

WS 2014/15

Diskrete Strukturen

Kapitel 4: Graphentheorie (Bäume)

Hans-Joachim Bungartz

Lehrstuhl für wissenschaftliches Rechnen

Fakultät für Informatik

Technische Universität München

http://www5.in.tum.de/wiki/index.php/Diskrete_Strukturen_-_Winter_14

- Graphentheorie
 - Grundlagen
 - **Bäume**
 - Euler- und Hamiltonkreise
 - Planarität und Färbungen
 - Matchings



- Bäume:

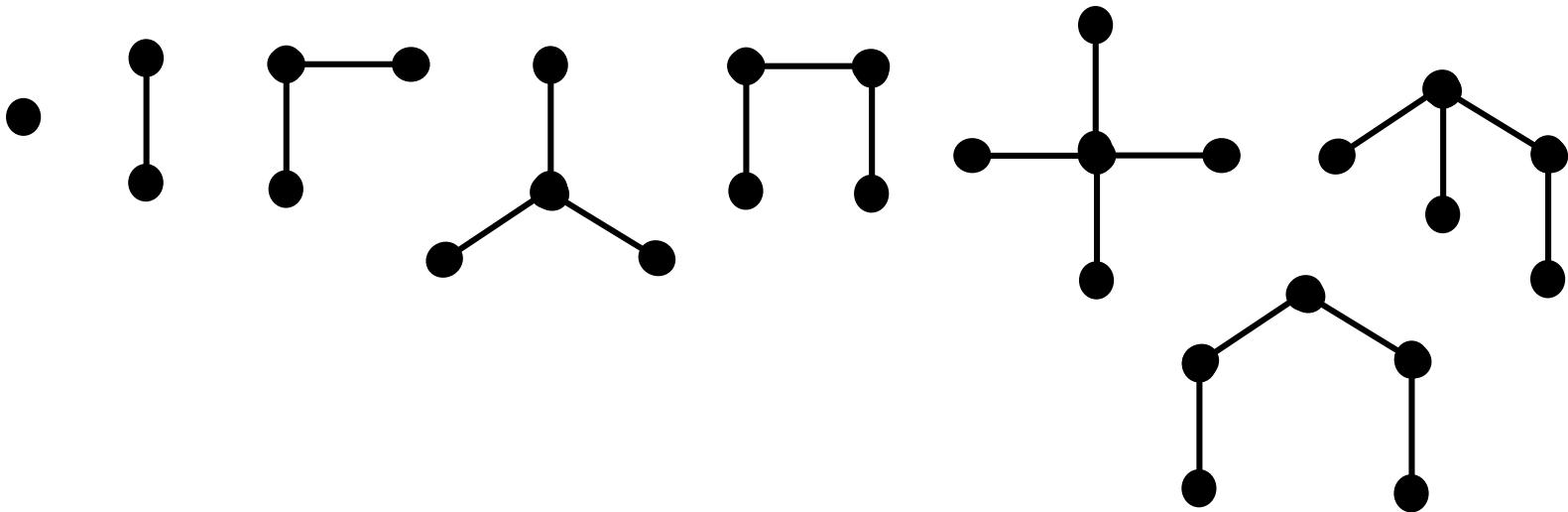
Definition: Ein ungerichteter Graph G heißt **Baum**, falls G **zusammenhängend** und **kreisfrei** ist.

Die Knoten von G mit Grad 1 heißen **Blätter** (**leaves**).

Alle anderen Knoten heißen **innere Knoten**.

