WS 2014/15

Diskrete Strukturen

Kapitel 2: Grundlagen (Wachstum)

Hans-Joachim Bungartz

Lehrstuhl für wissenschaftliches Rechnen
Fakultät für Informatik
Technische Universität München

http://www5.in.tum.de/wiki/index.php/Diskrete_Strukturen_-_Winter_14

Kapitel 2: Grundlagen (Wachstum)

- Mathematische und notationelle Grundlagen
  - Mengen
  - Relationen und Abbildungen
  - Aussagen- und Prädikatenlogik
  - Beweismethoden
  - Wachstum von Funktionen

Kapitel 2: Grundlagen (Wachstum)

- Programme brauchen mehr Ressourcen (Zeit, Speicher, …), je größer ihre Eingabe.
- Die Laufzeit (Speicherverbrauch) wird durch eine Funktion $f(x)$ dargestellt:

  $f(x)$ = maximale Laufzeit über alle Eingaben der Größe x.

- Wir sind an einer Abschätzung des Wachstums von $f(x)$ interessiert:
  - Wenn $f(x)$ schneller wächst als $g(x)$, dann wird $f(x)$ immer irgendwann größer als $g(x)$ werden (für ausreichend große Werte von x).

Kapitel 2: Grundlagen (Wachstum)

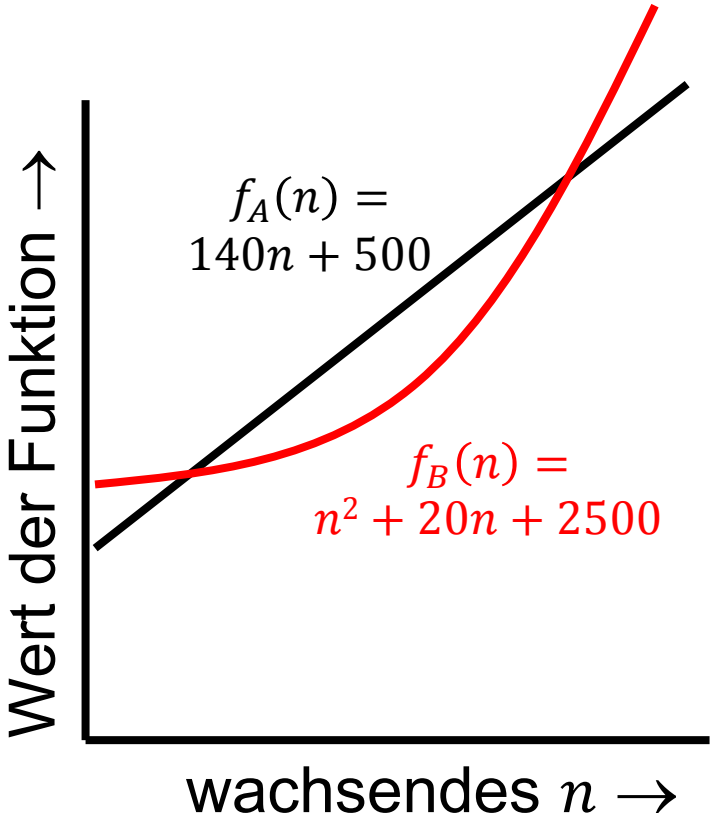
- Beispiel:
  - Eine Web-Seite soll entwickelt werden, die Benutzerdaten bearbeitet.
  - Programm A benötigt $f_A(n) = 140n + 500$ Mikrosekunden, um n Einträge zu bearbeiten.
  - Programm B benötigt $f_B(n) = n^2 + 20n + 2500$ Mikrosekunden für n Einträge.

  Welches Programm soll verwendet werden?

- Eine kleine Berechnung zeigt:

Für $20 \leq n \leq 100$ ist

$$n^2 + 20n + 2500 \leq 140n + 500$$



Kapitel 2: Grundlagen (Wachstum)

- Die multiplikativen Konstanten $140, 1, 20$ und die additiven Konstanten $500, 2500$ sind meistens schwer zu bestimmen (und abhängig von Einzelheiten der Implementierung).
- Oft ist nur bekannt:
  - Programm A braucht $an + b$ Mikrosekunden,
  - Programm B braucht $cn^2 + dn + e$ Mikrosekunden

  mit nicht allzu großen Konstanten a, b, c, d, e.
- Wichtig ist nun: Unabhängig von den Werten von $a, \ldots, e$ gibt es immer eine Zahl n_0, sodass ab n_0 Daten das Programm A schneller ist als B.

