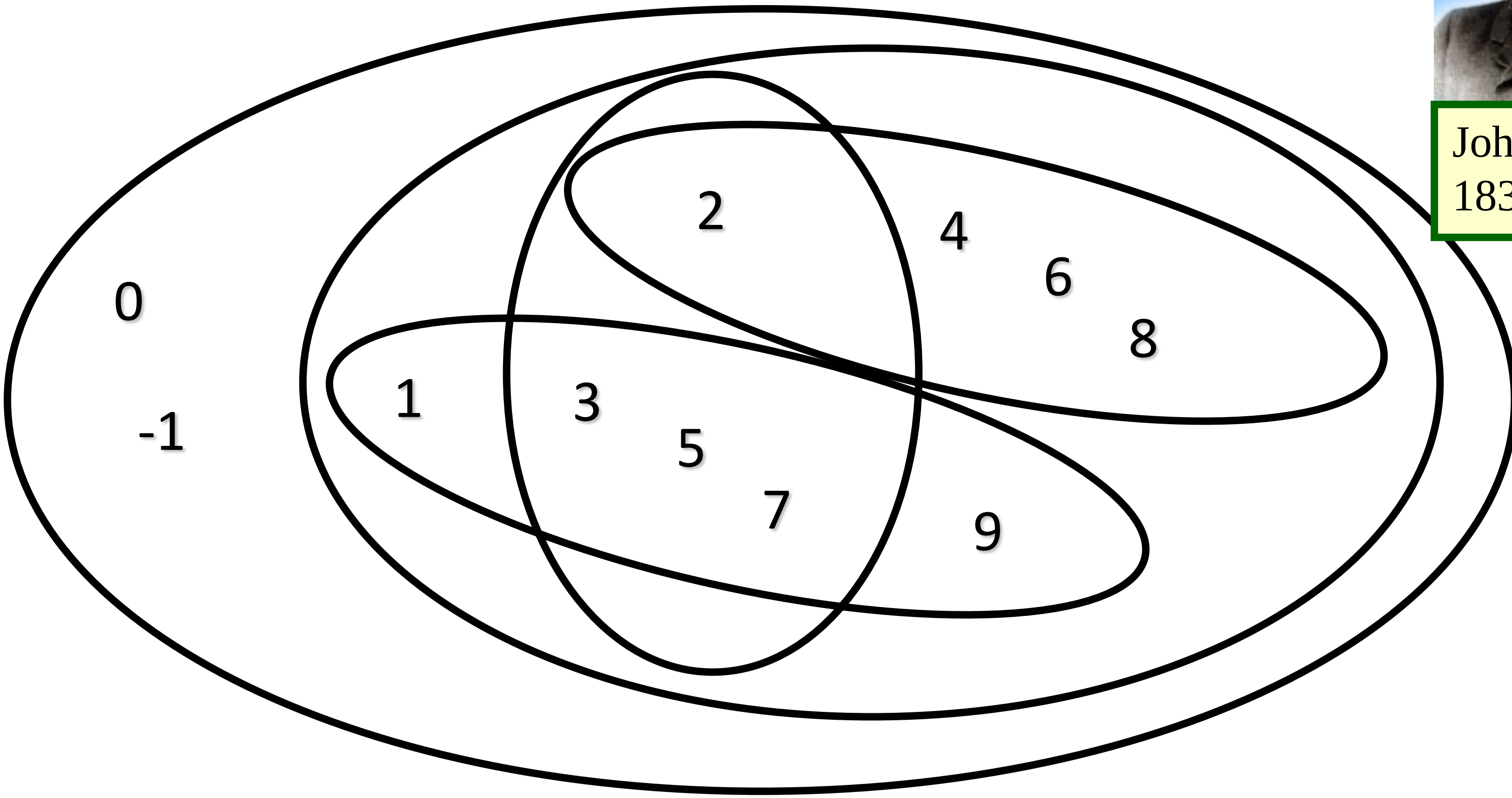
Kapitel 2: Grundlagen (Mengen)

Venn-Diagramm zur grafischen

Veranschaulichung der Mengenlehre:



John Venn
1834-1923



- Spezielle Mengen:

  $\mathbb{N} = \{1,2,\dots\}$,

  $\mathbb{N}_0 = \{0,1,2,\dots\}$,

  $\mathbb{Z} =$ Menge der ganzen Zahlen,

  $\mathbb{Q} =$ Menge der Brüche (rationale Zahlen),

  $\mathbb{R} =$ Menge der reellen Zahlen,

  $\mathbb{C} =$ Menge der komplexen Zahlen,

  $\mathbb{Z}_n = \{0,1,\dots,n-1\}$ Menge der Reste bei Division durch n,

  $[n] = \{1,2,\dots,n\}$.