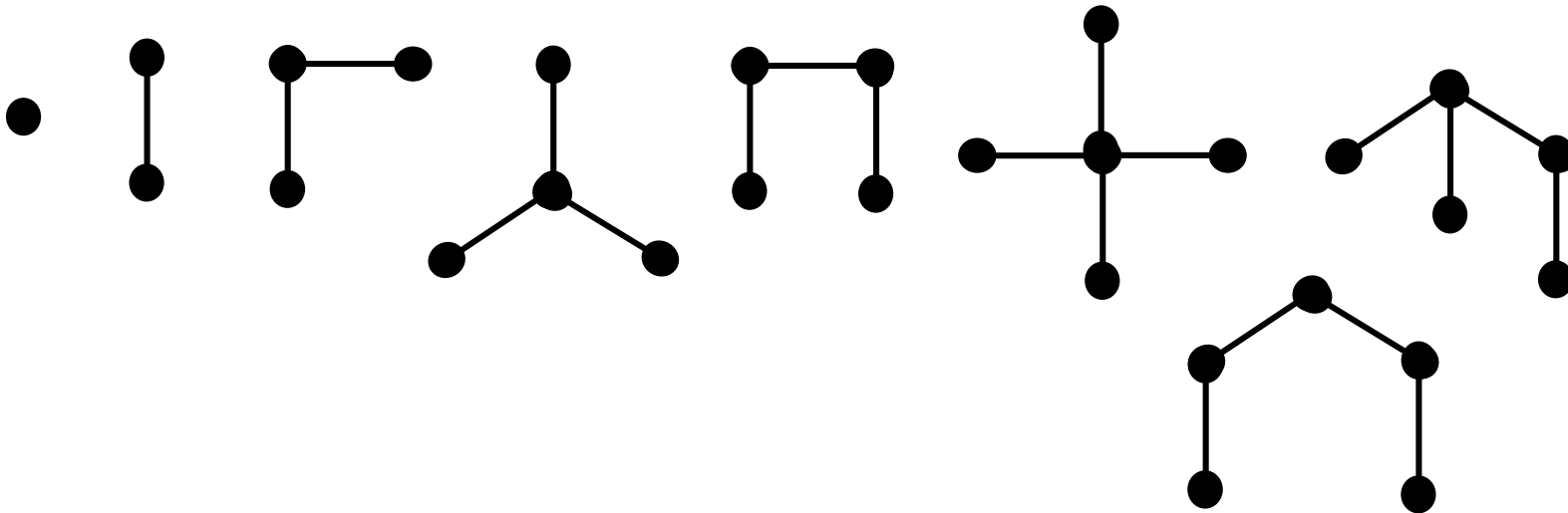


- Bäume mit höchstens 5 Knoten (bis auf Isomorphie):



- Wälder:

Definition: Ein Graph, dessen (Zusammenhangs-) Komponenten jeweils Bäume sind, heißt **Wald**.



- Eigenschaften von Bäumen:

Satz: Jeder Baum $T = (V, E)$ mit $|V| \geq 2$ enthält mindestens zwei Blätter.

Beweis (informell): Man nehme eine beliebige Kante und laufe nach „links“ und „rechts“ so weit wie möglich. Da man nicht in einen Kreis geraten kann endet man irgendwann in zwei verschiedenen Blättern. \square



- Eigenschaften von Bäumen:

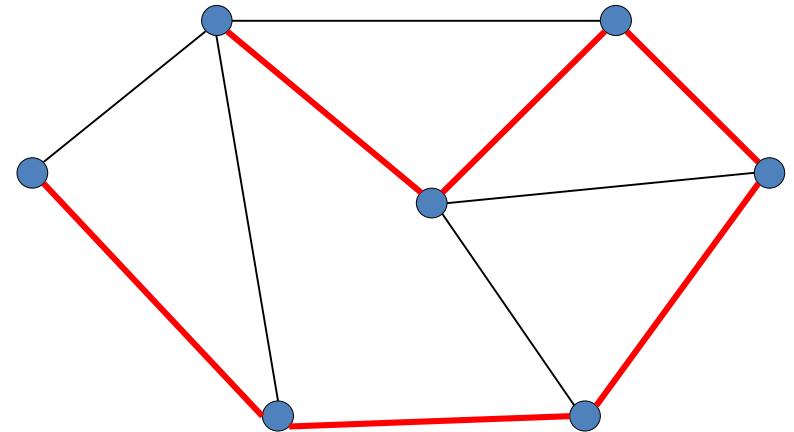
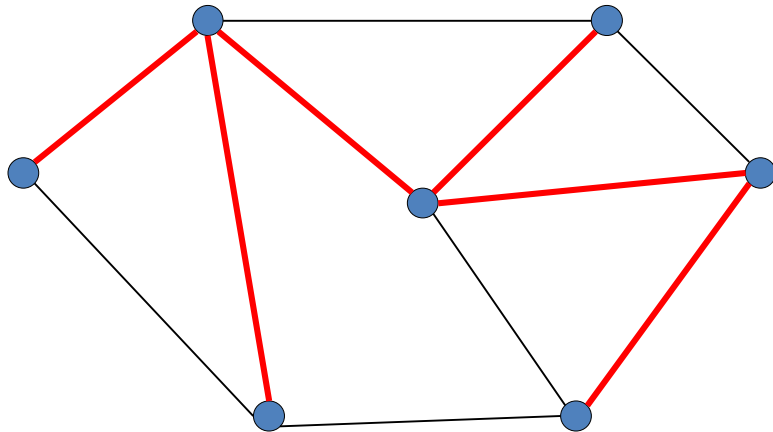
Satz: Ist $T = (V, E)$ ein Baum mit $|V| \geq 2$ Knoten und $v \in V$ ein Blatt, so ist der Graph $T[V \setminus \{v\}]$ ebenfalls ein Baum.

