

WS 2014/15

Diskrete Strukturen

Kapitel 4: Graphentheorie (Grundlagen)

Hans-Joachim Bungartz

Lehrstuhl für wissenschaftliches Rechnen

Fakultät für Informatik

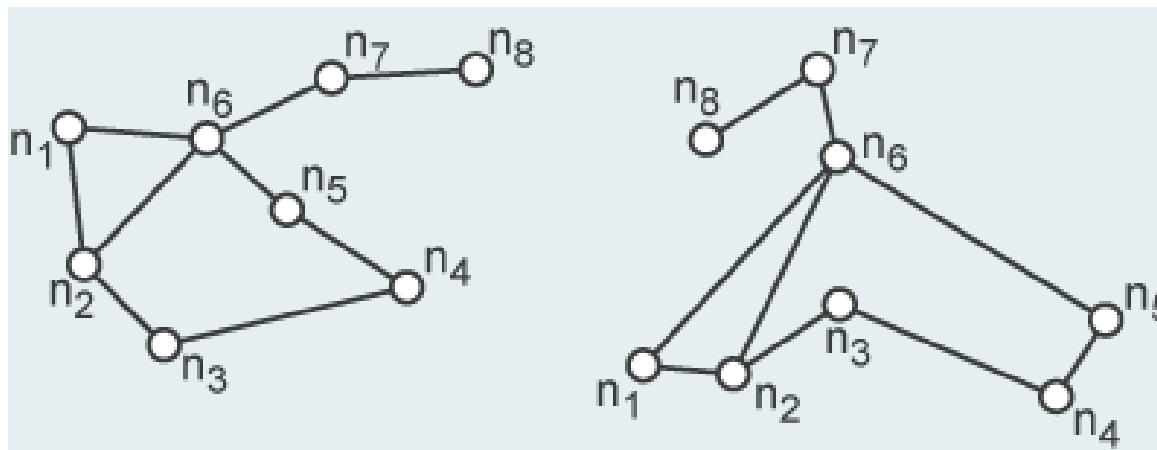
Technische Universität München

http://www5.in.tum.de/wiki/index.php/Diskrete_Strukturen_-_Winter_14

- Graphentheorie
 - Grundlagen
 - Bäume
 - Euler- und Hamiltonkreise
 - Planarität und Färbungen
 - Matchings



- Was sind Graphen?
 - Graphen sind Diagramme, in denen **Knoten** (Punkte) durch **Kanten** (Linien) verbunden werden.



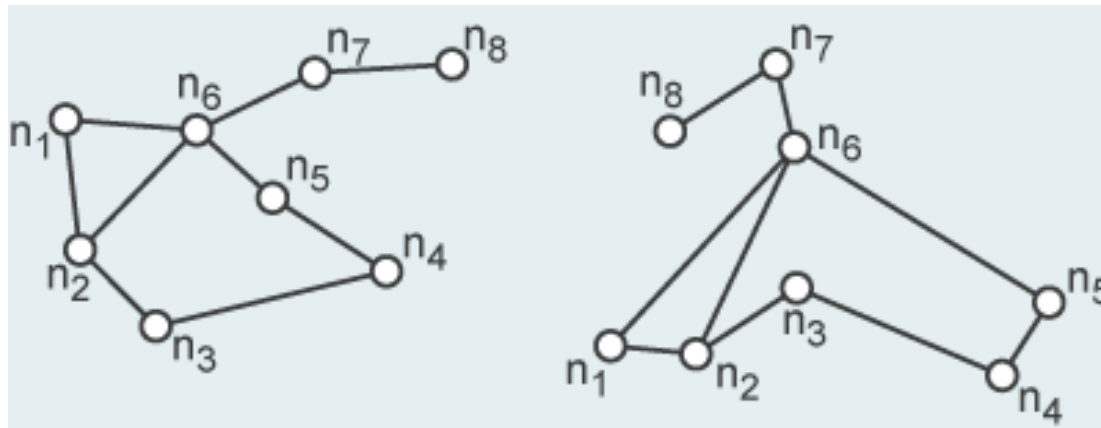
- Hilfreich zur Darstellung von Relationen.



- Anwendung von Graphen:
 - Viele reale Probleme lassen sich durch Graphen darstellen und somit auf graphentheoretische Fragestellungen zurückführen:
 - Verkehrswege zwischen Städten – kürzeste Wege,
 - Transportwege mit Kapazitäten – maximale Flüsse,
 - Zugmöglichkeiten in Spielen – Gewinnstrategien.



- Anwendung von Graphen:
 - In der Graphentheorie interessieren uns ausschließlich die **Nachbarschaftsbeziehungen** zwischen den Knoten (**deren Topologie**), nicht deren Positionen im Raum, oder die Längen von Kanten.
 - Zwei topologisch äquivalente Graphen:



- U-Bahn Karte: Nachbarschaftsbeziehungen zwischen Stationen, Entfernungen verzerrt:



- Anwendung von Graphen:
 - In der Graphentheorie interessiert uns:
 - Welcher Knoten ist mit welchen anderen verbunden?
 - Komme ich über gegebene Verbindungen von einem Knoten zu einem anderen?
 - Wie viele Verbindungen muss ich überqueren, um von einem Knoten zu einem anderen zu kommen?
 - Gibt es einen Weg, der alle Knoten/Kanten genau einmal besucht?



- (Ungerichtete) Graphen:

Definition: Ein (ungerichteter) Graph ist ein Paar $G = (V, E)$, wobei

- V eine Menge von **Knoten** oder **Ecken** und
- E eine Menge von 2-elementigen Untermengen aus V , genannt **Kanten**,

sind.

Englische Bezeichnungen:

Knoten \rightarrow **vertex** (vertices), Kante \rightarrow **edge**.