Kapitel 2: Grundlagen (Wachstum)

- Wir sagen, dass $f_A(n)$ langsamer als $f_B(n)$ wächst, falls ab einem gewissen Punkt $f_A(n)$ stets unter $f_B(n)$ liegt.
- Wir führen die Groß-O-Notation ein, um diesen Sachverhalt zu formalisieren. Diese wurde von Paul Bachmann (1837–1920) entwickelt, von Edmund Landau (1877–1938) verbreitet, und von D. E. Knuth in der Algorithmenanalyse eingeführt.
- Das „O“ wird auch Landau Symbol genannt.
- Informell ist $O(f)$ die Menge der Funktionen, die langsamer oder so schnell wie f wachsen.

Kapitel 2: Grundlagen (Wachstum)

- Definition (Groß-O-Notation):
  Es sei $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$.

  $f(n) \in O(g(n))$ gilt genau dann, wenn $\exists c \in \mathbb{R}^+ : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 :$
  $|f(n)| \leq c \cdot g(n)$.

  „f wächst (bis auf einen konstanten Faktor) höchstens so schnell wie g“

Kapitel 2: Grundlagen (Wachstum)

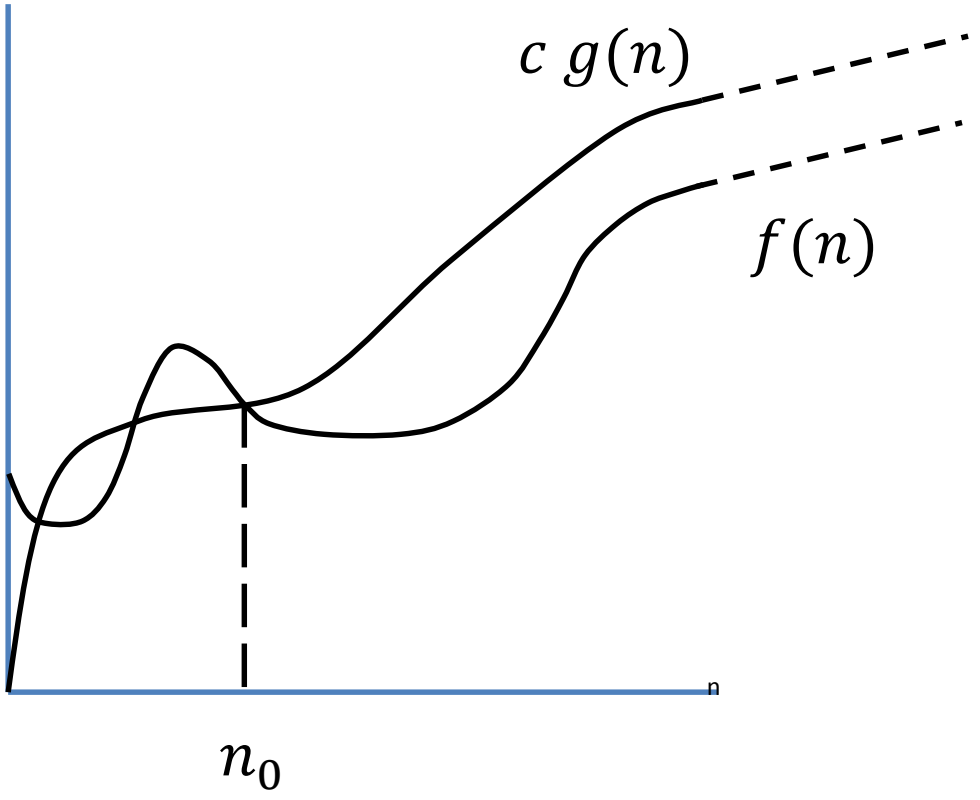
- Warum $|f(n)| \leq c \cdot g(n)$ statt $|f(n)| \leq g(n)$?
- Nehmen wir an, dass
  - $f(n) = an + b$ und
  - $g(n) = cn + d$

  für Konstanten a, b, c, d.
- Wir wollen f und g als Funktionen betrachten, die genau so schnell wachsen.
- Mit der Definition auf der vorigen Folie gilt $f \in O(g)$ und $g \in O(f)$.

