WS 2014/15

Diskrete Strukturen

Kapitel 3: Kombinatorik (2)

Hans-Joachim Bungartz

Lehrstuhl für wissenschaftliches Rechnen
Fakultät für Informatik
Technische Universität München

http://www5.in.tum.de/wiki/index.php/Diskrete_Strukturen_-_Winter_14

Kapitel 3: Kombinatorik (2)

- Kombinatorische Strukturen und Algorithmen
  - Ziehen von Elementen aus einer Menge
  - Kombinatorische Beweisprinzipien
  - Fundamentale Zählkoeffizienten
  - Bälle und Urnen

- Kombinatorische Beweisprinzipien:

  Grundlegende Abzählprinzipien, die zur Lösung von Abzählproblemen verwendet werden:
  - Produktregel
  - Regel des getrennten Abzählens oder Summenregel
  - Gleichheitsregel
  - Prinzip des doppelten Abzählens
  - Prinzip der Inklusion/Exklusion
  - Das Schubfachprinzip

Produktregel:

Die Kardinalität des kartesischen Produkts endlicher Mengen ist gleich dem Produkt ihrer Kardinalitäten.

$$|\, S_1 \times \cdots \times S_n| = |S_1| \cdot |S_2| \cdot \ldots \cdot |S_n|.$$

- Die Produktregel:
  Beispiel:
  Wie viele 4-stellige Zahlen gibt es, deren i-te Ziffer eine durch i teilbare Zahl ist?

  Sei $S_i \subseteq \{0, \ldots, 9\}, i \in \{1, \ldots, 4\}$, die Menge, die alle durch i teilbaren Zahlen aus {0,…,9} enthält.

  Dann lassen sich die gesuchten Zahlen als Elemente der Relation $R = S_1 \times S_2 \times S_3 \times S_4$ darstellen.

- Die Produktregel:

  Beispiel:

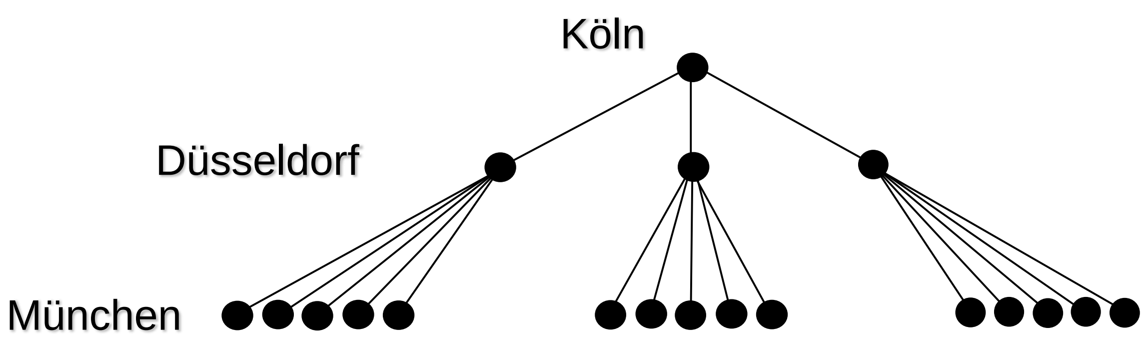
  Wie viele 4-stelligen Zahlen gibt es, deren *i*-te Ziffer eine durch *i* teilbare Zahl ist?

$$
\begin{aligned}
S_1 &= \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\},\\
S_2 &= \{0,2,4,6,8\},\\
S_3 &= \{0,3,6,9\},\\
S_4 &= \{0,4,8\}.
\end{aligned}
$$

  Nach der Produktregel gibt es $9 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 540$ solche Zahlen.

- Produktregel als Baumdiagramm:

  Angenommen, wir können auf drei Wegen von Köln nach Düsseldorf und auf 5 Wegen von Düsseldorf nach München fahren. Wie viele Wege gibt es von K nach M via D?



