WS 2014/15

Diskrete Strukturen

Kapitel 4: Graphentheorie (Euler-Hamilton)

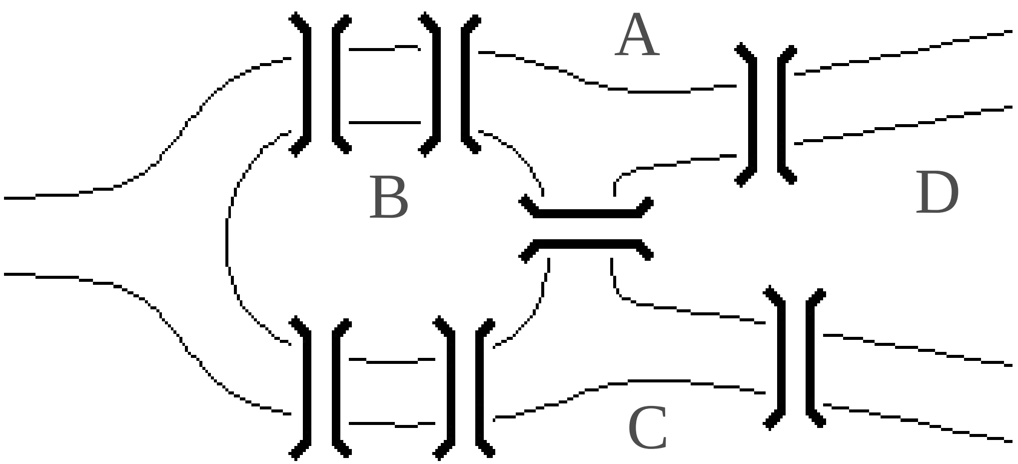
Hans-Joachim Bungartz

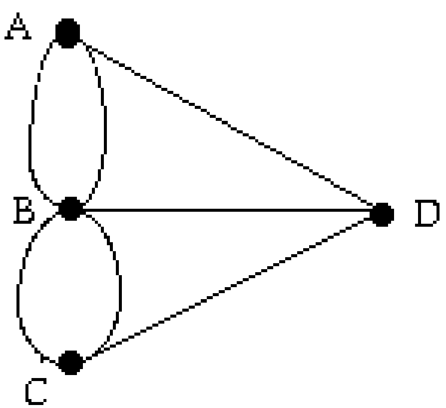
Lehrstuhl für wissenschaftliches Rechnen
Fakultät für Informatik
Technische Universität München

http://www5.in.tum.de/wiki/index.php/Diskrete_Strukturen_-_Winter_14

- Graphentheorie
  - Grundlagen
  - Bäume
  - Euler- und Hamiltonkreise
  - Planarität und Färbungen
  - Matchings

- Das Königsberger Brückenproblem:
  (Leonhard Euler (1707-1783))
  - Können wir so durch die Stadt laufen, dass wir jede Brücke genau einmal überqueren und wieder an den Ausgangspunkt zurückkehren?





Äquivalenter Multigraph

- Euler-Touren:

  Definition: Eine Euler-Tour in einem Graphen ist ein Weg, der jede Kante genau einmal enthält und dessen Anfangs- und Endknoten identisch sind.

  Ein Graph, der eine Euler-Tour hat, heißt eulersch.

- Euler-Touren:

  Satz (Euler): Ein zusammenhängender Graph besitzt genau dann eine Euler-Tour, wenn alle Knoten des Graphen geraden Grad haben.

  Beweis: („⇒“): Man geht in jeden Knoten genauso oft hinein wie man aus ihm hinausgeht.

  („⇐“): Annahme: Zusammenhängender Graph $G = (V, E)$, alle Knoten haben geraden Grad.

  Beweis durch Induktion über $|E|$.

- Euler-Touren:

Basis: $|E| = 0$. Dann $|V| = \{v\}$, und der Weg (v) ist eine Euler-Tour.

Schritt: $|E| > 0$. Ausgehend von einem beliebigen Knoten v wähle einen maximalen Weg W von Kanten, der jede Kante höchstens einmal besucht.

W endet wieder in v (sonst gibt es wegen des geraden Grads immer eine unbesuchte Kante, mit der der Weg verlängert werden kann).

- Euler-Touren:

  Entferne aus G alle Kanten von W. Die Knoten des entstehenden Graphen $G´$ haben immer noch geraden Grad (man geht in jeden Knoten genauso oft hinein, wie man aus ihm hinausgeht).

  Aus der Induktionsannahme folgt: Jede Zusammenhangskomponente von G'hat eine Euler-Tour.