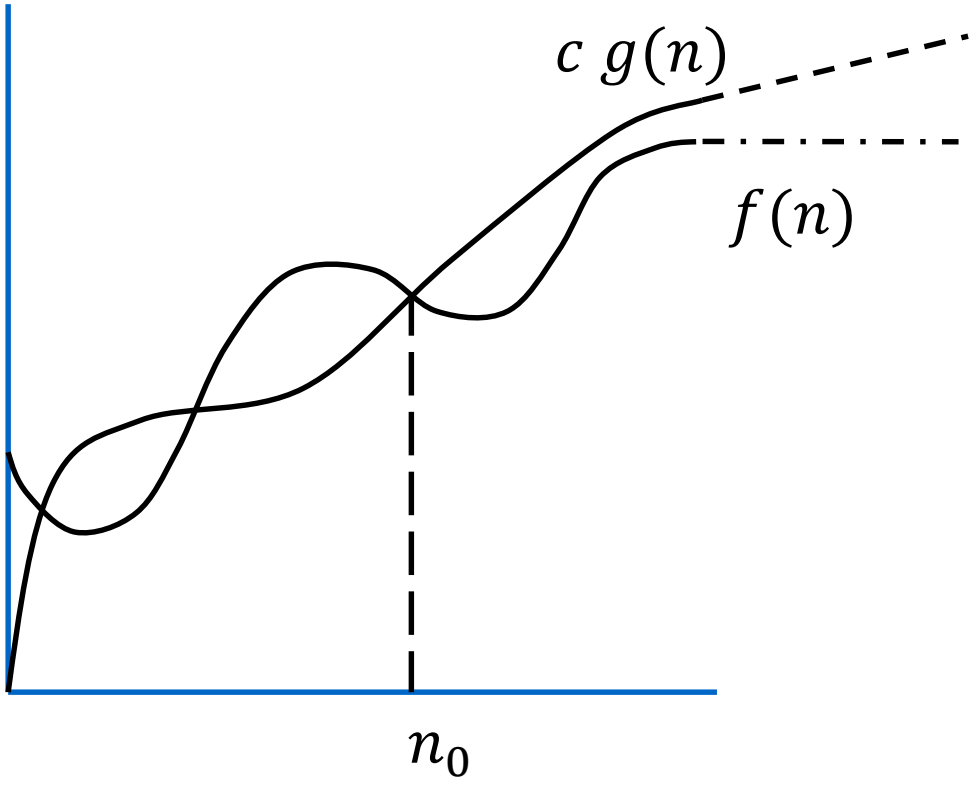
Kapitel 2: Grundlagen (Wachstum)

- Beachte:
  - $O(g)$ ist eine Menge von Funktionen.
  - Statt $f \in O(g)$ sagt man auch: „f ist höchstens von der Ordnung g“ oder „f ist $O(g)$“ oder (unsauber) „$f = O(g)$“.
  - Meistens werden nur Funktionen $\mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}^+$ betrachtet (oder $\mathbb{N} \to \mathbb{N}_0$), dann ist der Absolutbetrag überflüssig.
  - Manchmal werden auch Funktionen von $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ betrachtet.

- Veranschaulichung der Groß-O-Notation:



- Veranschaulichung der Groß-O-Notation:



- Definition (Klein-o-Notation):

$f(n) \in o(g(n))$ genau dann, wenn $\forall c \in \mathbb{R}^+ : \exists\, n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 :$

$$|f(n)| < c \cdot g(n).$$

„f wächst echt langsamer als g."

Kapitel 2: Grundlagen (Wachstum)

- Definition (Groß-Omega-Notation):

$f(n) \in \Omega(g(n))$ genau dann, wenn $\exists c \in \mathbb{R}^+$: $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$: $\forall n \geq n_0$:

$$|f(n)| \geq c \cdot g(n) \geq 0.$$

„g wächst (bis auf einen konstanten Faktor) höchstens so schnell wie f."

Kapitel 2: Grundlagen (Wachstum)