Regel des getrennten Abzählens
(Summenregel)

Die Kardinalität einer disjunkten Vereinigung von Mengen ist gleich der Summe ihrer Kardinalitäten:

$$|S_1 \uplus S_2 \uplus \cdots \uplus S_n| = |S_1| + \cdots + |S_n|.$$

Kapitel 3: Kombinatorik (2)

- Die Regel des getrennten Abzählens (Summenregel):

  Auf wie viele Arten können 6 Mädchen und 8 Jungen in einer Reihe von 5 Stühlen sitzen, wenn Mädchen und Jungen abwechselnd sitzen müssen?

  Es werden getrennt die Anzahl von Sitzreihen, die mit einem Mädchen beginnen und die mit einem Jungen beginnen, gezählt.

- Die Regel des getrennten Abzählens (Summenregel):

Mit Mädchen beginnende Reihen:

$$M = 6 \cdot 8 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 4 \ = 6720.$$

Mit Jungen beginnenden Reihen:

$$J = 8 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 6 \ = 10080.$$

Insgesamt $M + J = 16800$ Reihen.

Typischer Fehler: Man nimmt irrtümlich an, dass die Mengen $S_1, \ldots, S_n$ disjunkt sind.

Beispiel: Zwei Spieler spielen Poker. Der erste Spieler bekommt die Hand

A♣ A♥ A♦ 2♠ 3♣.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnt er?

Wir können die Anzahl der Hände berechnen, die gegen diese Hand verlieren.

Kapitel 3: Kombinatorik (2)

Gegen die Hand verliert man:

- mit einer Hand der Gestalt XXXYZ. Sei T die Anzahl dieser Hände.
- mit einer Hand der Gestalt XXYYZ. Sei DP die Anzahl dieser Hände.
- mit einer Hand der Gestalt XXYZW. Sei P die Anzahl dieser Hände.
- mit einer Hand XYZUW, die kein straight (konsekutive Werte), flush (selbe Farbe) oder straight flush (straight und flush) sind. Sei KP (kein Paar) die Anzahl dieser Hände.

Damit ist die Gesamtzahl $T + DP + P + KP$.

Richtig?

Ja, aber nur wenn beim Zählen der Möglichkeiten darauf geachtet wird, dass X,Y,Z,W,U verschiedene Augenzahlen sein müssen.

Sonst werden einige Hände mehrmals gezählt, und es werden Hände gezählt, die gegen die Hand gewinnen.

Gleichheitsregel:

Existiert eine Bijektion $f: S \to T$, dann haben die Mengen S und T gleich viele Elemente.

- Anwendung der Gleichheitsregel:

  Beispiel: Wie viele Elemente hat $P(\{1, \ldots, n\})$?

  Sei $W = \{0,1\}^n$ die Menge aller n-stelligen Zeichenreihen bestehend aus den Zahlen 0 und 1.

  Nach der Produktregel gilt $|W| = 2^n$.

  Für $A \subseteq \{1, \ldots, n\}$ sei $f(A) = w_1 w_2 \ldots w_n \in W$ mit $w_\mathrm{k} = 1$, falls $k \in A$, und $w_\mathrm{k} = 0$ sonst.

  Beispiel mit $n = 5$: $f(\{1,3\}) = 10100$.

- Anwendung der Gleichheitsregel:

  Beispiel: Wie viele Elemente hat $P(\{1, \dots, n\})$?

  Da es sich bei f um eine bijektive Abbildung handelt, gilt nach der Gleichheitsregel

  $|P(\{1, \dots, n\})| = |W| = 2^n$.

- Noch eine Anwendung der Gleichheitsregel:

  Beispiel: Wie viele Möglichkeiten gibt es, n Euro unter m Kinder zu verteilen?