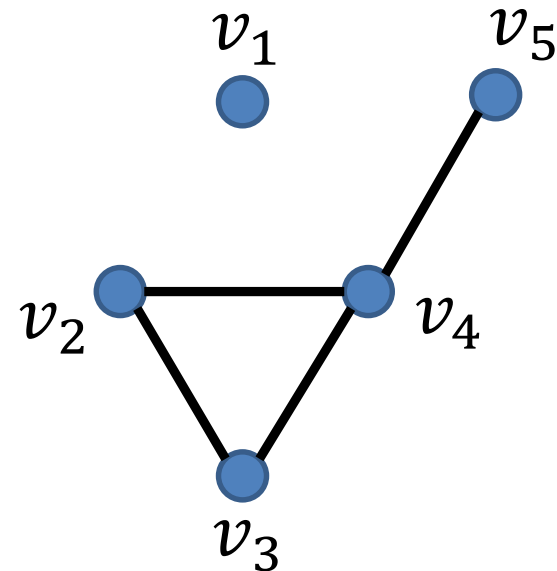
Definition: Ein (ungerichteter) Graph heißt **markiert**, falls seine Knoten Markierungen (z.B. $1, \dots, |V|$) haben.



- (Ungerichtete) Graphen:

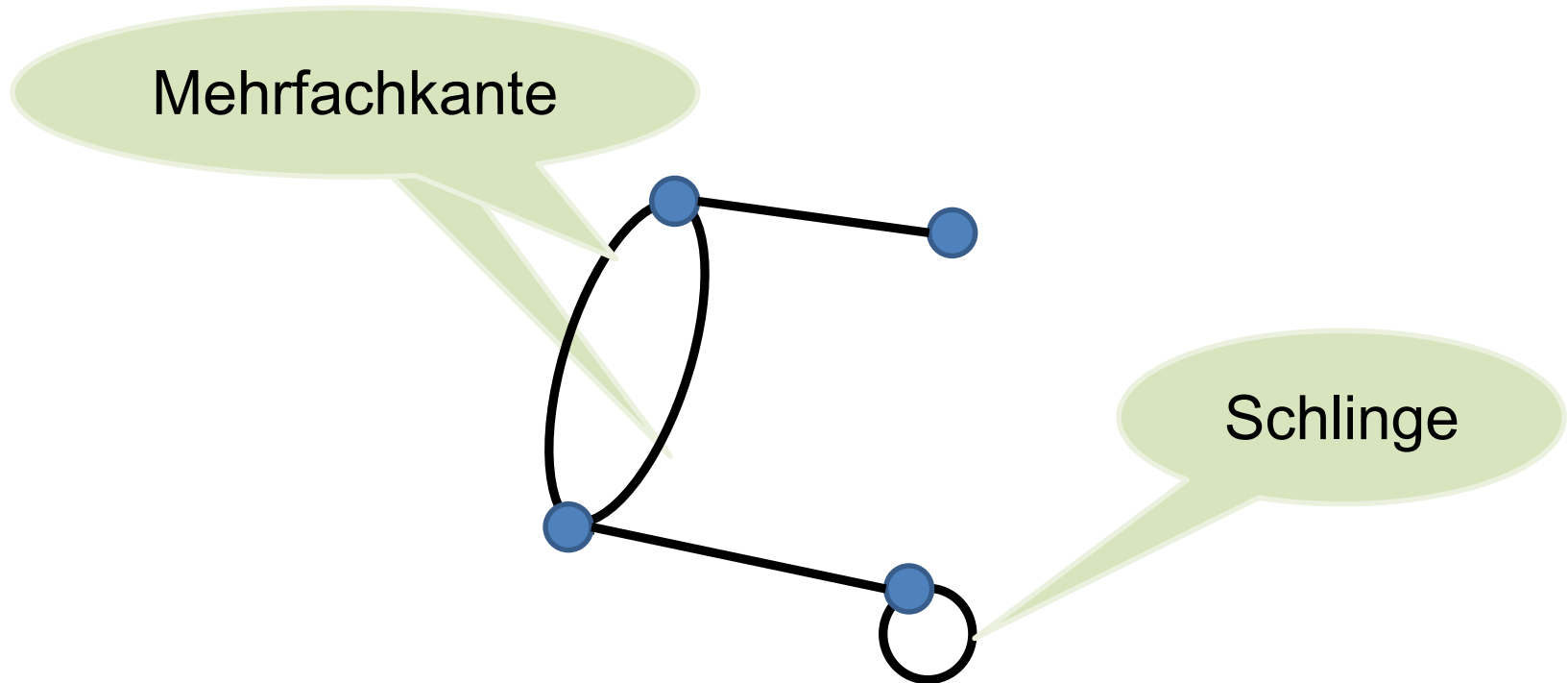
$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$$

$$E = \{ \{v_2, v_3\}, \{v_2, v_4\}, \\ \{v_3, v_4\}, \{v_4, v_5\} \}$$



- Mehrfachkanten und Schlingen:

Nach dieser Definition dürfen Graphen weder Mehrfachkanten noch Schlingen haben.



- Mehrfachkanten und Schlingen:

Definition: Ein verallgemeinerter (ungerichteter) Graph ist ein Paar $G = (V, E)$, wobei

- V eine Menge von Knoten und
- E eine **Multi**menge von 2-elementigen **Multi**mengen aus V

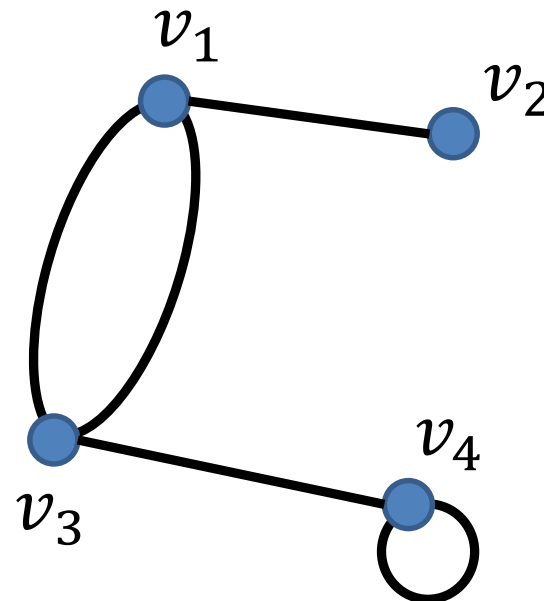
sind.