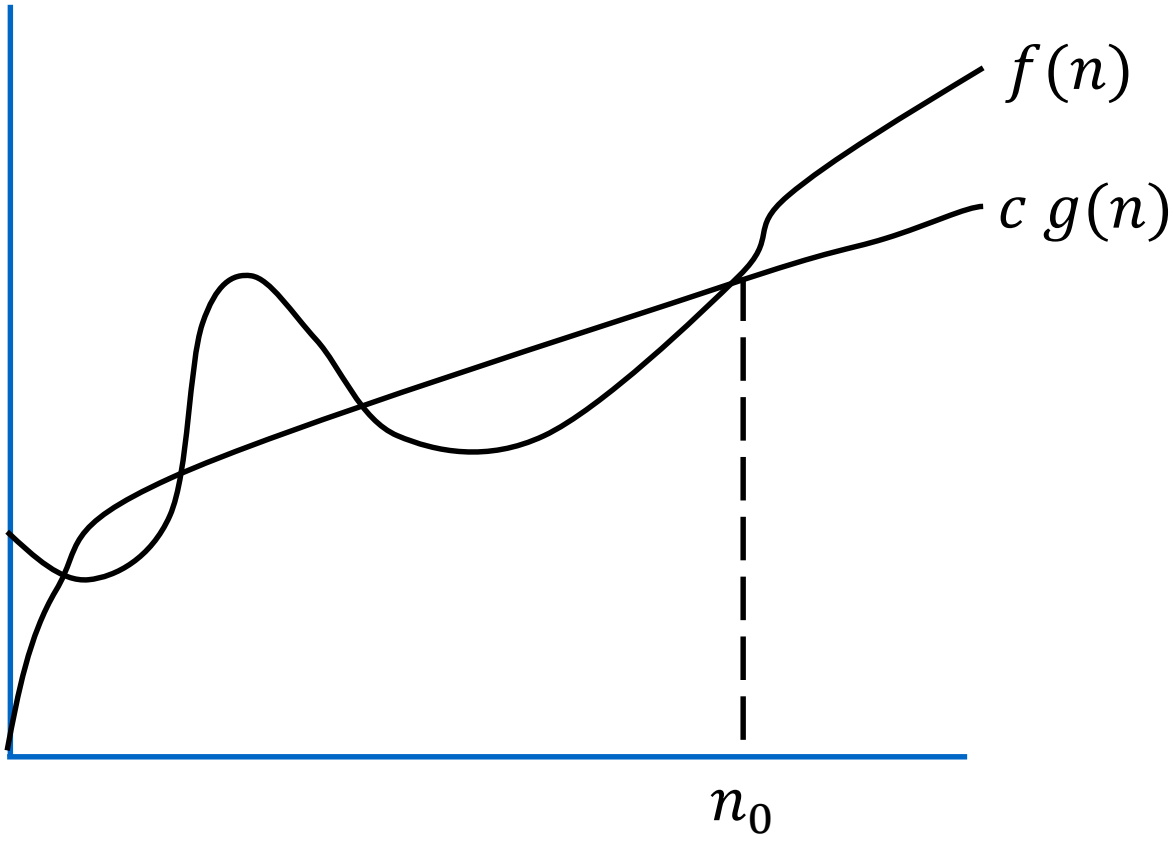
- Definition (Klein-Omega-Notation):

$f(n) \in \omega(g(n))$ genau dann, wenn $\forall c \in \mathbb{R}^+: \exists\, n_0 \in \mathbb{N}: \forall n \geq n_0:$

$$|f(n)| > c \cdot g(n) \geq 0.$$

„f wächst echt schneller als g."

- Veranschaulichung der Klein-Omega-Notation:



Kapitel 2: Grundlagen (Wachstum)

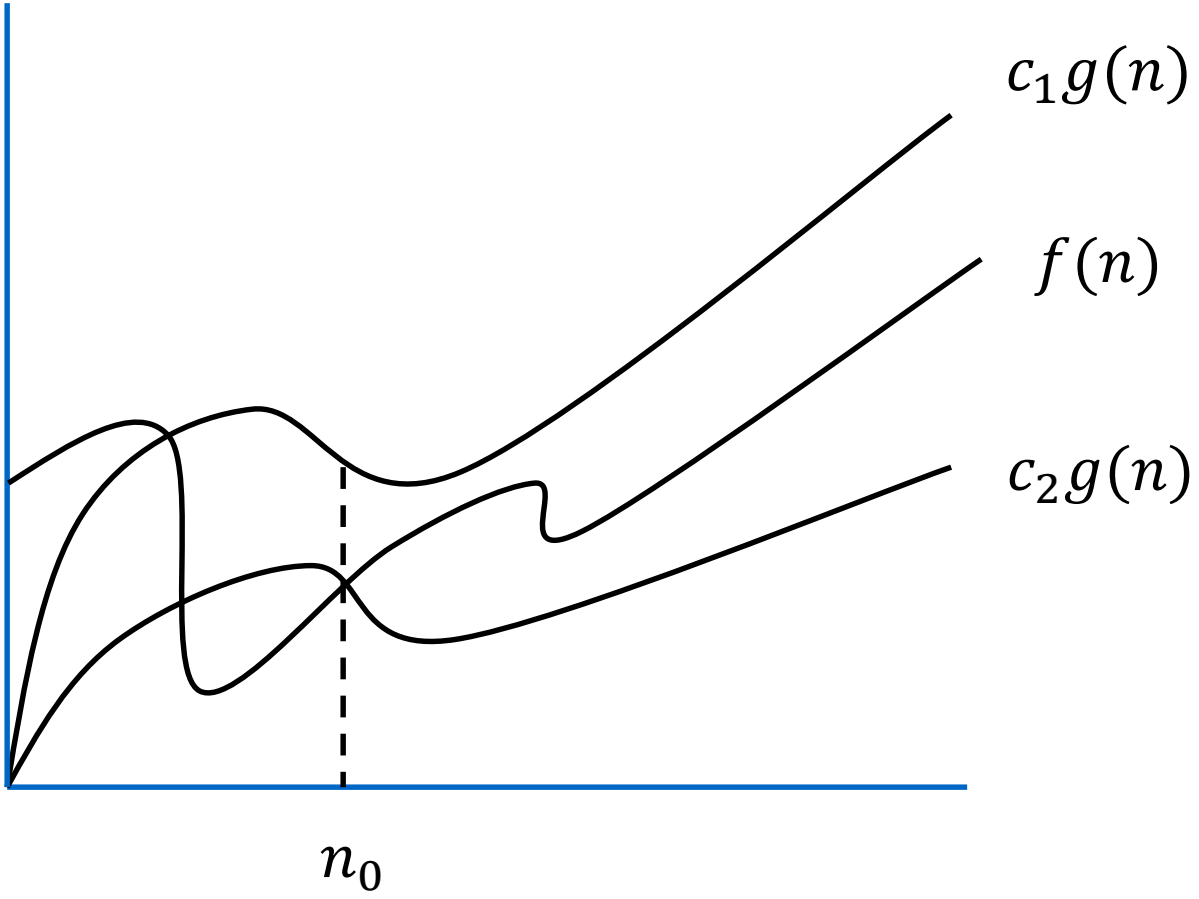
- Definition (Groß-Theta-Notation):