Beweis: Durch Wegnahme eines Blattes bleibt der Baum kreisfrei. Da Pfade zwischen beliebigen Knoten u und w mit $u \neq v \neq w$ erhalten bleiben, ist $T[V \setminus \{v\}]$ auch zusammenhängend. \square



- Eigenschaften von Bäumen:

Definition: Ein Teilgraph $T = (V', E')$ von $G = (V, E)$ heißt **Spannbaum** von G , falls T ein Baum ist und $V' = V$.



- Eigenschaften von Bäumen:

Satz: Jeder zusammenhängende Graph $G = (V, E)$ enthält mindestens einen Spannbaum.

Beweis: Durch Induktion über $|E|$.

Basis: $|E| = 0$. Dann ist G ein Baum und auch ein Spannbaum.



- Eigenschaften von Bäumen:

Schritt: $|E| \geq 1$. Wir betrachten zwei Fälle.

Fall 1: G ist ein Baum. Dann ist G auch Spannbaum.

Fall 2: G ist kein Baum. Dann enthält G einen Kreis. Entferne eine beliebige Kante des Kreises. Das Ergebnis G' ist noch zusammenhängend und enthält einen Spannbaum T (**Induktionsannahme**). T ist auch Spannbaum von G . \square



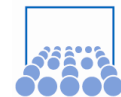
- Eigenschaften von Bäumen:

Satz: Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

(1) $G = (V, E)$ ist ein Baum.

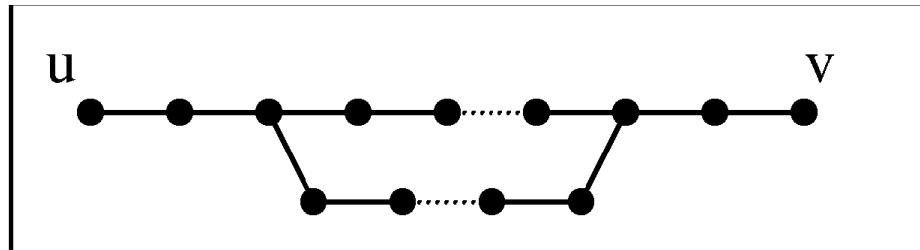
(2) Je zwei Knoten $u, v \in V$ sind durch genau einen Pfad verbunden.

(3) G ist zusammenhängend und $|V| = |E| + 1$.



- Eigenschaften von Bäumen:

(1) \Leftrightarrow (2): G hat keinen Kreis gdw. keine zwei Knoten durch zwei verschiedene Pfade verbunden sind.



G ist zusammenhängend gdw. je zwei Knoten durch mindestens einen Pfad verbunden sind.



- Eigenschaften von Bäumen:

(1) \Rightarrow (3): Sei $G = (V, E)$ ein Baum. Wir zeigen $|V| = |E| + 1$ durch Induktion über $|V|$:

Basis: $|V| = 1$. Dann ist $|E| = 0$ und wir sind fertig.

Schritt: $|V| \geq 2$. Sei u ein Blatt von G (G hat mindestens zwei Blätter).

Entferne u sowie die Kante, die u mit dem Rest von G verbindet. Sei $G' = (V', E')$ der resultierende Baum.

Mit $|V'| < |V|$ gilt $|V'| = |E'| + 1$ (Ind.Vor.). Mit $|V| = |V'| + 1$ und $|E| = |E'| + 1$ gilt $|V| = |E| + 1$.



- Eigenschaften von Bäumen:

(3) \Rightarrow (1): Sei $G = (V, E)$ zusammenhängend mit $|V| = |E| + 1$.

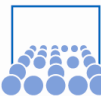
G enthält einen Spannbaum $T = (V, E')$.

Nach dem eben Bewiesenen gilt $|V| = |E'| + 1$.

Aus $|V| = |E| + 1$ und $|V| = |E'| + 1$ folgt $|E| = |E'|$.

Da E' eine Teilmenge von E ist, gilt $E = E'$.