- (Ungerichtete) Graphen:

$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$$

$$E = \{ \{v_1, v_2\}, \\ \{v_1, v_3\}, \{v_1, v_3\}, \\ \{v_3, v_4\}, \\ \{v_4, v_4\} \}$$

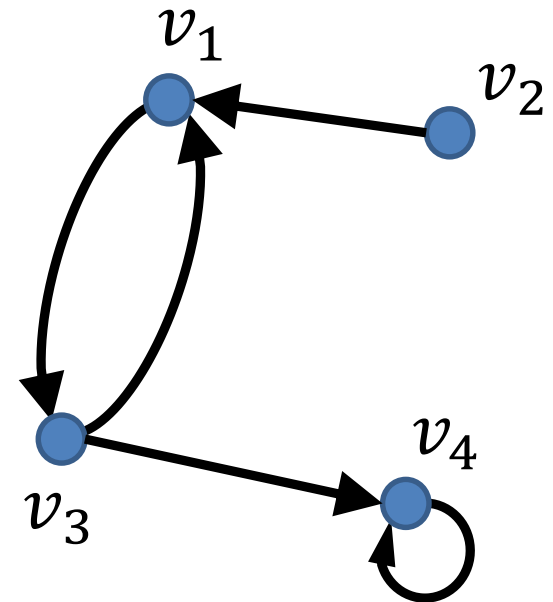


- Gerichtete Graphen:

Definition: Ein gerichteter Graph ist ein Paar $G = (V, E)$, wobei $E \subseteq V \times V$.

$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$$

$$E = \{ (v_2, v_1), \\ (v_1, v_3), (v_3, v_1), \\ (v_3, v_4) \\ (v_4, v_4) \}$$



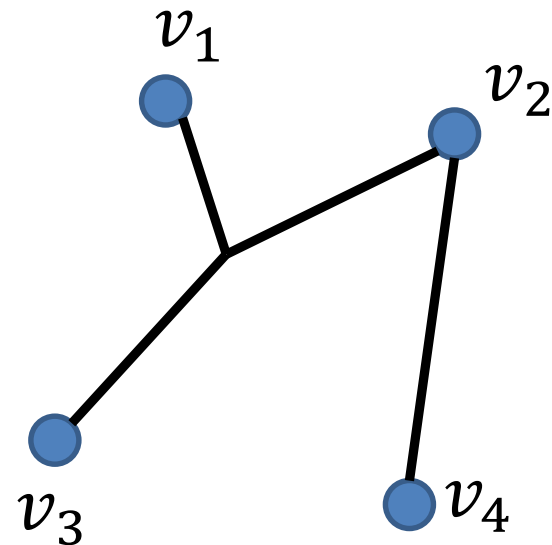
- Hypergraphen:

Definition: Ein **Hypergraph** ist ein Paar $G = (V, E)$, wobei $E \subseteq 2^V$.

Die Elementen von E werden **Hyperkanten** genannt.

$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\},$$

$$E = \left\{ \begin{array}{l} \{v_1, v_2, v_3\}, \\ \{v_2, v_4\} \end{array} \right\}.$$

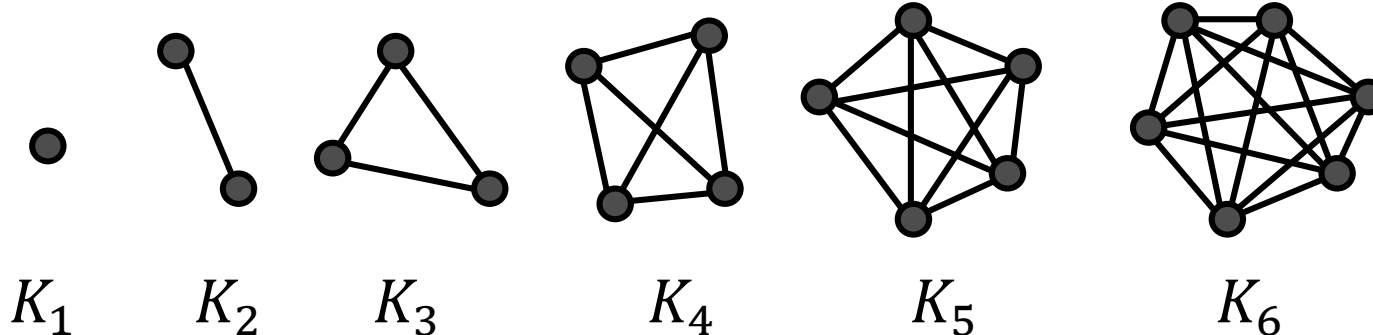


Ungerichtete Graphen



- **Vollständige Graphen:**

- In vollständigen Graphen K_n sind alle n Knoten miteinander verbunden.