$f(n) \in \Theta(g(n))$ genau dann, wenn

$f(n) \in O(g(n))$ und $g(n) \in O(|f(n)|)$.

„f wächst bis auf konstante Faktoren genau so schnell wie g.“

- Veranschaulichung der Groß-Θ-Notation:



- Beispiel:

  Zeige, dass $f(n) = 30n + 8 \in O(n)$.

  Wir müssen also zeigen:

  $$\exists c \in \mathbb{R}^+ \colon \exists n_0 \in \mathbb{N} \colon \forall n \geq n_0 \colon 30n + 8 \leq cn$$

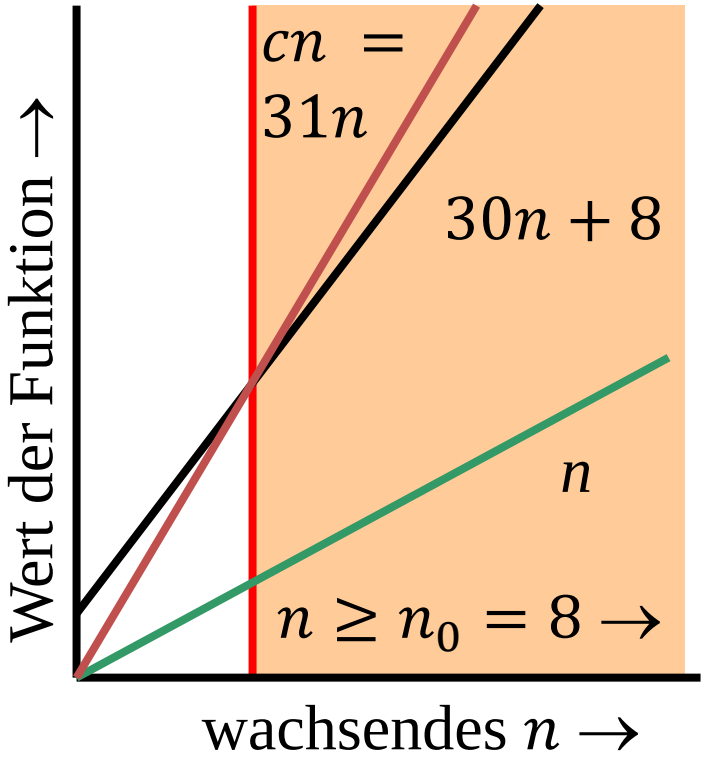
  Nehme:

  $$c = 31 \ , \quad n_0 = 8.$$

  Daraus folgt für alle $n \geq n_0$:

  $$cn = 31n = 30n + n \geq 30n + 8.$$

- Beachte, dass $30n + 8$ nicht überall kleiner als $31n$ ist.
- Aber es ist kleiner als $31n$ für $n \geq 8$.



- Beispiel:

  Zeige, dass $f(n) = n^2 + 1 \in O(n^2)$.

  Wir müssen zeigen:

  $$\exists c \in \mathbb{R}^+ : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : n^2 + 1 \leq cn^2.$$

  Nehme:

  $$c = 2, \quad n_0 = 1.$$

  Daraus folgt für alle $n \geq n_0$:

  $$cn^2 = 2n^2 = n^2 + n^2 \geq n^2 + 1.$$

Theorem:

Für Polynome $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ gilt $f(x) \in O(x^n)$.