  Für $n = 5$ und $m = 3$ gibt es 21 Möglichkeiten:

5 0 0	4 1 0	4 0 1	3 2 0	3 1 1
3 0 2	2 3 0	2 2 1	2 1 2	2 0 3
1 4 0	1 3 1	1 2 2	1 1 3	1 0 4
0 5 0	0 4 1	0 3 2	0 2 3	0 1 4
0 0 5				

- Noch eine Anwendung der Gleichheitsregel:

  Beispiel: Wie viele Möglichkeiten gibt es, n Euro unter m Kinder zu verteilen?

  Sei $K = \{k_1, \ldots, k_m\}$ die Menge der Kinder.

  Wir ordnen jeder Verteilung (a, b, c) die Multimenge $f(a, b, c)$ über K zu, die so oft ein Kind enthält, wie die Anzahl der Euro, die es bekommt.

  Beispiel: $f(1,3,1) = \{ k_1, k_2, k_2, k_2, k_3 \}$.

- Anwendung der Gleichheitsregel:

  Beispiel: Wie viele Möglichkeiten gibt es, n Euro unter m Kinder zu verteilen?

  Die Funktion f ist eine Bijektion zwischen der Menge der Verteilungen und der Menge der n-Multimengen einer m-elementigen Menge. Damit ist die Anzahl der Verteilungen

$$\binom{m+n-1}{m-1}.$$

- Doppeltes Abzählen:

  Eine $n \times m$ Matrix ist ein zweidimensionales Feld mit n Zeilen und m Spalten, deren Einträge Zahlen sind.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

Prinzip des doppelten Abzählens:

In jeder Matrix ist die Summe der Zeilensummen (Summe der Elementen einer Zeile) gleich der Summe der Spaltensummen (Summe der Elementen einer Spalte).

- Doppeltes Abzählen:
  Sei $r_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}$ die Summe der Elemente der i-te Reihe von A.

  Sei $s_{\mathrm{j}} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}$ die Summe der Elemente der j-te Spalte von A.

  Sei $M_r = \sum_{i=1}^{n} r_i$ die Summe der Reihensummen.

  Sei $M_c = \sum_{j=1}^{m} c_j$ die Summe der Spaltensummen.

  Prinzip des doppelten Abzählens: $M_r = M_c$.

- Doppeltes Abzählen für Relationen:

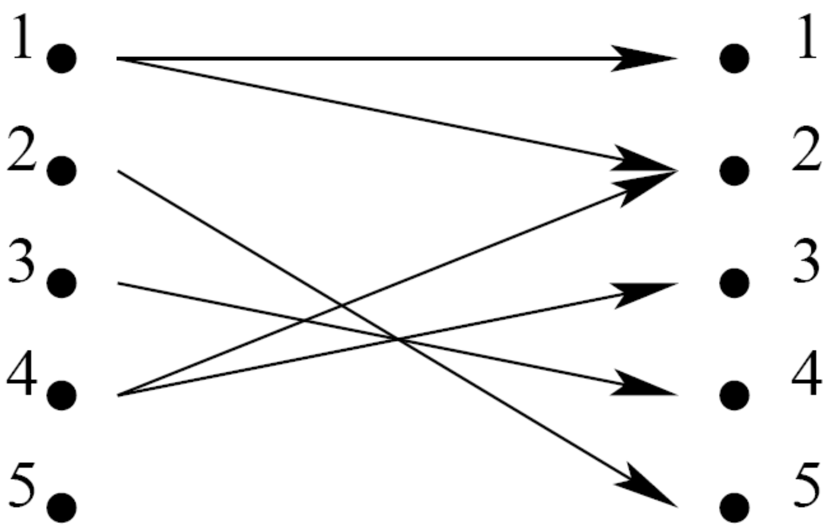
  Eine Relation $R \subseteq S \times T$ mit $S = \{s_1, \dots, s_n\}$ und $T = \{t_1, \dots, t_m\}$ kann durch ihre Inzidenzmatrix beschrieben werden.