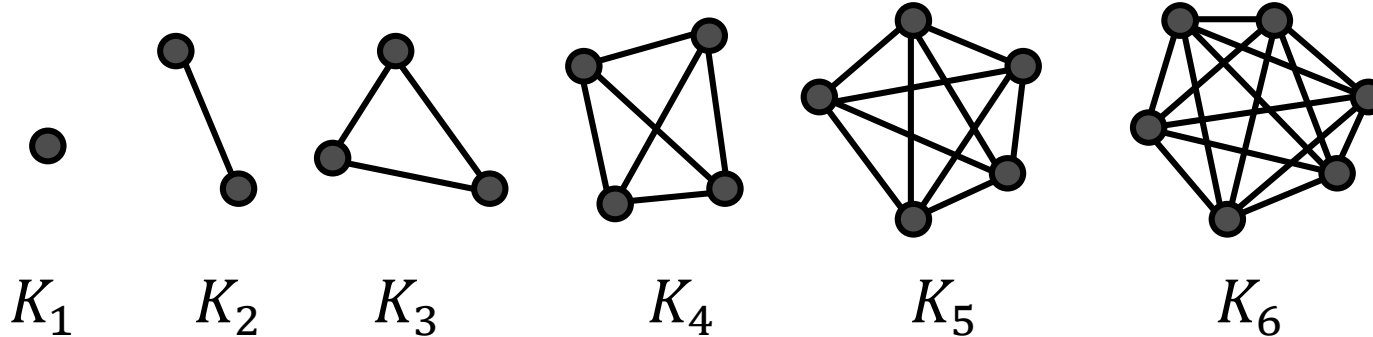
- **Frage:**

Wie viele Kanten gibt es in einem vollständigen Graphen mit n Knoten?



- **Vollständige Graphen:**

- In vollständigen Graphen K_n sind alle n Knoten miteinander verbunden.



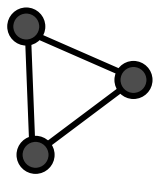
- **Antwort:**

$$E = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

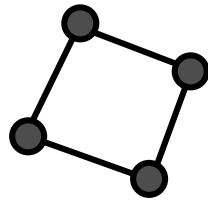


- Kreise:

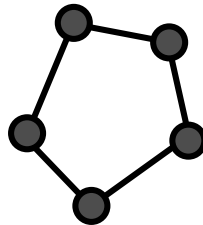
- In Kreisen C_n sind alle n ($n \geq 3$) Knoten zyklisch miteinander verbunden.



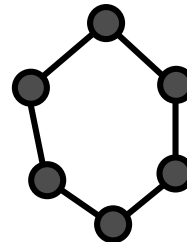
C_3



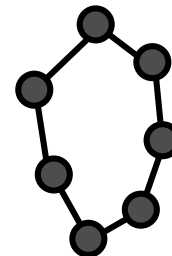
C_4



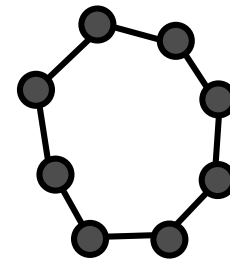
C_5



C_6



C_7



C_8

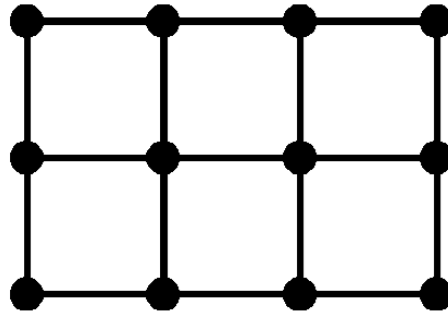


- Gittergraphen:

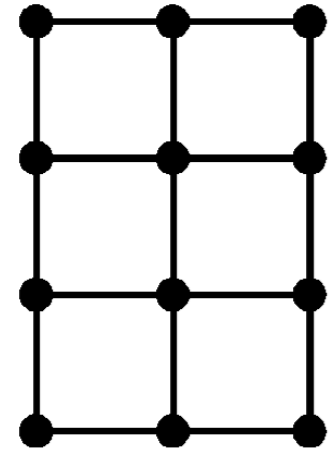
- Im Gittergraph $M_{n,m}$ bilden die Knoten und Kanten ein rechteckiges $n \times m$ Gitter.



$M_{1,2}$



$M_{3,4}$



$M_{4,3}$



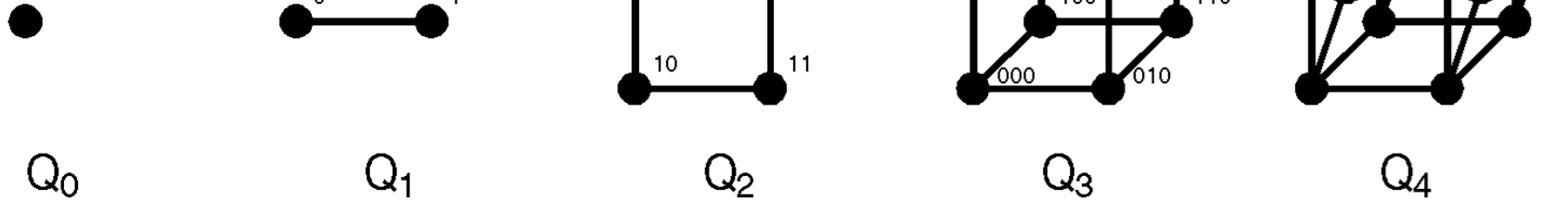
- (Binärer) Hyperwürfel:

Definition: Ein Graph $G = (V, E)$ heißt n -dimensionaler binärer Hyperwürfel (Q_n), falls $V = \{0, 1\}^n$ und $\{v, w\} \in E$ gdw. der **Hamming-Abstand** zwischen v und w gleich 1 ist.

