WS 2014/15

Diskrete Strukturen

Kapitel 3: Kombinatorik (1)

Hans-Joachim Bungartz

Lehrstuhl für wissenschaftliches Rechnen
Fakultät für Informatik
Technische Universität München

http://www5.in.tum.de/wiki/index.php/Diskrete_Strukturen_-_Winter_14

Kapitel 3: Kombinatorik (1)

- Kombinatorische Strukturen und Algorithmen
  - Ziehen von Elementen aus einer Menge
  - Kombinatorische Beweisprinzipien
  - Fundamentale Zählkoeffizienten
  - Bälle und Urnen

Kapitel 3: Kombinatorik (1)

- Kombinatorik: In der Kombinatorik studieren wir Probleme folgender Art:
  - Gegeben ist eine Menge A.

    Es wird eine Menge B definiert, deren Elemente die Objekte sind, die aus Elementen von A konstruiert worden sind, und eine gewisse Eigenschaft erfüllen.
  - Frage: Wie viele Elemente enthält B?
- Modellierung: Schritte, die von der Formulierung des Problems auf Deutsch zu der präzisen Definition der Mengen A und B führen.

- Beispiel: Wie viele Lottoziehungen gibt es, in denen mindestens zwei Zahlen konsekutiv sind?
  - $A = \{1, \ldots, 49\}$,
  - $B = \{\ C \subseteq A \mid |C| = 6 \land \exists a, b \in C\colon\ b = a + 1\ \}$.
- Beispiel: In einem Wettkampf zwischen 100 Leuten, wie viele unterschiedliche Möglichkeiten für die ersten 10 gibt es?
  - $A = \{1, 2, \ldots, 100\}$,
  - $B = \{\ (b_1, \ldots, b_{10}) \in A^{10} \mid b_i \neq b_j\ \forall i, j \in [10]\ \}$.

- Beispiel: Ein Systemadministrator verwendet folgende Regel für die Vergabe von UserIds und Passwörtern:
  - Eine UserId enthält nur Ziffern und Buchstaben, hat Länge zwischen 6 und 32, und keine Ziffer darf vor einem Buchstaben kommen.
  - Ein Passwort enthält Ziffern, Buchstaben und Sonderzeichen (jeweils mindestens 1), und hat Länge zwischen 8 und 16. Die ersten drei Zeichen dürfen nicht mit den ersten drei Zeichen des UserIds identisch sein.
  - Frage: Wie viele Paare (UserId, Passwort) gibt es?

Kapitel 3: Kombinatorik (1)

- Kombinatorische Strukturen und Algorithmen
  - Ziehen von Elementen aus einer Menge
  - Kombinatorische Beweisprinzipien
  - Fundamentale Zählkoeffizienten
  - Bälle und Urnen

- Ziehen von Elementen aus einer Menge:
  - In vielen Fällen kann man sich vorstellen, dass die Elemente von B konstruiert werden, indem man Elemente aus A hintereinander „zieht“ und zusammensetzt.
  - Dabei kann jedes Element nach der Ziehung
    - zurückgelegt werden (damit kann das Element beliebig oft gezogen werden).
    - nicht zurückgelegt werden (damit kann das Element höchstens einmal gezogen werden).
  - Die Reihenfolge der Ziehungen kann
    - berücksichtigt werden (z.B. wenn eine Zahl bestimmt wird, in dem man Ziffern zieht).
    - ignoriert werden (z.B. Lottoziehung).

- Ziehen von Elementen aus einer Menge:
  - k Elemente, geordnet, mit Zurücklegen:
    - $B = A^k$
  - k Elemente, geordnet, ohne Zurücklegen:
    - B = Menge der Tupeln von A^k, deren Komponenten paarweise verschieden sind.
  - k Elemente, ungeordnet, mit Zurücklegen:
    - B = Menge aller k-elementigen Multimengen über A (Multimengen können ein Element mehrmals enthalten.)
  - k Elemente, ungeordnet, ohne Zurücklegen:
    - B = Menge aller k-elementigen Teilmengen von A.