- Bezeichnungen – Element von:
  - $x \in A$ bezeichnet, dass x Element von A ist.
  - $x \notin A$ bezeichnet, dass x kein Element von A ist.
  - Zwei Mengen A, B sind genau dann gleich, geschrieben $A = B$, wenn sie dieselben Elemente enthalten.

    D.h., A und B sind gleich wenn für alle Elemente x gilt:

$$x \in A \quad \text{gdw.} \quad x \in B.$$

- Weitere Bezeichnungen:

  $B \subseteq A$: B ist Teilmenge von A: jedes Element von B ist auch Element von A.

  $B = A$: $B \subseteq A$ und $A \subseteq B$;

  $B \nsubseteq A$: $B \subseteq A$ gilt nicht;

  $B \subset A$: $B \subseteq A$ und $B \neq A$.

- Die leere Menge:
  - ∅ („die leere Menge“) ist die Menge, die keine Elemente enthält.
  - Die leere Menge ist in jeder Menge als Teilmenge enthalten.

- Mengen und Elemente:
  - Die Elemente einer Menge können selbst wieder Mengen sein.
    - Beispiel:
      Sei $S = \{X \mid X \subseteq \{1,2,3\}\}$;
      dann ist $S =$
      $\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$.
  - Beachte, dass $1 \neq \{1\} \neq \{\{1\}\}$!

- Mengenoperationen – Kardinalität u. Endlichkeit:
  - $|A|$ („die Kardinalität von A“) ist ein Maß dafür, wie viele unterschiedliche Elemente eine Menge A hat.
  - z.B. $|\emptyset| = 0,$

    $|\{1,2,3\}| = 3,$

    $|\{a, b\}| = 2,$

    $|\{\{1,2,3\}, \{4,5\}\}| = 2.$

- Mengenoperationen – Kardinalität u. Endlichkeit:
  - Wenn $|A| \in \mathbb{N}_0$, dann ist A endlich. Andernfalls ist A unendlich.
  - Beachte (Erklärung siehe später):

    Unendliche Mengen können unterschiedlich „groß“ sein!

- Mengenoperationen – die Potenzmenge:
  - Definition:

    $P(M) := 2^M := \{X \mid X \subseteq M\}$

    ist die Potenzmenge der Menge M.

  - $P(\emptyset)$ enthält als Element genau $\emptyset$,

    also $P(\emptyset) = \{\emptyset\} \; (\neq \emptyset)$.

- Mengenoperationen – die Potenzmenge:

  Beispiel:

  Für $M = \{a, b, c, d\}$ ist

  $$P(M) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \\ \{a,b\}, \{a,c\}, \{a,d\}, \{b,c\}, \{b,d\}, \{c,d\}, \\ \{a,b,c\}, \{a,b,d\}, \{a,c,d\}, \{b,c,d\}, \\ \{a,b,c,d\}\}.$$

- Mengenoperationen – die Potenzmenge:
  - Es gilt: die Potenzmenge einer n-elementigen Menge enthält genau 2^n Elemente.

    Argument, warum das so ist:

    Sei $M = \{a_1, \dots, a_n\}$.

    Um eine Menge $L \in P(M)$ festzulegen, haben wir für jedes $i \in [n]$ die Wahl, a_i zu L hinzuzufügen oder nicht. Damit ergeben sich 2^n verschiedene Möglichkeiten.

    Diese Möglichkeiten entsprechen genau den Elementen von $P(M)$.
  - Später in der Vorlesung werden wir einen detaillierteren Beweis sehen.

- Mengenoperationen – das kartesische Produkt:
  - Das kartesische Produkt zweier Mengen A, B ist die Menge
    $A \times B := \{(a, b) \mid a \in A \text{ und } b \in B\}$;
    d.h., eine Menge, deren Elemente 2-Tupel sind.
  - z.B. $\{a, b\} \times \{1,2\} = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2)\}$.
  - Für endliche Mengen A, B gilt: $|A \times B| = |A| \cdot |B|$.