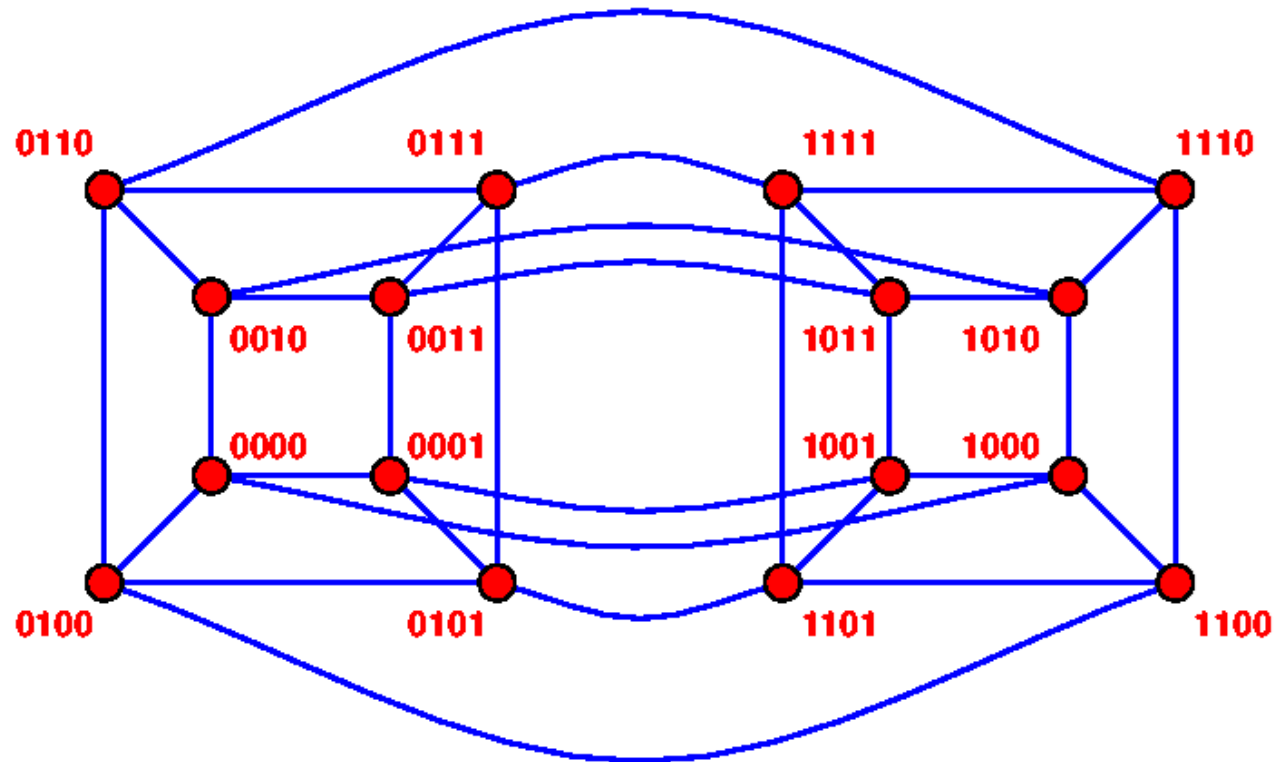
- Der **Hamming-Abstand** zwischen zwei Zeichenketten mit fester Länge ist die Anzahl der unterschiedlichen Stellen.
- Beispiel: Der Hamming-Abstand zwischen 0010 und 1000 beträgt 2.



- (Binäre) Hyperwürfel:



- Q_4 : 4-dimensionaler Hyperwürfel:



- Hyperwürfel:

Fakt: Der n -dimensionale Hyperwürfel Q_n hat 2^n Knoten und $n \cdot 2^{n-1}$ Kanten.

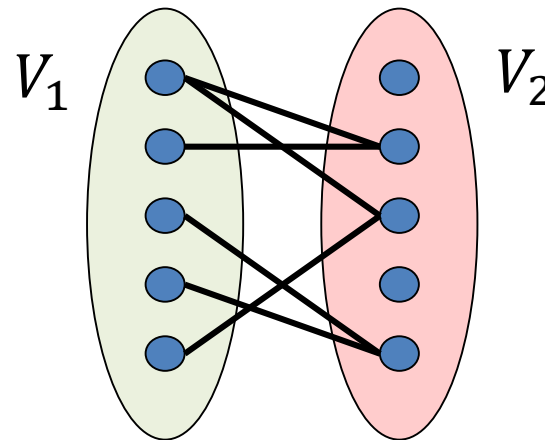
Anzahl der Kanten:

- Es gibt 2^n Knoten.
- Jeder Knoten ist Endknoten von n Kanten.
- Das Produkt $n \cdot 2^n$ zählt jede Kante zweimal.



- **Bipartite Graphen:**

Definition: Ein Graph $G = (V, E)$ heißt **bipartit**, wenn es eine Partitionierung V_1, V_2 von V gibt ($V = V_1 \cup V_2$, $V_1, V_2 \neq \emptyset$ und $V_1 \cap V_2 = \emptyset$), sodass für alle $\{v_1, v_2\} \in E$ gilt: $v_1 \in V_1$ und $v_2 \in V_2$ oder $v_1 \in V_2$ und $v_2 \in V_1$.

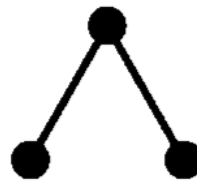


- **Bipartite Graphen:**

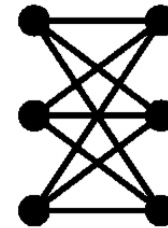
- Bipartite Graphen werden auch in der Form $G = (V_1, V_2, E)$ geschrieben.
- Ein bipartiter Graph $G = (V_1, V_2, E)$ heißt **vollständig**, falls $E = \{ \{u, v\} \mid u \in V_1 \wedge v \in V_2 \}$.
- Notation: $K_{m,n}$ mit $m = |V_1|$, $n = |V_2|$.