Beweis:

$$\forall x \geq 1: |f(x)| = \left|\sum_{i=0}^{n} a_i x^i\right| \leq \sum_{i=0}^{n} |a_i|\, x^i$$

$$= x^n \left(\sum_{i=0}^{n} |a_i|\, x^{i-n}\right) \leq x^n \sum_{i=0}^{n} |a_i| =: x^n\, c\,.$$

Kapitel 2: Grundlagen (Wachstum)

- Eine Funktion ist $O(g)$, wenn Konstanten c und n_0 existieren, die die Bedingung erfüllen.
- Aber, die speziellen Werte von c und n_0, die die Bedingung erfüllen, sind nicht eindeutig: Jeder Wert größer als c und/oder n_0 erfüllt die Bedingung auch.
- In der Regel sind wir jedoch nicht daran interessiert, die kleinsten Werte von c und n_0 zu finden.

Kapitel 2: Grundlagen (Wachstum)

- Bemerkungen zur O-Notation:
  - $O(\cdot)$, als Relation gesehen, ist transitiv:
    $f \in O(g) \wedge g \in O(h) \rightarrow f \in O(h)$.
  - Wenn $g \in O(f)$ und $h \in O(f)$, dann ist $g + h \in O(f)$.
  - Für alle $c > 0$ und $\lim_{n\to\infty} f(n) = \infty$:
    $$O(cf) = O(f + c) = O(f - c) = O(f).$$
  - Wenn $f_1 \in O(g_1)$ und $f_2 \in O(g_2)$, dann
    $f_1 \cdot f_2 \in O(g_1 \cdot g_2)$ und
    $f_1 + f_2 \in O(g_1 + g_2) = O(\max(g_1, g_2))$
    $= O(g_1)$, wenn $g_2 \in O(g_1)$.

- Behauptung:

$$n! \in O(n^n).$$

- Beweis:

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}: n! &= n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 \\ &\leq n \cdot n \cdot \ldots \cdot n \\ &= n^n. \quad \square \end{aligned}$$

Kapitel 2: Grundlagen (Wachstum)

- Behauptung:

  $2^n \in o(2^{2n})$.

- Beweis:

  Z. z: $\forall c \in \mathbb{R}^+ : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : 2^n < c \cdot 2^{2n}$.

  Sei $c > 0$ beliebig. Wähle $n_0 = \lceil 1 + \log\left(\frac{1}{c}\right) \rceil$.

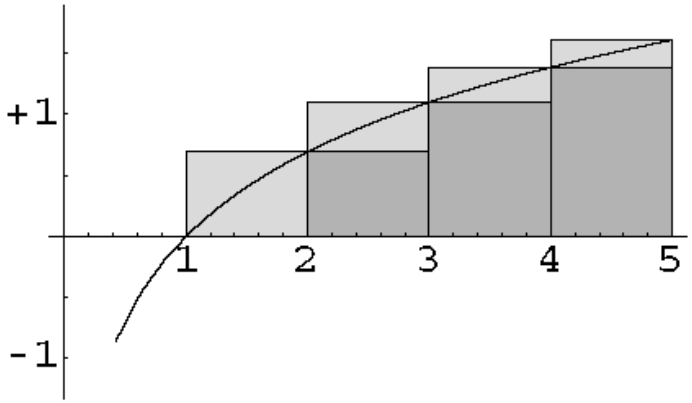
  Sei nun $n \geq n_0$ beliebig:

  $c\ 2^{2n} = c\ 2^n\ 2^n \geq c\ 2^{n_0} 2^n \geq c\ 2\ (1/c)\ 2^n > 2^n$.

- Theorem: $n! \in \Omega\left(\left(\frac{n}{e}\right)^n\right)$ und $n! \in O\left(n \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n\right)$.

  Beweis:

$$\forall n > 0: \sum_{k=1}^{n-1} \ln k < \int_1^n \ln x \, dx < \sum_{k=2}^{n} \ln k < \int_1^{n+1} \ln x \, dx \; .$$



Beweis (Fortsetzung):

Es gilt:

$$\int_1^n \ln x \, dx = (x \ln x - x)\Big|_1^n = n \ln n - n + 1;$$

$$\int_1^{n+1} \ln x \, dx = (n+1) \cdot \ln(n+1) - n.$$

Beweis (Fortsetzung) :