Es folgt $G = T$. \square



- Eigenschaften von Bäumen:

Korollar: Seien $T = (V, E)$ ein Baum mit $|V| = n$ und (d_1, d_2, \dots, d_n) die **Gradfolge** von T . Es gilt:

$$\sum_{i=1}^n d_i = 2|E| = 2|V| - 2 = 2n - 2.$$



- Mehr zu Spannbäumen:

Satz: Die Anzahl aufspannender Bäume des vollständigen Graphen mit $V = \{1, \dots, n\}$ beträgt

$$t(n) = n^{n-2}.$$

(Achtung: die Knoten sind unterscheidbar!)

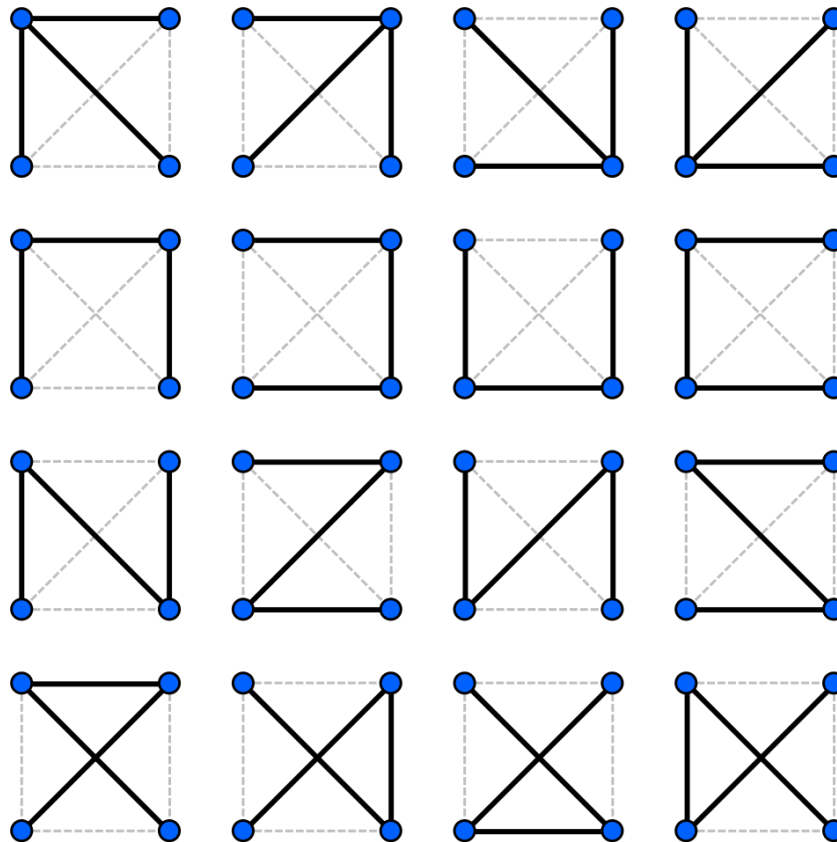
$$t(2) = 1 \quad t(5) = 625 \quad t(8) = 262144$$

$$t(3) = 3 \quad t(6) = 1296 \quad t(9) = 4782969$$

$$t(4) = 16 \quad t(7) = 16807 \quad t(10) = 10^8$$



- Die 16 Spannbäume des K_4 (Wikipedia):



- Spannbäume:

Satz (Cayley): Es gibt n^{n-2} **markierte** Bäume mit n Knoten.

Beweisskizze: Wir definieren eine Abbildung (**Prüfer-Codes**) von der Menge der markierten Bäume mit n Knoten in die Menge $\{1, \dots, n\}^{n-2}$ (siehe die nächsten Folien).

Wir zeigen, dass diese Abbildung eine Bijektion ist (siehe Lemma).

Es folgt, dass die Anzahl der markierten Bäume gleich $|\{1, \dots, n\}^{n-2}| = n^{n-2}$ ist. \square



- Prüfer-Codes (Heinz Prüfer 1896-1934):

Eingabe: Baum $T = (V, E)$ mit $V = \{1, 2, \dots, n\}$,
 $n \geq 2$.

Wiederhole bis $|V| = 2$:

Sei $v \in V$ das kleinste Blatt von V .

Sei $u \in V$ der einzige Nachbar von v in V .

Setze $V := V \setminus \{v\}$ und $E := E \setminus \{\{u, v\}\}$.