$K_{1,1}$



$K_{1,2}$



$K_{3,3}$

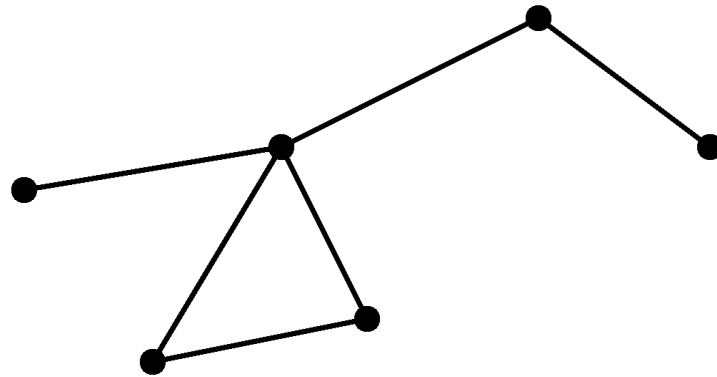


- **Wege, Pfade, Kreise:**
 - Ein **Weg der Länge k** in einem Graphen $G = (V, E)$ ist eine nichtleere Folge (v_0, \dots, v_k) von Knoten aus V , sodass $\{v_i, v_{i+1}\} \in E$ für alle $i = 0, \dots, k - 1$.
(Beachte: (v_0) ist ein Weg der Länge 0.)
 - Ein (**einfacher**) **Pfad** in G ist ein Weg in G , in dem alle Knoten paarweise verschieden sind.
 - Ein (**einfacher**) **Kreis der Länge k** ($k \geq 3$) in G ist ein Weg (v_0, \dots, v_k) , in dem v_0, \dots, v_{k-1} paarweise verschieden sind und $v_0 = v_k$.



- Wege, Pfade, Kreise:

Beispiel: Graph mit einem Weg der Länge 6, der aber kein Pfad ist.



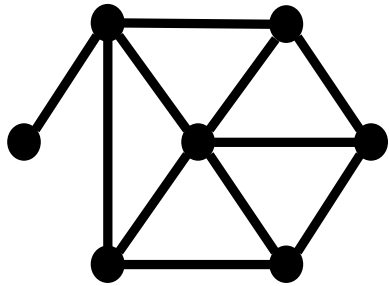
- (Induzierte) Teilgraphen:

- Ein Graph $H = (V_H, E_H)$ heißt **Teilgraph** eines Graphen $G = (V_G, E_G)$, falls $V_H \subseteq V_G, E_H \subseteq E_G$.
- Gilt $E_H = E_G \cap \{ \{u, v\} \mid u \in V_H \wedge v \in V_H \}$, so nennt man H einen **induzierten Teilgraphen** von G und schreibt $H = G[V_H]$.

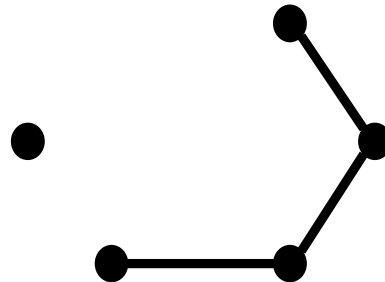
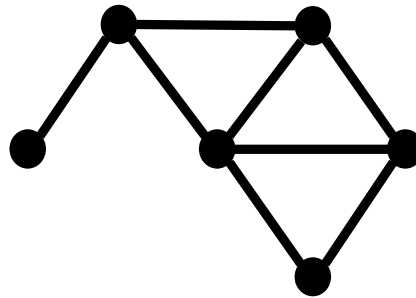
Konstruktion von induzierten Teilgraphen:
Entferne Knoten zusammen mit **allen**
dazugehörigen Kanten.



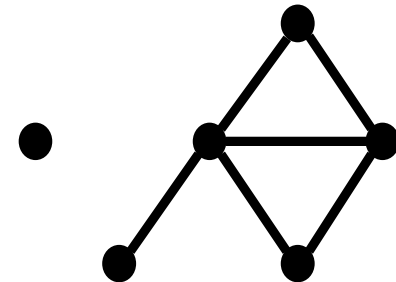
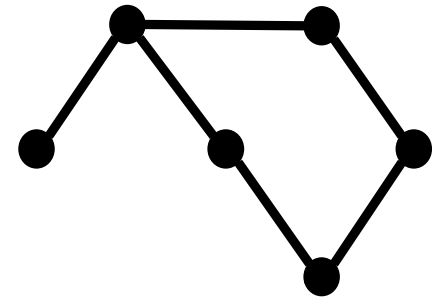
- (Induzierte) Teilgraphen:



Ind. Teilgraphen



Nur Teilgraphen



- Nachbarschaft und Grad:

Sei $G = (V, E)$ ein Graph und sei $v \in V$.

- Die **Nachbarschaft** $\Gamma(v)$ von v ist die Menge der Knoten $u \in V$ mit $\{v, u\} \in E$.
- Der **Grad** $\deg(v)$ von v bezeichnet die Anzahl von Nachbarn von v , d.h.
 $\deg(v) = |\Gamma(v)|$.
- Wenn alle Knoten von G denselben Grad k haben, dann ist G **k -regulär**.



- Nachbarschaft und Grad:

Satz (Handshaking Theorem): Für jeden Graphen $G = (V, E)$ gilt:

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|.$$

Beweis: Auf der linken Seite der Gleichung wird jede Kante genau zweimal gezählt, nämlich für die beiden Endknoten der Kante. Auf der rechten Seite wird jede Kante auch zweimal gezählt.



- Nachbarschaft und Grad:

Korollar: Für jeden Graphen $G = (V, E)$ ist die Anzahl der Knoten mit ungeradem Grad gerade.

Beweis: Sonst wäre $\sum_{v \in V} \deg(v)$ ungerade und damit $\sum_{v \in V} \deg(v) \neq 2|E|$, im Widerspruch zum vorigen Satz.



- Adjazenz und Inzidenz:
 - Sei $G = (V, E)$. Wenn $e = \{u, v\} \in E$, dann sagen wir:
 - u und v sind **adjazent**.
 - u und v sind die **Endknoten** von e .
 - e ist **inzident** zu u (und zu v).