Also:

$$\forall n \in \mathbb{N}\colon\ n \ln n\ - n + 1 < \ln n! < (n+1)\ln(n+1) - n$$

und damit

$$\frac{n^n}{e^{n-1}} \leq n! \leq \frac{(n+1)^{n+1}}{e^n}$$

oder

$$e \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n \leq n! \leq (n+1) \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n \leq (n+1) \cdot e \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n .$$

Kapitel 2: Grundlagen (Wachstum)

- Auch außerhalb der Analyse des Wachstumsverhaltens von Funktionen wird die O-Notation verwendet:
  - Z.B. zur Abschätzung von Termen, die nicht besonders wichtig sind.
  - Wenn „$O(g)$“ als Term in einem arithmetischen Ausdruck verwendet wird, bedeutet dies: „eine Funktion f aus der Menge $O(g)$“.
  - $f + O(g) := \{\ f' \mid \exists f'' \in O(g)\colon f' = f + f''\ \}$.

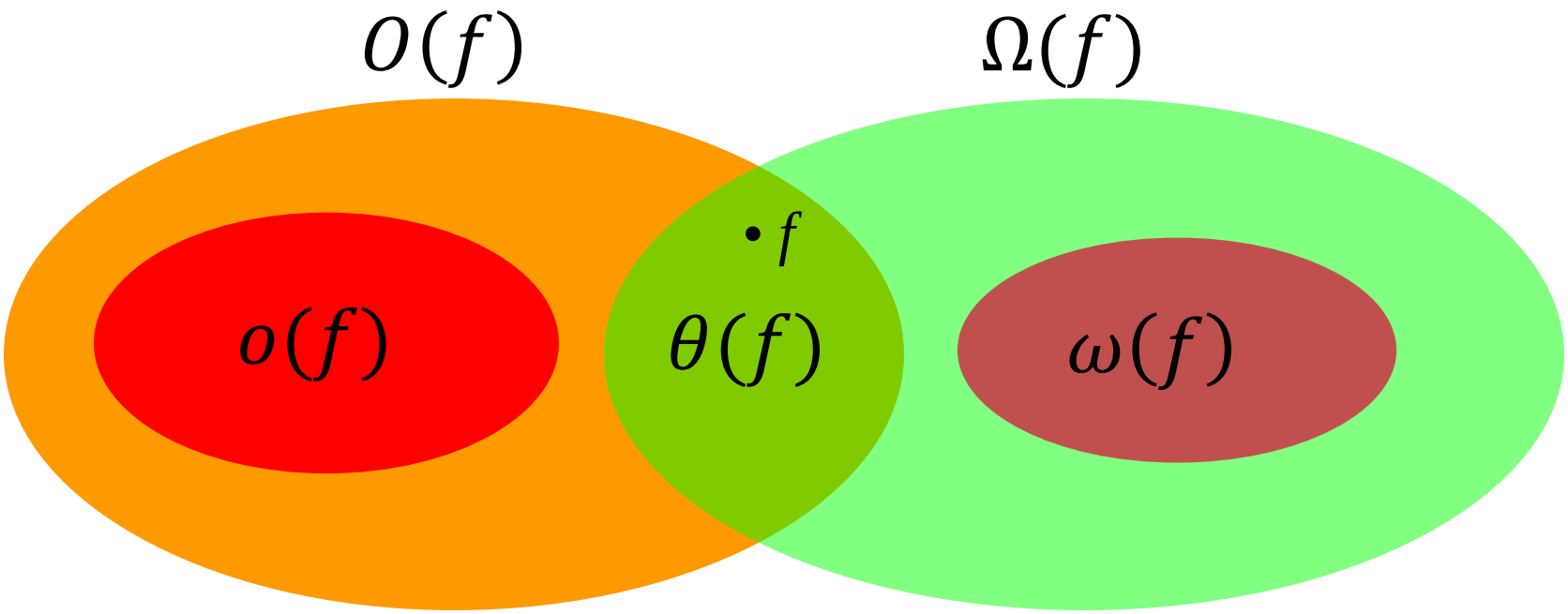
Kapitel 2: Grundlagen (Wachstum)

- Beispiel (Formel zur Annäherung für die Fakultät):