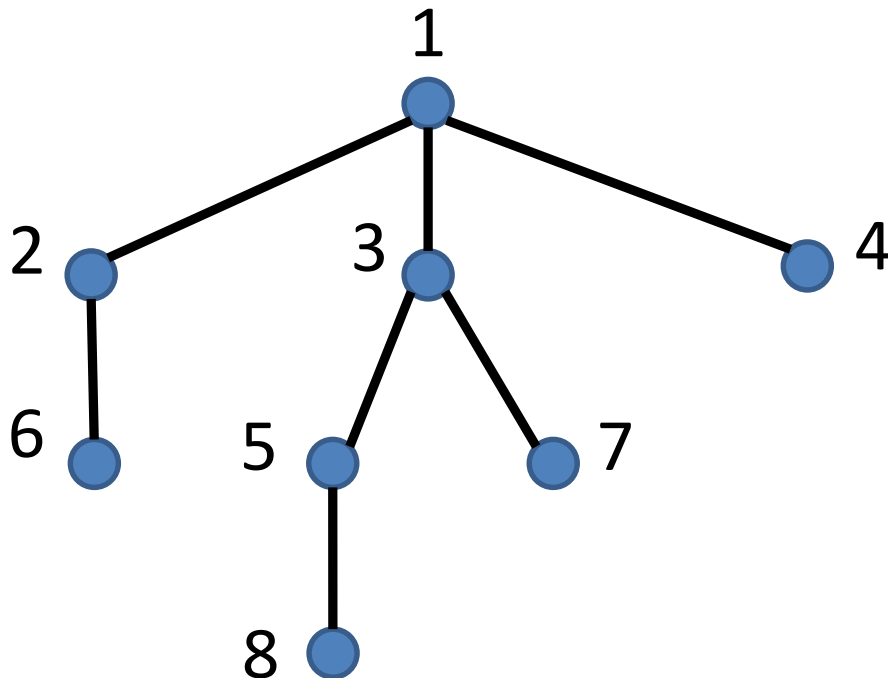
Gebe u aus. (**Achtung: u , nicht v !**)

Ausgabe: Folge (u_1, \dots, u_{n-2}) , genannt **Prüfer-Code** von T .



- Prüfer-Codes: <http://mathworld.wolfram.com/PrueferCode.html>

Beispiel:

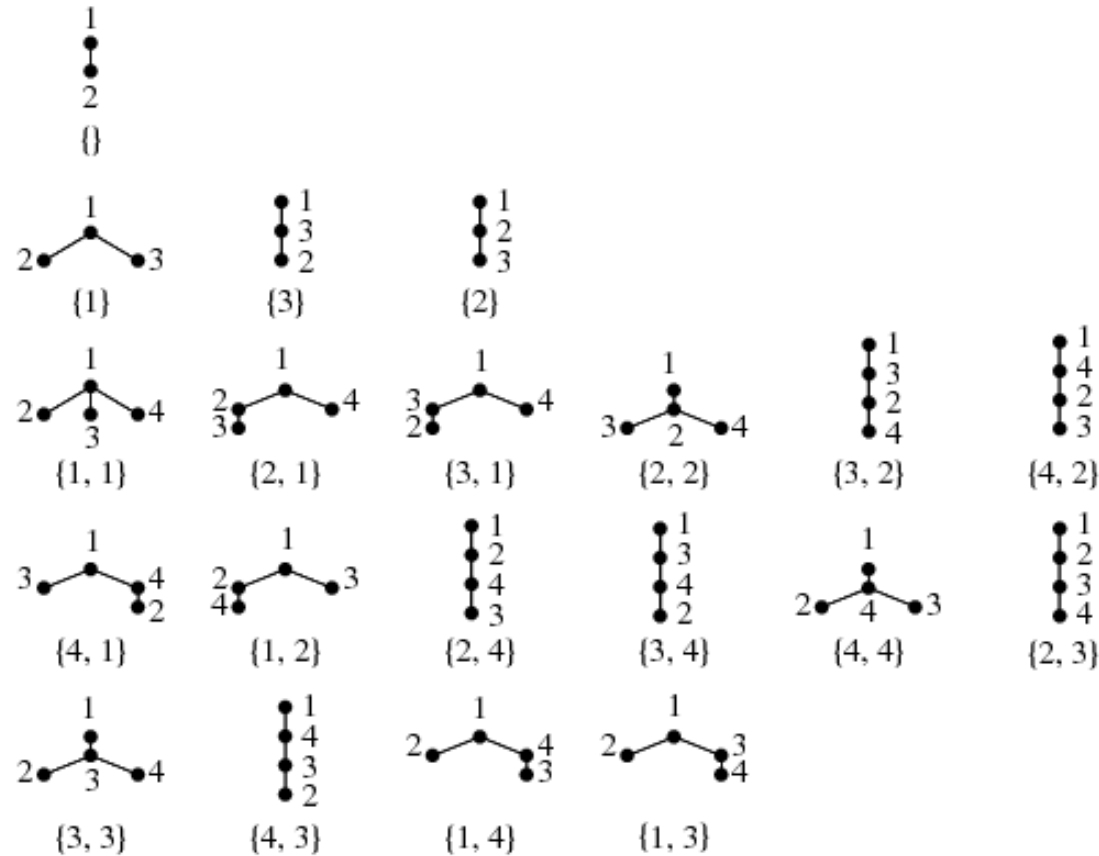


(1,2,1,3,3,5)



- Prüfer-Codes: <http://mathworld.wolfram.com/PrueferCode.html>

Beispiel:



- Prüfer-Codes:

Lemma: Zu einem gegebenen Prüfer-Code $\gamma = (p_1, \dots, p_{n-2})$ mit Elementen aus $[n] = \{1, \dots, n\}$ gibt es einen **eindeutigen** markierten Baum T_γ mit Knotenmenge $[n]$.

Beweis: Durch Induktion über die Länge des Codes.

Basis: $n = 2$. Es gibt genau einen Baum mit Knotenmenge $\{1, 2\}$.

Schritt: $n > 2$. Das erste Blatt b_1 , das gepflückt wurde, ist der kleinste Knoten in $[n] \setminus \{p_1, \dots, p_{n-2}\}$. Mit der Ind. Vor. gibt es einen eindeutigen Baum $T_{\gamma'} = (V', E')$ für $\gamma' = (p_2, \dots, p_{n-2})$.

Es gilt $T_\gamma = (V' \cup \{b_1\}, E' \cup \{\{b_1, p_1\}\})$. \square



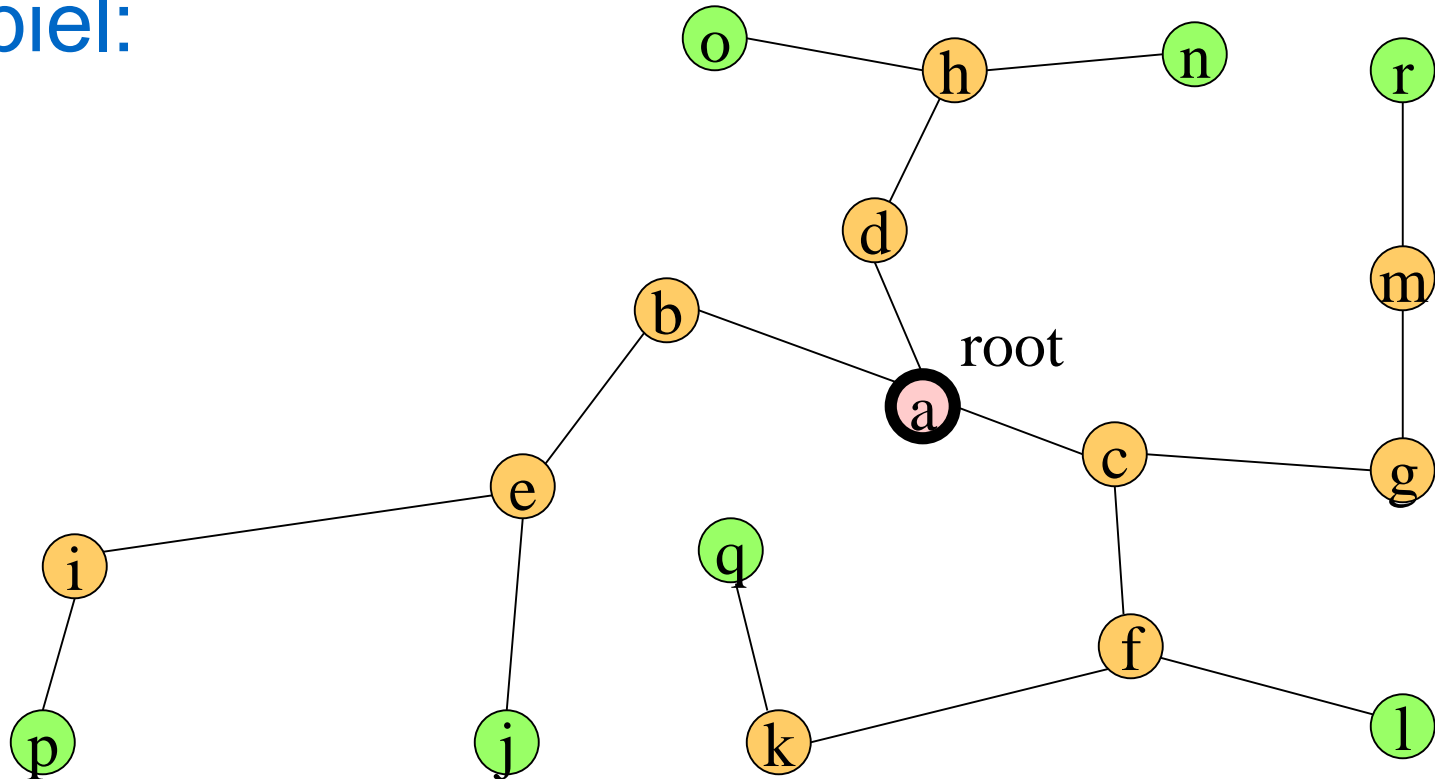
- Wurzelbäume:

Definition: Ein **Wurzelbaum** (rooted tree) ist ein Tupel (T, v) , wobei $T = (V, E)$ ein Baum ist und $v \in V$ ein Knoten, den man auch als **Wurzel** des Baumes bezeichnet.

- Da es in einem Baum zwischen je zwei Knoten genau einen Pfad gibt, gibt es in einem Wurzelbaum von jedem Knoten genau einen Pfad zur Wurzel.



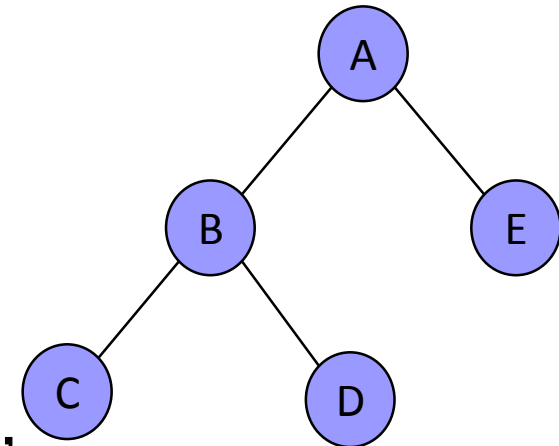
- Wurzelbäume:
Beispiel:



- **Wurzelbäume:**

Im Bild eines Wurzelbaumes wird die Wurzel in der Regel oben angeordnet und die Wege werden von der Wurzel weggerichtet betrachtet.

- Wurzelbäume dienen zur graphischen Darstellung hierarchischer Strukturen, z.B. Vererbungen, Stammbäume, grammatikalische Strukturen, usw.



- **Vorgänger, Nachfolger, Kind, Höhe:**
 - Die Knoten entlang eines Pfades von $v \in V$ zur Wurzel heißen **Vorgänger** von v .
 - Der zu v benachbarte Vorgänger ist der **Vater** bzw. die **Mutter** von v .
 - Die Knoten $u \in V$, von denen der Pfad zur Wurzel den Knoten $v \in V$ enthält, heißen **Nachfolger** von v .
 - Die zu v benachbarten Nachfolger sind die **Kinder** von v .
 - Die **Höhe** $h(T)$ eines Baumes T ist die Länge des längsten Pfades von der Wurzel zu einem der Blätter plus 1.



- Binäre Wurzelbäume:

- Ein **Binärbaum** ist ein Wurzelbaum, in dem jeder Knoten höchstens 2 unmittelbare Nachfolger hat.
- Ein **vollständiger** Binärbaum ist ein Binärbaum, in dem jeder innere Knoten genau zwei unmittelbare Nachfolger hat und alle Blätter denselben Abstand zur Wurzel haben.

Satz: Ein binärer Wurzelbaum der Höhe k hat höchstens $2^k - 1$ Knoten und höchstens 2^{k-1} Blätter. Der vollständige Baum der Höhe k hat genau $2^k - 1$ Knoten und 2^{k-1} Blätter.