  Die Inzidenzmatrix von R ist die $n \times m$ Matrix mit Einträgen

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{wenn } s_i \, R \, t_j; \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

- Doppeltes Abzählen:

Beispiel: Relation und Inzidenzmatrix.



$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Doppeltes Abzählen:
  Sei $S = T = \{1, \ldots, 8\}$. Wir betrachten die Relation $i \mid j$ (i ist Teiler von j).

  Die Inzidenzmatrix ist:

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	0	1	0	1	0	1	0	1
3	0	0	1	0	0	1	0	0
4	0	0	0	1	0	0	0	1
5	0	0	0	0	1	0	0	0
6	0	0	0	0	0	1	0	0
7	0	0	0	0	0	0	1	0
8	0	0	0	0	0	0	0	1

- Doppeltes Abzählen:

  Frage: Wie viele Teiler hat eine Zahl von 1 bis 8 im Durchschnitt?

  Antwort:

  Sei $t(j)$ = Anzahl von Einsen in Spalte j

  = Anzahl der Teiler von j.

$$avg(8) = \frac{1}{8}\sum_{i=1}^{8} t(i)$$

$$= \frac{1+2+2+3+2+4+2+4}{8} = 2.5.$$

- Doppeltes Abzählen:

  Frage: Wie groß ist $avg(n)$ für beliebiges n?

  Schwer, wenn wir die Spalten addieren!

  In der i-ten Zeile stehen jedoch die Vielfachen von i, nämlich $1i,\ 2i,\ \ldots,\ \lfloor n/i \rfloor i$ und damit

$$M_r(i) = \left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor \qquad M_r = \sum_{i=1}^{n} \left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor .$$

- Doppeltes Abzählen:

  Frage: Wie groß ist $avg(n)$ für beliebiges n?

  Antwort: Doppeltes Abzählen:

$$avg(n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} t(i) = \frac{1}{n}M_c = \frac{1}{n}M_r$$

- Doppeltes Abzählen:

  Frage: Wie groß ist $avg(n)$ für beliebiges n?

  Antwort: Doppeltes Abzählen:

$$avg(n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} t(i) = \frac{1}{n}M_c = \frac{1}{n}M_r = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left\lfloor\frac{n}{i}\right\rfloor$$

$$\approx \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}$$

- Doppeltes Abzählen

  Frage: Wie groß ist $avg(n)$ für beliebiges n?

  Antwort: Doppeltes Abzählen:

$$avg(n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} t(i) = \frac{1}{n}M_c = \frac{1}{n}M_r = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left\lfloor\frac{n}{i}\right\rfloor$$

$$\approx \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i} \approx \ln n + \gamma.$$

mit konstantem γ (Euler-Mascheroni-Konstante).

http://de.wikipedia.org/wiki/Harmonische_Reihe

- Das Prinzip der Inklusion/Exklusion:

  Bei der Summenregel müssen die zu vereinigenden Teilmengen disjunkt sein. Das Prinzip der Inklusion/Exklusion erlaubt uns, die Kardinalität der Vereinigung zu beschreiben, wenn die zu vereinigenden Mengen nicht disjunkt sind.

Prinzip der Inklusion/Exklusion für zwei Mengen:

Seien A und B zwei beliebige endliche Mengen. Dann gilt:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

- Das Prinzip der Inklusion/Exklusion:

  Beispiel: Wie viele durch 7 oder 11 teilbare natürliche Zahlen kleiner gleich 1000 gibt es?