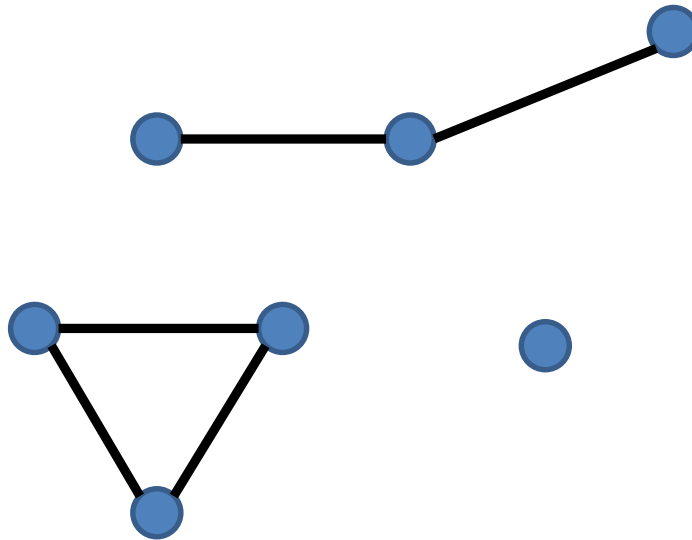
- Erreichbarkeit und Zusammenhang:
 - Sei $G = (V, E)$. Ein Knoten $u \in V$ ist **erreichbar** von $v \in V$, falls G einen **Pfad** (u, \dots, v) hat.
 - Die **Erreichbarkeitsrelation** $R_G \subseteq V \times V$ ist definiert durch: $(u, v) \in R$ gdw. v ist erreichbar von u .
 - **Erreichbarkeit** ist eine Äquivalenzrelation auf V .
 - Bemerkung: Wenn E als symmetrische Relation aufgefasst wird, dann gilt $R_G = E^*$.



- Erreichbarkeit und Zusammenhang:
 - Die von den Äquivalenzklassen induzierten Teilgraphen heißen die **(Zusammenhangs-)Komponenten** von G .
 - G heißt **zusammenhängend**, wenn er nur eine Komponente hat (jeder Knoten ist von jedem anderen Knoten erreichbar).



- Erreichbarkeit und Zusammenhang:
Beispiel: Dieser Graph besteht aus drei Zusammenhangskomponenten:



- Zusammenhangskomponenten:

Satz: Jeder Graph $G = (V, E)$ enthält mindestens $|V| - |E|$ viele Zusammenhangskomponenten.

Beweis: Durch Induktion über $|E|$.

Basis: $|E| = 0$. Dann gibt es $|V| = |V| - |E|$ Komponenten.

Schritt: $|E| > 0$. Man nehme eine Kante e weg. Der resultierende Graph hat mindestens $|V| - (|E| - 1)$ Komponenten (Ind.Vor.). Füge nun e erneut hinzu. Das reduziert die Anzahl der Komponenten um höchstens eins. G hat also mindestens

$|V| - (|E| - 1) - 1 = |V| - |E|$ Komponenten. \square



- Zusammenhangskomponenten:

Korollar: Für jeden zusammenhängenden Graph $G = (V, E)$ gilt: $|E| \geq |V| - 1$.

Beweis: Da ein zusammenhängender Graph aus genau einer Komponente besteht, folgt aus dem vorherigen Satz, dass $|V| - |E| \leq 1$. \square



- Adjazenz- und Inzidenzmatrix:
 - Neben den bisherigen Darstellungen können Graphen in Form von **Adjazenzmatrizen** und **Inzidenzmatrizen** dargestellt werden.
 - Bei Nummerierung der Knoten $V = \{u_1, \dots, u_n\}$ ist die **Adjazenzmatrix** von $G = (V, E)$ die symmetrische $n \times n$ -Matrix A mit Einträgen

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{falls } \{u_i, u_j\} \in E; \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

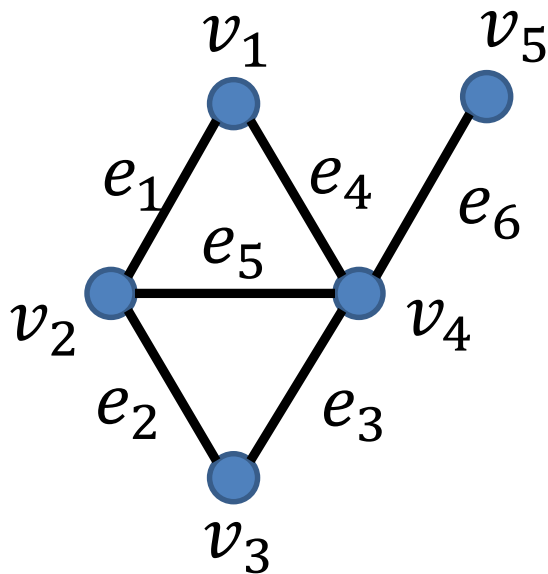


- Adjazenz- und Inzidenzmatrix:
 - Bei Nummerierung der Knoten $V = \{u_1, \dots, u_n\}$ und Kanten $E = \{e_1, \dots, e_m\}$ ist die **Inzidenzmatrix** von $G = (V, E)$ die $n \times m$ -Matrix B mit Einträgen

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{falls } u_i \text{ Endknoten von } e_j; \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$



- Adjazenz- und Inzidenzmatrix:



$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$B = \begin{matrix} & \begin{matrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$



- Isomorphe (strukturgleiche) Graphen:

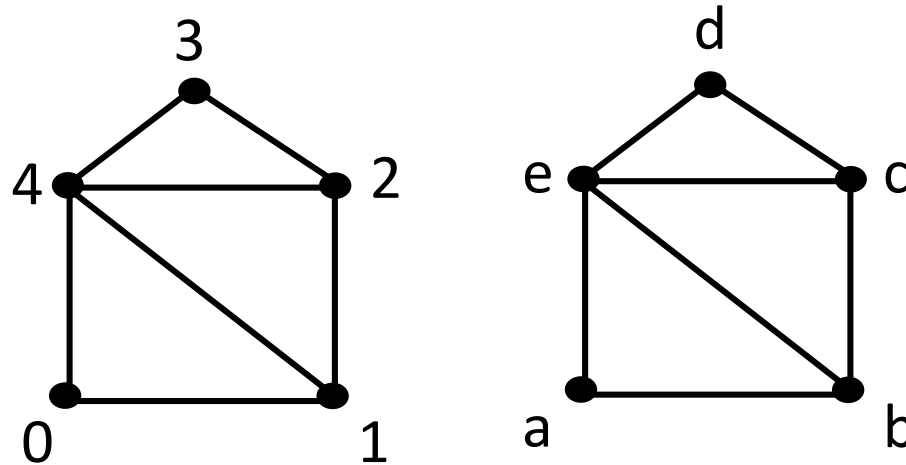
Zwei Graphen $G = (V, E)$ und $G' = (V', E')$ heißen **isomorph** (in Zeichen $G \cong G'$), falls es eine Bijektion $h: V \rightarrow V'$ gibt mit der Eigenschaft:

$$\forall u, v \in V: \{u, v\} \in E \leftrightarrow \{h(u), h(v)\} \in E'.$$

Die Abbildung h ist dann ein **Homomorphismus** (technische Bezeichnung einer **Umbenennung**) der Knotenmenge V .



- Isomorphe (strukturgleiche) Graphen:

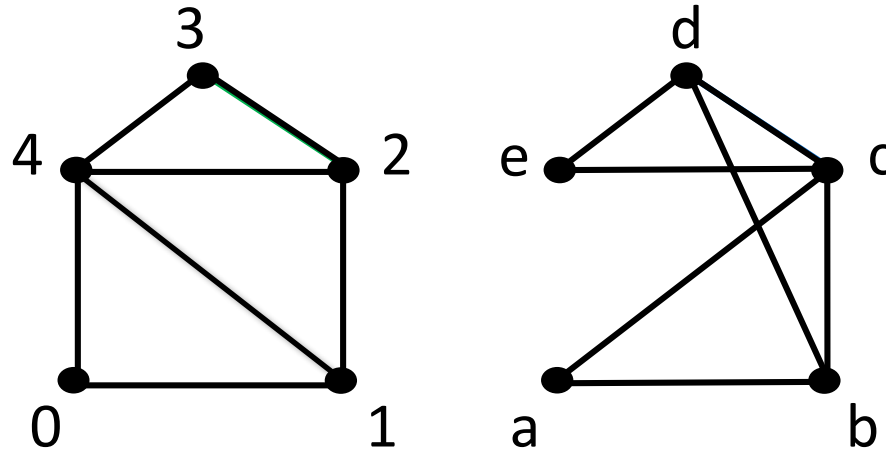


Die Abbildung ist: $0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4$
 $a \ b \ c \ d \ e$

Die Graphen sind offensichtlich isomorph.



- Isomorphe (strukturgleiche) Graphen:



Die Abbildung

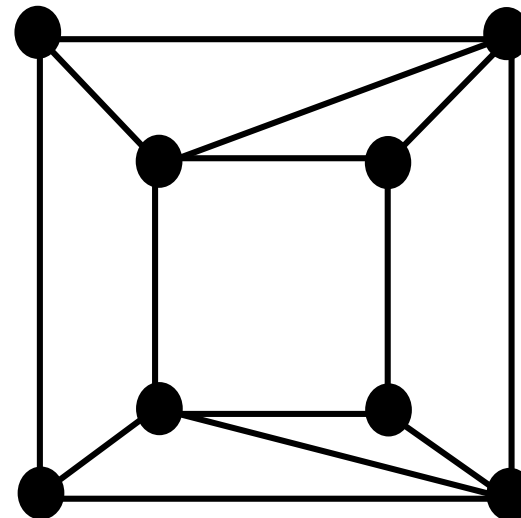
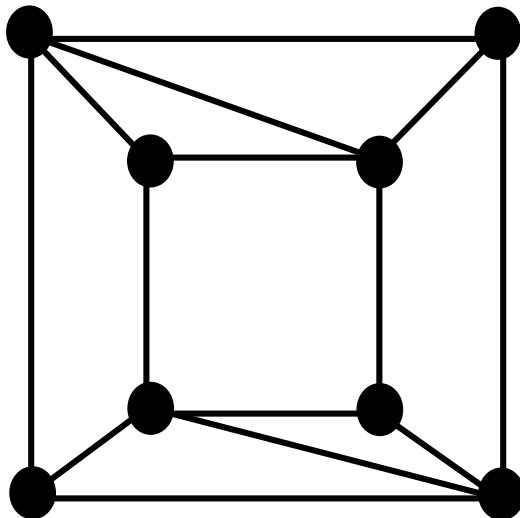
0	1	2	3	4
e	d	b	a	c

zeigt, dass auch diese zwei Graphen **isomorph** sind!



- Isomorphe Graphen:

Sind die beiden folgenden Graphen isomorph?



- Isomorphe Graphen:
 - Das Graphenisomorphieproblem:
 - **Gegeben**: Zwei Graphen G_1, G_2 (dargestellt als Mengen von Knoten und Kanten).
 - **Entscheide**, ob G_1 und G_2 isomorph sind.
 - Berühmtes Problem. Liegt in der Klasse NP. Kein polynomieller Algorithmus bekannt. Auch unbekannt, ob das Problem NP-vollständig ist.



Praktische Anwendungen in der Informatik:

- Graphen zur Darstellung von Computernetzen, Web,...
- Beschreibung von Datenabhängigkeiten („dependency graph“)
- Viele Probleme der Logistik (z.B. Platzierung von DHL-Knoten, Drehkreuze im Flugverkehr) durch Graphen beschreibbar
- Kürzeste-Wege-Probleme, Routenplanung