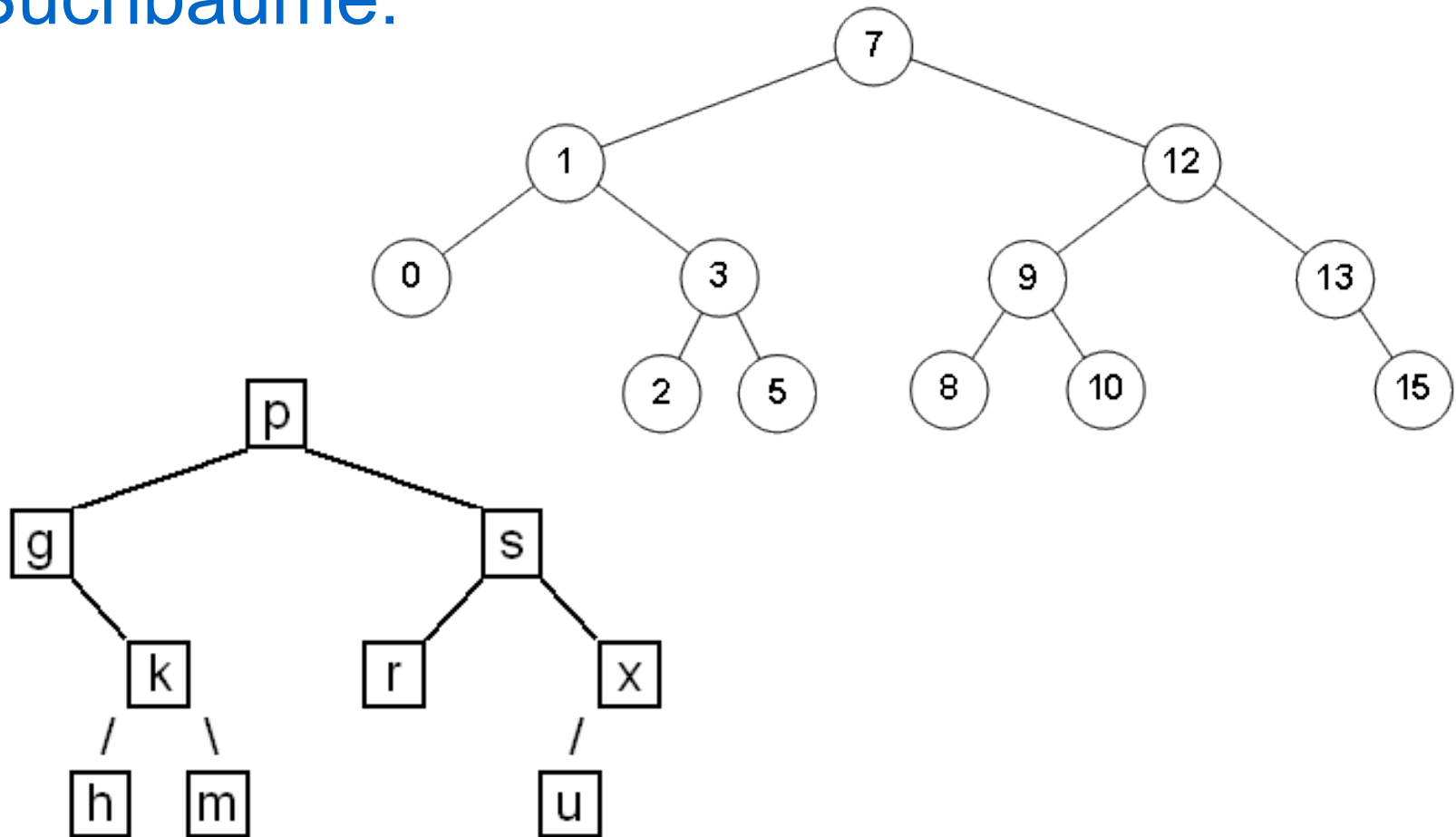


- Suchbäume:

- Ein Suchbaum ist ein Binärbaum mit den folgenden drei Eigenschaften:
 - Die Knotenmenge ist linear geordnet.
 - Die Kinder eines inneren Knoten sind beschriftet mit: linkes Kind, rechtes Kind.
 - Für alle inneren Knoten v gilt:
 - Für alle Knoten u im linken Unterbaum von v gilt: $u < v$.
 - Für alle Knoten u im rechten Unterbaum von v gilt: $u > v$.



- Suchbäume:



Praktische Anwendungen in der Informatik:

- Sortierverfahren, die auf Bäumen operieren
- Bäume zur Repräsentation von hierarchischen Algorithmen und Datenstrukturen
- Spannbäume zur Konstruktion von kostengünstigen zusammenhängenden Netzwerken (z.B. Telefon- oder Computernetzwerke)