  Lösung:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

$$= \left\lfloor \frac{1000}{7} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1000}{11} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{1000}{7 \cdot 11} \right\rfloor$$

$$= 142 + 90 - 12 = 220.$$

- Das Prinzip der Inklusion/Exklusion:

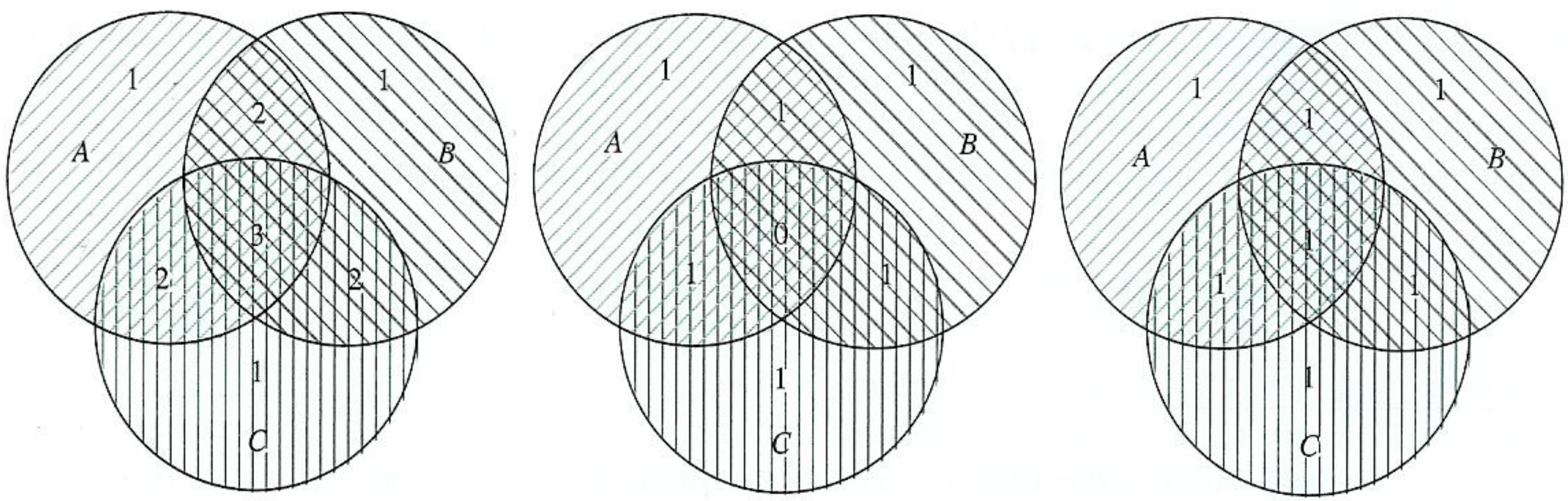
  Bei der Erweiterung auf die Vereinigung von drei Mengen A, B, C ist zu berücksichtigen, dass $|A| + |B| + |C|$ jedes Element

  - in genau einer der Mengen einmal zählt,
  - in genau zwei der Mengen zweimal zählt,
  - in genau drei der Mengen dreimal zählt.

Kapitel 3: Kombinatorik (2)

- Das Prinzip der Inklusion/Exklusion:

502 7 / Advanced Counting Techniques



(a) Count of elements by $|A|+|B|+|C|$

(b) Count of elements by $|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|$

(c) Count of elements by $|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|$

Prinzip der Inklusion/Exklusion für drei Mengen:

Seien A, B, C beliebige endliche Mengen. Dann gilt:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C|$$
$$- |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C|$$
$$+ |A \cap B \cap C|.$$

- Prinzip der Inklusion/Exklusion:

  Beispiel: An den Vorlesungen Inf1, LA und DS nehmen jeweils 1232, 879 und 114 Studierende teil.

  103 nehmen an Infl und LA teil,
  23 an Infl und DS, und
  14 an LA und DS.

  2092 Studierende nehmen an mindestens einer der Vorlesungen teil.

Kapitel 3: Kombinatorik (2)

- Prinzip der Inklusion/Exklusion:
  Frage: Wie viele Studierende nehmen an allen drei Vorlesungen teil?

