WS 2014/15

Diskrete Strukturen

Kapitel 3: Kombinatorik (4)

Hans-Joachim Bungartz

Lehrstuhl für wissenschaftliches Rechnen
Fakultät für Informatik
Technische Universität München

http://www5.in.tum.de/wiki/index.php/Diskrete_Strukturen_-_Winter_14

Kapitel 3: Kombinatorik (4)

- Kombinatorische Strukturen und Algorithmen
  - Ziehen von Elementen aus einer Menge
  - Kombinatorische Beweisprinzipien
  - Fundamentale Zählkoeffizienten
  - Bälle und Urnen

- Die bisher betrachteten Zählprobleme sind Spezialfälle von Abzählproblemen der Gestalt:

  „Bestimme die Anzahl der Möglichkeiten, n Bälle auf k Urnen zu verteilen“.

- Bei der Verteilung kommt es darauf an, ob die Bälle und Urnen als unterscheidbar angesehen werden.
- Zusätzlich können Forderungen an die maximale/minimale Menge von Bällen pro Urne gestellt werden:
  - Höchstens/mindestens/genau ein Ball pro Urne.
  - Äquivalent: Die Abbildung Bälle → Urne ist injektiv, surjektiv, bijektiv.

Kapitel 3: Kombinatorik (4)

- Unterscheidbar oder ununterscheidbar? Wie viele Möglichkeiten gibt es
  - zehn Filme auf drei DVD-Disks zu verteilen?
  - zehn Fußball-WM Spiele auf vier Austragungsorte zu verteilen?
  - zehn Murmeln in fünf Päckchen aufzuteilen?
  - zehn Euro unter sechs Kinder zu verteilen?

Kapitel 3: Kombinatorik (4)

$\lvert B\rvert = n,$ $\lvert U\rvert = m$	beliebig	injektiv	surjektiv	bijektiv
B untersch. U untersch.	m^n	$\begin{cases} m^{\underline{n}}, m \geq n \\ 0, \text{sonst} \end{cases}$	$m!\, S_{n,m}$	$\begin{cases} n!, m = n \\ 0, \text{sonst} \end{cases}$
B gleich U untersch.	$\binom{m+n-1}{n}$	$\binom{m}{n}$	$\binom{n-1}{m-1}$	$\begin{cases} 1, m = n \\ 0, \text{sonst} \end{cases}$
B untersch. U gleich	$\sum_{k=1}^{m} S_{n,k}$	$\begin{cases} 1, m \geq n \\ 0, \text{sonst} \end{cases}$	$S_{n,m}$	$\begin{cases} 1, m = n \\ 0, \text{sonst} \end{cases}$
B gleich U gleich	$\sum_{k=1}^{m} P_{n,k}$	$\begin{cases} 1, m \geq n \\ 0, \text{sonst} \end{cases}$	$P_{n,m}$	$\begin{cases} 1, m = n \\ 0, \text{sonst} \end{cases}$

Kapitel 3: Kombinatorik (4)

$\lvert B\rvert = n,$ $\lvert U\rvert = m$	beliebig	injektiv
B untersch. U untersch.	m^n	$\begin{cases} m^{\underline{n}}, m \geq n \\ 0, \text{sonst} \end{cases}$

- Beliebig: Für jeden Ball kommen alle m Urnen in Frage. Die Produktregel ergibt m^n.
- Injektiv: Für den ersten Ball kommen m Urnen in Frage, für den zweiten $m-1$ (Injektivität), für den dritten $m-2$, etc. Die Produktregel ergibt

$$m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1) = m^{\underline{n}}.$$

$\lvert B\rvert = n$, $\lvert U\rvert = m$	surjektiv
B untersch. U untersch.	$m!\,S_{n,m}$

- Eine Verteilung kann in zwei Schritten erzeugt werden:
  - Berechne eine geordnete m-Partition von B.
  - Ordne jede Zahl der Partition einer Urne zu.