- Ziehen von Elementen aus einer Menge:

  Beispiel: Die unterschiedlichen Möglichkeiten für das Ziehen von zwei Objekten aus einer dreielementigen Menge:

	geordnet	ungeordnet
mit Zurücklegen	$(1,1), (1,2), (1,3)$ $(2,1), (2,2), (2,3)$ $(3,1), (3,2), (3,3)$	$\{1,1\}, \{1,2\}, \{1,3\}$ $\{2,2\}, \{2,3\}, \{3,3\}$
ohne Zurücklegen	$(1,2), (1,3), (2,1)$ $(2,3), (3,1), (3,2)$	$\{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}$

- Ziehen mit Zurücklegen, geordnet:

  Wie viele Möglichkeiten gibt es, k Elemente aus einer n-elementigen Menge zu ziehen, wobei die gezogenen Elemente jeweils zurückgelegt werden und es auf die Reihenfolge der Elemente ankommen soll?

- Da es in jedem Zug n Möglichkeiten gibt, gibt es insgesamt

$$\underbrace{n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}_{k-\mathrm{mal}} = n^k$$

  Möglichkeiten.

- Ziehen ohne Zurücklegen, geordnet:

  Wie viele Möglichkeiten gibt es, k Elemente aus einer n-elementigen Menge zu ziehen, wobei die gezogenen Elemente nicht zurückgelegt werden und es auf die Reihenfolge der Elemente ankommen soll?

- Ziehen ohne Zurücklegen, geordnet:

  Da wir nicht zurücklegen, gibt es in jedem Zug eine Möglichkeit weniger als im Zug zuvor (mit n Möglichkeiten im ersten Zug). Die Anzahl der Möglichkeiten ist somit:

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-k+1) = \prod_{i=0}^{k-1} (n-i)$$

$$= \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Kapitel 3: Kombinatorik (1)

- Ziehen ohne Zurücklegen, geordnet:
  - Jede mögliche Ziehung ist eine Variation.
    - Eine Variation einer Menge A ist eine Sequenz von Elementen von A, in der jedes Element höchstens einmal vorkommt.
  - Eine Variation der Länge $|A|$ nennt man Permutation.
    - Eine Permutation einer Menge A ist eine Sequenz von Elementen von A, in der jedes Element genau einmal vorkommt.

- Der Ausdruck

$$\frac{n!}{(n-k)!}$$

wird fallende Faktorielle von n der Länge k genannt und wird mit

$$n^{\underline{k}}$$

bezeichnet. Es gilt
- Definition: $n^{\underline{0}} := 1$ und $0! := 1$
- Die fallende Faktorielle zählt die Anzahl von k-Variationen der n Elemente einer Menge.

- Beispiel:

  Angenommen, ein Vertreter muss 8 Städte besuchen, wobei er mit einer bestimmten Stadt beginnen muss, die Reihenfolge der anderen Städte jedoch beliebig ist.

  Frage:

  Auf wie viele unterschiedliche Möglichkeiten kann der Vertreter seine Reise durchführen?

- Lösung:

  Die Anzahl möglicher Wege ist bestimmt durch die Permutation von sieben Elementen, da das erste Element (Stadt) vorgegeben ist.

  Also gibt es $7! = 5040$ mögliche Reiserouten.

- Beispiel:

  Wie viele Möglichkeiten gibt es, die Buchstaben ABCDEFGH so anzuordnen, dass die Buchstabenfolge ABC enthalten ist?

- Lösung:

  Wir führen das Problem auf das Ziehen von 6 Elementen (ABC,D,E,F,G,H) ohne Zurücklegen aus einer 6-elementigen Menge zurück.
  Also gibt es $6! = 720$ Permutationen.

- Ziehen ohne Zurücklegen, ungeordnet:

  Wie viele Möglichkeiten gibt es, k Elemente aus einer n-elementigen Menge zu ziehen, wobei die gezogenen Elemente nicht zurückgelegt werden und es nicht auf die Reihenfolge der Elemente ankommen soll?
- Die Ziehung wird eindeutig durch die Untermenge der gezogenen Elemente bestimmt.
- Da wir k Elemente ziehen, sprechen wir in diesem Fall von k-Untermengen.