  $|\mathrm{Inf1}| = 1232\,,\ \ |\mathrm{LA}| = 879,\ \ |\mathrm{DS}| = 114\,.$

  $|\mathrm{Inf1} \cap \ \mathrm{LA}| = 103,\ \ |\mathrm{Inf1} \cap \mathrm{DS}| = 2$

  $|\mathrm{LA} \cap \mathrm{DS}| = 14$

  $|\mathrm{Inf1} \cup \mathrm{LA} \cup \mathrm{DS}| = 2092.$

  Daraus folgt:

  $$|\mathrm{Inf1} \cap \mathrm{LA} \cap \mathrm{DS}| = \\ 2092 - 1232 - 879 - 114 + 103 + 23 + 14 = 7.$$

Prinzip der Inklusion/Exklusion für n Mengen:

Seien $A_1, \ldots, A_n$ beliebige endliche Mengen. Dann gilt:

$$|A_1 \cup \cdots A_n| = \sum_{1 \le i \le n} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le n} \left|A_i \cap A_j\right|$$

$$+ \sum_{1 \le i < j < k \le n} \left|A_i \cap A_j \cap A_k\right| - \cdots$$

$$+ (-1)^{n+1} |A_1 \cap \cdots \cap A_n|$$

Das Schubfachprinzip:

Ist $f: X \to Y$ eine Abbildung und gilt $|X| > |Y|$, so gibt es ein $y \in Y$ mit $|f^{-1}(y)| \geq 2$.

„Wenn man n Elemente auf m Fächer verteilt und $n > m$ ist, dann gibt es mindestens ein Fach, das 2 Elemente enthält.“

- Das Schubfachprinzip:

  Beispiel:
  In jeder Menge von 13 Personen befinden sich zwei, die im selben Monat Geburtstag haben.

  Beispiel:
  Wenn 42 Studenten an einer Klausur teilnehmen, bei der es bis zu 40 Punkte gibt, so gibt es mindestens zwei Studenten, die die gleiche Punktzahl haben.

- Das Schubfachprinzip:

  Satz: In jeder Menge P von Personen, $|P| \geq 2$, gibt es mindestens 2 Personen, die die gleiche Anzahl von Personen aus P kennen.

  (Annahme: Die Relation „kennen“ ist symmetrisch.)

  Beweis: Sei $P = \{p_1, \ldots, p_n\}$ mit $n \geq 2$.

  Sei $f: P \to \{0, \ldots, n-1\}$ die Funktion, die angibt, wie viele Personen jede Person kennt.

  Wir zeigen $|f(P)| < |P|$.

- Das Schubfachprinzip:

  Wir betrachten zwei Fälle:

  - $\exists p_i \in P\colon f(p_i) = 0$.

    Dann gilt $\forall p_i \in P\colon f(p_i) \in \{0, \dots, n-2\}$.

  - $\neg\exists p_i \in P\colon f(p_i) = 0$.

    Dann gilt $\forall p_i \in P\colon f(p_i) \in \{1, \dots, n-1\}$.

  In beiden Fällen gilt

  $|f(P)| \leq n - 1 < n = |P|$.

- Das Schubfachprinzip:

  Satz: In jeder $(n+1)$-elementigen Teilmenge von $M = \{1,2,\dots,2n\}$ gibt es mindestens zwei Zahlen, die zueinander teilerfremd sind.

  Beweis: Unter je $n+1$ Zahlen der Menge M gibt es stets zwei aufeinanderfolgende; diese Zahlen sind sicher teilerfremd. □

Kapitel 3: Kombinatorik (2)

- Das Schubfachprinzip:

  Satz: In jeder Menge M bestehend aus sechs natürlichen Zahlen ($M = \{a_1, \dots, a_6\}$) gibt es stets zwei, deren Differenz durch 5 teilbar ist.