- Mengenoperationen – das kartesische Produkt:
  - Das kartesische Produkt ist nicht kommutativ:
    $\{a\} \times \{b\} = \{(a,b)\} \neq \{(b,a)\} = \{b\} \times \{a\}$.
  - Das kartesische Produkt ist nicht assoziativ:
    $$\begin{aligned}(\{a\} \times \{b\}) \times \{c\} &= \{((a,b),c)\} \\ &\neq \{(a,(b,c))\} \\ &= \{a\} \times (\{b\} \times \{c\})\end{aligned}$$
  - Das kartesische Produkt lässt sich auf n Mengen erweitern:
    $A_1 \times \cdots \times A_n := \{(a_1, \dots, a_n) | a_1 \in A_1, \dots, a_n \in A_n\}$

- Mengenoperationen – das kartesische Produkt:
  - Das kartesische Produkt $A \times \cdots \times A$ mit n „Kopien" von A wird mit A^n bezeichnet.
  - Konvention: $A^0 = \{\varepsilon\}$ mit dem leeren Wort ε.
  - Die Menge $\bigcup_{n=0}^{\infty} A^n$ wird mit A^* bezeichnet.
  - Manchmal wird A Alphabet genannt . Ein Element von A^* nennt man dann ein Wort. Statt $(a_1, \dots, a_n)$ wird $a_1 a_2 \dots a_n$ geschrieben.
  - Die Konkatenation von zwei Wörtern $a_1 \dots a_n$ und $b_1 \dots b_m$ ist das Wort $a_1 \dots a_n b_1 \dots b_m$.

- Weitere Mengenoperationen:

  $A \cup B$: Vereinigung: $\{x \mid x \in A \text{ oder } x \in B\}$.

  $A \cap B$: Schnittmenge: $\{x \mid x \in A \text{ und } x \in B\}$.

  – Daraus folgt: $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

  $A \setminus B$: Differenzmenge: $\{x \mid x \in A \text{ und } x \notin B\}$.

  Oft werden nur Teilmengen einer Menge U (die Grundmenge, Domain oder Universum) betrachtet. Dann:

  $\bar{A}$: Komplementmenge: $\{x \mid x \in U \text{ und } x \notin A\}$.

- Lemma: Für beliebige Mengen A, B und C gelten die folgenden Identitäten:

  $A \cup A = A \cap A = A$ (Idempotenz),

  $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$ (Kommutativität),

  $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$,

  $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (Assoziativität),

  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (Distributivität),

  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$,

  $A \cup \emptyset = A$, $A \cap \emptyset = \emptyset$.

- Aufgabe: Welche von den folgenden Identitäten gelten?
  1. $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$,
  2. $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$,
  3. $A \setminus (B \setminus C) = A \setminus (C \setminus B)$,
  4. $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$,
  5. $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cup C)$.

- Weitere Mengenoperationen:
  - Symmetrische Differenz:

    $$A \, \Delta \, B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

  - Disjunkte Vereinigung:

    $$A \uplus B.$$

    Dabei seien beide Mengen disjunkt, d.h.

    $$A \cap B = \emptyset.$$

- Eine Partition einer Menge *A* ist eine Zerlegung von *A* in paarweise disjunkte, nichtleere Teilmengen $A_1, \ldots, A_n$, sodass gilt:

  $$A = A_1 \uplus A_2 \uplus \cdots \uplus A_n.$$

- Weitere Mengenoperationen

$\bigcup_{i=1}^{n} A_i$: Vereinigung der Mengen $A_1, \dots A_n$,

$\bigcap_{i=1}^{n} A_i$: Schnitt der Mengen $A_1, \dots A_n$,

- Frage:

  Wie lassen sich die Mengen $\overline{A \cap B}$ bzw. $\overline{A \cup B}$ mit $\cup, \cap, \bar{A}, \bar{B}$ darstellen?

- Frage:

  Wie lassen sich die Mengen $\overline{A \cap B}$ bzw. $\overline{A \cup B}$ mit $\cup, \cap, \bar{A}, \bar{B}$ darstellen?

- Antwort:

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$
$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

- Darstellungen:
  - Häufig werden wir eine diskrete Struktur, z.B. eine Zahl, durch eine andere diskrete Struktur eines anderen Typs repräsentieren.
  - Z.B. können wir die natürlichen Zahlen als Mengen oder sog. Bit-Strings darstellen:
    - Mengen: **0**:=∅, **1**:={**0**}, **2**:={**0**,**1**}, **3**:={**0**,**1**,**2**}, …
    - Bit-Strings (Zeichenketten bestehend aus 0en und 1en):
      0:=0, **1**:=1, **2**:=10, **3**:=11, **4**:=100, …
  - Im weiteren Verlauf der Vorlesung werden wir konkrete Anwendungen solcher Repräsentationen kennenlernen.

Praktische Anwendungen in der Informatik:

- Beschreibung von Koalitionen und Machtverhältnissen in Gremien
- Fuzzy-Mengen, Fuzzy-Steuerung
- Darstellung zulässiger Wertebereiche
- Menge {0,1} beschreibt Zustandsraum eines Bit.