Es gibt $S_{n,m}$ Partitionen. Für jede Partition gibt es $m!$ Zuordnungen. Die Produktregel ergibt $m!\,S_{n,m}$.

Kapitel 3: Kombinatorik (4)

$\lvert B\rvert = n,$ $\lvert U\rvert = m$	beliebig
B untersch. U gleich	$\sum_{k=1}^{m} S_{n,k}$

- Da die Bälle unterscheidbar sind, entspricht jede Zuordnung der Bälle auf k Urnen einer geordneten k-Partition der Bälle.

Kapitel 3: Kombinatorik (4)

$\lvert B\rvert = n,$ $\lvert U\rvert = m$	beliebig
B gleich U gleich	$\sum_{k=1}^{m} P_{n,k}$

- Jede Belegung der Urnen wird eindeutig durch die Anzahl der Bälle in den Urnen bestimmt.

  Die Anzahl der Möglichkeiten ist damit die Anzahl der ungeordneten Partitionen der Zahl n.

- Anwendungsbeispiel: Zufällige Speicherung von Dateien auf Servern.

  n Dateien werden zufällig auf n Servern gespeichert. Wir suchen eine Zahl k, sodass mit großer Wahrscheinlichkeit kein Server mehr als k Dateien bekommt.

  Modellierung: n unterscheidbare Bälle (Dateien) und n unterscheidbare Urnen (Server).

  Gesamtzahl aller Möglichkeiten: n^n

- Wie viele Verteilungen gibt es, in denen mindestens eine Urne mindestens k Bälle enthält?

  Die Anzahl der Möglichkeiten, in denen die i-te Urne mindestens k Bälle enthält, ist höchstens:

$$\binom{n}{k} n^{n-k}.$$

  (Wir wählen k Bälle für die i-te Urne, die anderen werden beliebig verteilt.)

Sei M die Anzahl der Möglichkeiten, in denen mindestens eine Urne mindestens k Bälle enthält. Es gilt:

$$M \leq n \binom{n}{k} n^{n-k}$$

(einige Möglichkeiten werden mehrmals gezählt).

Mit der Abschätzung $\binom{n}{k} \leq \left(\frac{\mathrm{e}n}{k}\right)^k$

erhalten wir

$$M \leq n \left(\frac{\mathrm{e}n}{k}\right)^k n^{n-k} \leq \left(\frac{\mathrm{e}}{k}\right)^k n^{n+1}.$$

- Die Wahrscheinlichkeit p_k, in mindestens einer Urne mindestens k Bälle zu finden, erfüllt

$$p_k = \frac{M}{n^n} \leq \left(\frac{e}{k}\right)^k n.$$

- Mit $k = e \ln n$ haben wir:

$$p_{e \ln n} \leq \left(\frac{1}{\ln n}\right)^{e \ln n} n \; = n^{1-\, e \ln(\ln n)}.$$

- Tabelle für p_k:

n	100	1000	10^4	10^5	10^6
$k = 7$	13.0%				
$k = 8$	1.8%	18%			
$k = 9$	0.2%	2%	21%		
$k = 10$	0.02%	0.2%	2%	22%	
$k = 11$	0.002%	0.02%	0.2%	2%	21%
$k = 12$	0.0002%	0.002%	0.02%	0.2%	2%

- Zusammenfassung Kombinatorik:
  - Ziehen von Elementen aus Mengen:

    mit/ohne Zurücklegen, mit/ohne Berücksichtigung der Reihenfolge der gezogenen Elemente.
  - Kombinatorische Beweisprinzipien:

    Summenregel, Produktregel, Gleichheitsregel, doppeltes Abzählen, Inklusion/Exklusion, Schubfachprinzip.
  - Zählkoeffizienten:

    Binomialkoeffizienten, Pascalsche Identität, Vandermonde-Identität, k-Partitionen u. Permutationen (Stirlingzahlen).
  - Bälle und Urnen:
    Anwendung der Zählprinzipien.