  Beweis: Wir bilden Teilmengen $K_i \subseteq M$ mit

  $$K_\mathrm{i} = \{a_j \in M \mid a_j \equiv i \bmod 5\}.$$

  Nach dem Schubfachprinzip gibt es eine Teilmenge, die zwei Zahlen enthält, die denselben Rest ergeben. Deren Differenz ist durch 5 teilbar. □

- Das Schubfachprinzip:

  Satz: Sei $A \subseteq \{1, 2, \ldots, 2n\}$ mit $|A| = n + 1$. Dann gibt es immer zwei Zahlen in A, von denen die eine die andere teilt.

- Das Schubfachprinzip:

  Beweis: Schreibe jedes $a \in A$ in der Form $a = 2^k m$ mit $k \in \mathbb{N}_0$ und $0 \leq m \leq 2n$ ungerade.

  (Immer möglich, denn aus $m > 2n - 1$ folgt ebenfalls $2^k m > 2n$ und so $a \notin A$.)

  Da $|A| = 1 + n$, aber es nur n ungerade Zahlen im Intervall von 0 bis $2n$ gibt, haben zwei verschiedene Elemente von A denselben ungeraden Faktor m. Damit ist die größere Zahl ein Vielfaches der anderen. □

Das verallgemeinerte Schubfachprinzip:

Ist $f: X \to Y$ eine Abbildung, so gibt es ein $y \in Y$ mit $|f^{-1}(y)| \geq \lceil |X|/|Y| \rceil$.

„Wenn man n Elemente auf m Fächer verteilt, dann gibt es mindestens ein Fach, das mindestens $\lceil n/m \rceil$ Elemente enthält."

- Widerspruchsbeweis des verallgemeinerten Schubfachprinzips:

  Angenommen, keines der Fächer enthält mehr als $\lceil |X|/|Y| \rceil - 1$ Elemente.

  Dann ist die Anzahl aller Elemente höchstens

$$|Y|\left(\left\lceil\frac{|X|}{|Y|}\right\rceil - 1\right) < |Y|\left(\left(\frac{|X|}{|Y|} + 1\right) - 1\right) = |X|.$$

  Dies ist ein Widerspruch zur Annahme. □

Kapitel 3: Kombinatorik (2)

- Das verallgemeinerte Schubfachprinzip:

  Beispiel:

  Wenn es $N = 380$ Studierende in dieser Vorlesung gibt und es 52 Wochen in einem Jahr gibt, dann muss es mindestens eine Woche geben, in der mindestens $\lceil 380/52 \rceil = \lceil 7.31 \rceil = 8$ Studierende der Vorlesung Geburtstag haben.

Kapitel 3: Kombinatorik (2)

- Das verallgemeinerte Schubfachprinzip:

  Satz: In jeder Menge von 6 Personen gibt es 3, die sich alle untereinander kennen oder 3, die sich alle nicht kennen (wobei die Relation „kennen“ symmetrisch sei).

- Das verallgemeinerte Schubfachprinzip:

  Beweis:

  Sei A eine der 6 Personen. Unter den verbleibenden 5 Personen gibt es entweder 3, die A kennt, oder drei, die A nicht kennt (Verallgemeinertes Schubfachprinzip).

  Wir betrachten diese zwei Fälle.

- Beweis (Fortsetzung):

Fall 1: A kennt drei Personen B, C, D.

- Wenn sich zwei Personen aus B, C, D kennen, dann erhalten wir mit A die drei Personen, die sich kennen.
- Wenn sich keine zwei Personen aus B, C, D kennen, dann sind B, C, D die drei Personen, die sich nicht kennen.

Fall 2: Symmetrisch. □

- Das verallgemeinerte Schubfachprinzip:
  - Die sog. Ramsey-Zahlen $R(m,n)$, mit $m,n \in \mathbb{N}$ und $m,n \geq 2$, geben die minimale Anzahl von Personen aus einer Gruppe an, sodass sich entweder m Personen kennen oder n Personen nicht kennen.
  - Wir haben also gezeigt, dass $R(3,3) \leq 6$.
  - Es ist leicht zu sehen, dass $R(3,3) = 6$.