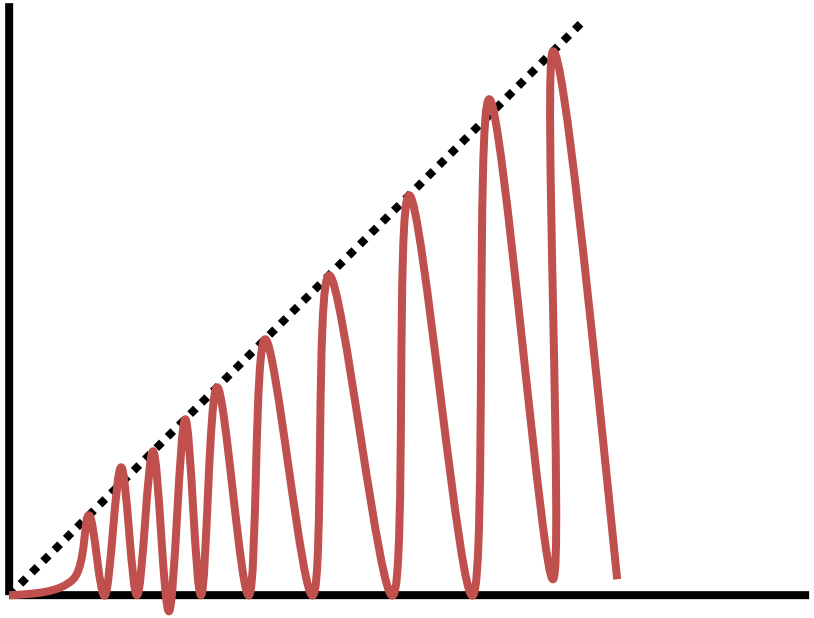
$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\left(1+\frac{1}{12n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right).$$

- Der letzte Term ist für alle $n > n_0$ kleiner oder gleich $c \cdot 1/n^2$.
- Da $1/n^2$ für große n gegen 0 geht, wird der Fehler der Annäherung kleiner, je größer n wird.

- Relationen zwischen Wachstumsrelationen:



- Eine Funktion, die $O(n)$, aber weder $o(n)$ noch $\Theta(n)$ ist:



- Beziehung zwischen Wachstum und Grenzwerten:

  Wenn die Grenzwerte existieren, dann:

$$f \in O(g) \leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{|f(n)|}{g(n)} < \infty,$$

$$f \in o(g) \leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{|f(n)|}{g(n)} = 0\,,$$

$$f \in \Omega(g) \leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{g(n)}{|f(n)|} < \infty,$$

$$f \in \omega(g) \leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{g(n)}{|f(n)|} = 0.$$

- Strikte Ordnung von Funktionen:
  - Häufig schreibt man $f \prec g$ für $f \in o(|g|)$.
  - Für alle $k > 1$ gilt:

$$1 \prec \log_2 \log_2 n \prec \log_2 n \prec \log_2^k n \prec$$
$$\prec n^{\frac{1}{k}} \prec n \prec n \log_2 n \prec$$
$$\prec n^k \prec k^n \prec n! \prec n^n \prec \cdots$$

- Beispiele Wachstumsverhalten:

TABLE 2 The Computer Time Used by Algorithms.

Problem Size	*Bit Operations Used*					
n	$\log n$	n	$n \log n$	n^2	2^n	$n!$
10	3×10^{-9} s	10^{-8} s	3×10^{-8} s	10^{-7} s	10^{-6} s	3×10^{-3} s
10^2	7×10^{-9} s	10^{-7} s	7×10^{-7} s	10^{-5} s	4×10^{13} yr	*
10^3	1.0×10^{-8} s	10^{-6} s	1×10^{-5} s	10^{-3} s	*	*
10^4	1.3×10^{-8} s	10^{-5} s	1×10^{-4} s	10^{-1} s	*	*
10^5	1.7×10^{-8} s	10^{-4} s	2×10^{-3} s	10 s	*	*
10^6	2×10^{-8} s	10^{-3} s	2×10^{-2} s	17 min	*	*

Annahme: eine Operation dauert 10^{-9} Sekunden, $\log n = \log_2 n$.

- Hierarchie von Größenordnungen:

Größenordnung	Name
$\boldsymbol{O(1)}$	konstante Funktionen
$\boldsymbol{O(\log n)}$	logarithmische Funktionen
$\boldsymbol{O(\log^k n)}$	poly-logarithmische Funktionen
$\boldsymbol{O(n)}$	lineare Funktionen
$\boldsymbol{O(n \log n)}$	$n \log n$-wachsende Funktionen
$\boldsymbol{O(n^2)}$	quadratische Funktionen
$\boldsymbol{O(n^3)}$	kubische Funktionen
$\bigcup_{k \geq 1} \boldsymbol{O(n^k)}$	polynomielle Funktionen

Kapitel 2: Grundlagen (Wachstum)

Praktische Anwendungen in der Informatik:

- Abschätzung der benötigten Laufzeit (etwa bei Echtzeitanwendungen) oder des benötigten Speicheraufwands
- Maß für die Effizienz eines Algorithmus
- Klassifizierung von Algorithmen in Komplexitätsklassen (z.B. beim Sortieren)