- Ziehen ohne Zurücklegen, ungeordnet:

  Wie viele k-Untermengen einer n-elementigen Menge gibt es?

  Beachte, dass die k-Variationen einer Menge aus den k-Untermengen erhalten werden, indem deren Elemente geordnet werden!

  – Beispiel:
    Aus $\{1,3,5\}$ erhalten wir sechs 3-Variationen:
    $(1,3,5), (1,5,3), (3,1,5), (3,5,1), (5,1,3), (5,3,1)$.

- Satz: Die Anzahl von k-Untermengen einer n-elementigen Menge ist

$$\binom{n}{k} = \frac{n^{\underline{k}}}{k!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

Die Ausdrücke

$$\binom{n}{k}$$

heißen Binomialkoeffizienten.

- Ziehen mit Zurücklegen, ungeordnet:

  Das Ergebnis des Ziehens mit Zurücklegen, ohne auf die Reihenfolge zu achten, wird durch sogenannte Multimengen beschrieben.

  – In Multimengen dürfen Elemente mehrmals vorkommen.

  – Beispiel: $M = \{a, b, b, c, d, e, e\}$ ist eine Multimenge über der Menge $\{a, b, c, d, e\}$ mit $|M| = 7$.

- Ziehen mit Zurücklegen, ungeordnet:

  Satz: Es gibt

$$\binom{n+k-1}{n-1}$$

  k-Multimengen (Multimengen mit k Elementen) aus einer Menge mit n Elementen.

- Beweis:

  Jede k-Multimenge aus einer Menge mit n Elementen kann als Liste bestehend aus $n-1$ Strichen „|“ und k Sternen „$\star$“ repräsentiert werden.

  – Beispiel: $\star\star\star|\star||\star\star\star\star||$.

  – Die Striche separieren n Listenbereiche, wobei der i-te Bereich genauso viele Sterne beinhaltet, wie das i-te Element in der Liste vorkommt.

- Beweis:

  Das Problem lässt sich somit auf das Ziehen von $n-1$ Strichen aus $n-1+k$ Elementen (ohne Zurücklegen!) zurückführen.

  Daraus folgt der Satz. $\square$

- Zusammenfassung:

	geordnet	ungeordnet
mit zurücklegen	n^k	$\binom{n+k-1}{n-1}$
ohne zurücklegen	$n^{\underline{k}}$	$\binom{n}{k}$

- Beispiel Lotto:
  Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, bei 6 aus 49 zu gewinnen?

- Beispiel Lotto:

  Zuerst beantworten wir die Frage, wie viele Möglichkeiten es gibt, 6 Zahlen aus 49 Zahlen zu ziehen, wobei die gezogenen Zahlen nicht wieder zurückgelegt werden.

- Antwort: Es gibt

$$M = \binom{49}{6} = \frac{49 \cdot 48 \cdot \ldots \cdot 44}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = 13.983.816$$

Möglichkeiten.

- Beispiel Lotto:

  Da alle Züge voneinander unabhängig sind, ist die Wahrscheinlichkeit p, die richtige Zahl zu tippen

$$p = \frac{1}{M} = 0{,}0000000715$$
$$= 0{,}00000715\%.$$

- Die Lottosensation am 29.6.1995:

  Stuttgart (dpa/lsw). Die Staatliche Toto-Lotto GmbH in Stuttgart hat eine Lottosensation gemeldet: Zum ersten Mal in der 40jährigen Geschichte des deutschen Zahlenlottos wurden zwei identische Gewinnreihen festgestellt. Am 21. Juni dieses Jahres [3016te Ausspielung] kam im Lotto am Mittwoch in der Ziehung A die Gewinnreihe 15-25-27-30-42-48 heraus. Genau die selben Zahlen wurden bei der 1628. Ausspielung im Samstagslotto schon einmal gezogen, nämlich am 20. Dezember 1986. Welch ein Lottozufall!

- Die Lottosensation am 29.6.1995:

  Wirklich eine Sensation?

  Es gibt $M = 13.983.816$ mögliche (Sechser)-Ziehungen.

  Wie viele Sequenzen von 3016 Ziehungen gibt es, und wie viele davon enthalten irgendeine Ziehung mindestens zweimal?

  Sei Z die Menge aller Ziehungen, $|Z| = M$.

  Wir ziehen nun 3016 Elemente aus Z, mit Zurücklegen, geordnet. Die Anzahl S der möglichen Sequenzen ist:

$$S = M^{3016}.$$

- Die Lottosensation am 29.6.1995:

  Wirklich eine Sensation?

  Wie viele von diesen Sequenzen enthalten eine Ziehung mindestens zweimal?

  Trick: wir berechnen die Anzahl der Sequenzen HE, in denen jede Ziehung höchstens einmal vorkommt, und subtrahieren sie von S.

- Die Lottosensation am 29.6.1995

Wirklich eine Sensation?

Für die Berechnung von HE ziehen wir 3016 Elemente aus Z, geordnet, aber ohne Zurücklegen. Wir erhalten:

$$HE = M^{\underline{3016}}.$$

- Die Lottosensation am 29.6.1995

  Wirklich eine Sensation?

  Unter der Annahme, dass alle Sequenzen genauso wahrscheinlich sind, haben wir für die Wahrscheinlichkeit p, nach 3016 Ziehungen mindestens eine Wiederholung gesehen zu haben:

$$p = \frac{S - HE}{S} = 1 - \frac{\underline{M^{3016}}}{M^{3016}} = 1 - \prod_{j=1}^{3016} \frac{M - (j-1)}{M}$$

- Die Lottosensation am 29.6.1995:

Wirklich eine Sensation?

Mit der Abschätzung $1 - x \leq e^{-x}$ erhalten wir

$$p = 1 - \prod_{j=1}^{3016} \frac{M-(j-1)}{M} = 1 - \prod_{j=1}^{3016} 1 - \frac{(j-1)}{M}$$

- Die Lottosensation am 29.6.1995:

  Wirklich eine Sensation?

  Mit der Abschätzung $1 - x \leq e^{-x}$ erhalten wir

$$p = 1 - \prod_{j=1}^{3016} \frac{M - (j-1)}{M} = 1 - \prod_{j=1}^{3016} 1 - \frac{(j-1)}{M}$$

$$\geq 1 - \prod_{j=1}^{3016} e^{-\frac{j-1}{M}} = 1 - e^{-\frac{1}{M}\sum_{j=1}^{3016} j}$$

- Die Lottosensation am 29.6.1995:

  Wirklich eine Sensation?

  Mit der Abschätzung $1 - x \leq e^{-x}$ erhalten wir

$$p = 1 - \prod_{j=1}^{3016} \frac{M - (j-1)}{M} = 1 - \prod_{j=1}^{3016} 1 - \frac{(j-1)}{M}$$

$$\geq 1 - \prod_{j=1}^{3016} e^{-\frac{j-1}{M}} = 1 - e^{-\frac{1}{M}\sum_{j=1}^{3016} j} = 1 - e^{-\frac{1}{M}\cdot\frac{3016\cdot 3015}{2}}$$

- Die Lottosensation am 29.6.1995:

Wirklich eine Sensation?

Mit der Abschätzung $1 - x \leq e^{-x}$ erhalten wir

$$p = 1 - \prod_{j=1}^{3016} \frac{M - (j-1)}{M} = 1 - \prod_{j=1}^{3016} 1 - \frac{(j-1)}{M}$$

$$\geq 1 - \prod_{j=1}^{3016} e^{-\frac{j-1}{M}} = 1 - e^{-\frac{1}{M}\sum_{j=1}^{3016} j} = 1 - e^{-\frac{1}{M}\cdot\frac{3016\cdot 3015}{2}}$$

$$= 1 - e^{-0.325} \approx 0{,}278 = 27.8\%.$$

Kapitel 3: Kombinatorik (1)

Praktische Anwendungen in der Informatik:

- Darstellungsmächtigkeit von n Bits (2^n)
- Sicherheit von Passwörtern beruht i.W. auf der „kombinatorischen Explosion“
- Brute-Force-Algorithmen (Durchprobieren aller Möglichkeiten)
- Bestimmung von Wahrscheinlichkeiten