  Wir bilden eine Euler-Tour von G wie folgt: Wenn W zum ersten Mal eine Komponente von G' besucht, dann fügen wir W eine Euler-Tour der Komponente hinzu.

- Euler-Touren:

$W = (a, b, e, f, a)$

Komponenten von G':

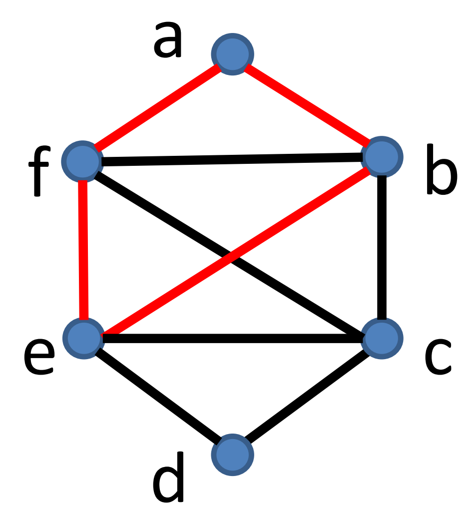
$G'_1 = (\{a\}, \emptyset)$
$G'_2 = (\{b, c, d, e, f\}, E_2)$

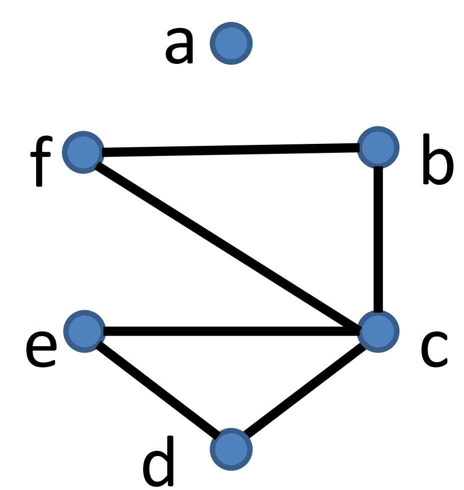
Euler-Touren von G'_1 und G'_2:

(a)
(b, c, d, e, c, f, b)

Euler-Tour von G :

$(a, b, c, d, e, c, f, b, e, f, a)$



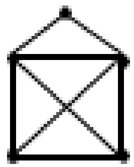


- Hamilton-Kreise:

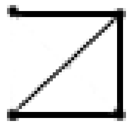
  Definition: Ein Hamilton-Kreis in einem Graphen ist ein Kreis, der alle Knoten genau einmal enthält.

  Ein Graph heißt hamiltonsch, wenn er einen Hamilton-Kreis enthält.

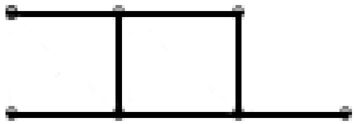
- Hamilton-Kreise und Hamilton-Wege:



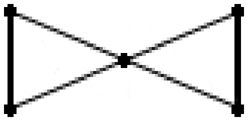
→ Hamiltonscher Graph



→ enthält nur Hamiltonwege

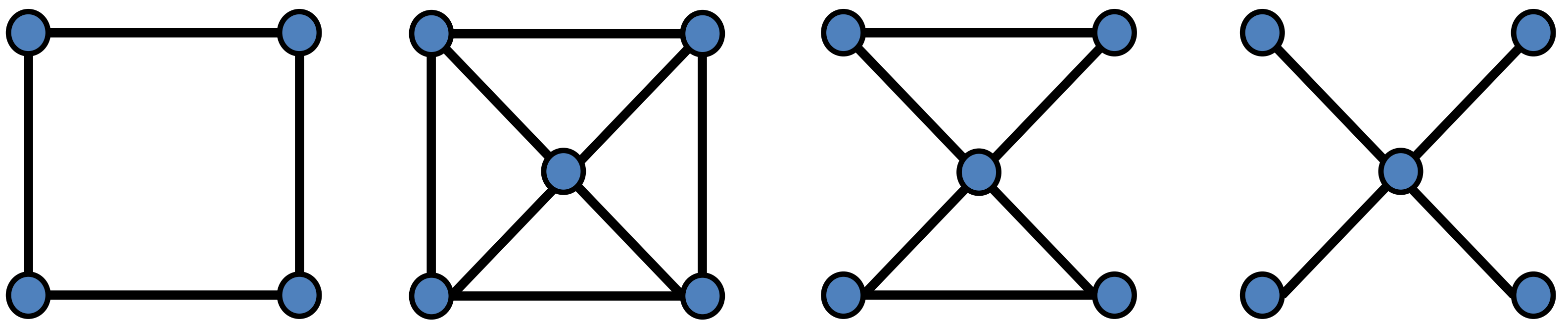


→ enthält weder Hamiltonwege noch Hamiltonkreise



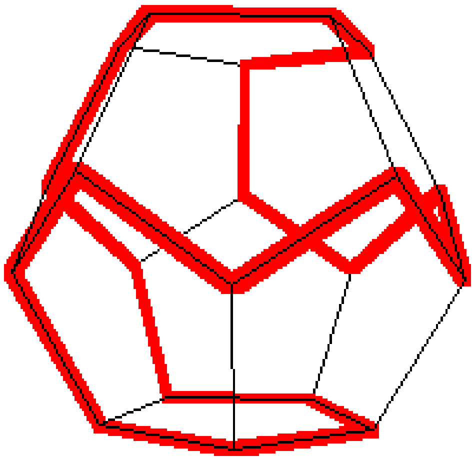
→ enthält nur Hamiltonwege

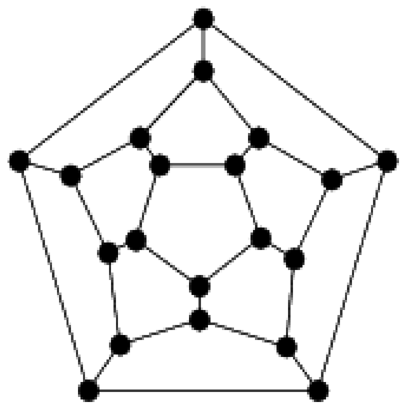
- Hamiltonsch vs. eulersch:

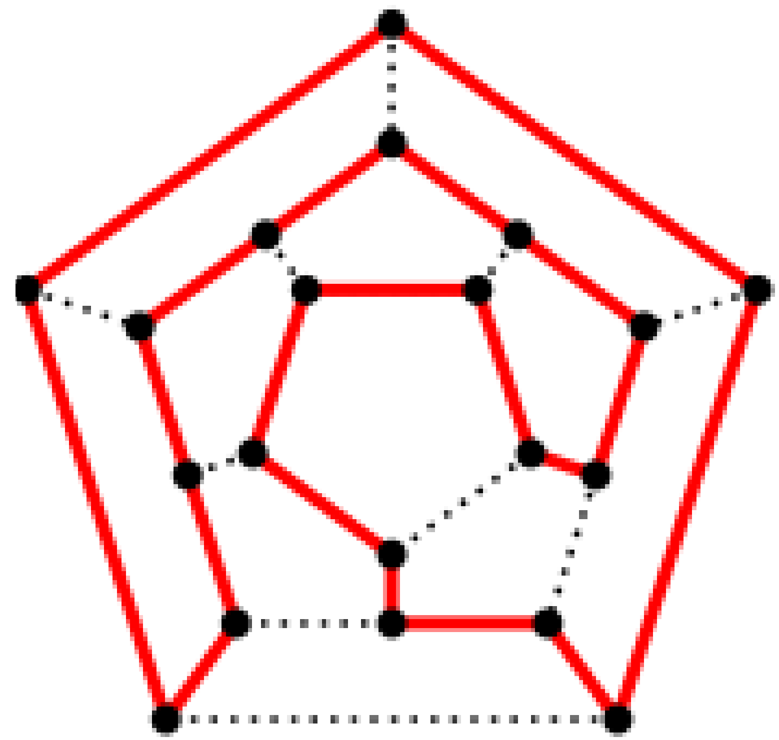


hamiltonsch	hamiltonsch	eulersch	$\neg$ hamiltonsch
eulersch	$\neg$ eulersch	$\neg$ hamiltonsch	$\neg$ eulersch

- Hamilton-Kreis in einem Dodekaeder:







- Hamilton-Kreise:

  Das Problem des Rösselsprungs auf dem Schachbrett:

  – Hierbei handelt es sich um das Problem, mit einem Springer alle Felder eines Schachbretts genau einmal zu erreichen und wieder zum Ausgangsfeld zurückzukehren.

- Hamilton-Kreise:

  Das Problem des Rösselsprungs auf dem Schachbrett:

  – Der Rösselsprunggraph $R(8)$ wird wie folgt definiert: Jedem der $8 \times 8 = 64$ Felder lässt man eine Ecke von $R(8)$ entsprechen und verbindet zwei Ecken durch eine Kante genau dann, wenn zwischen den entsprechenden Feldern ein Springerzug möglich ist. Das Rösselsprungproblem zu lösen ist äquivalent dazu, in $R(8)$ einen Hamilton-Kreis zu finden.

- Hamilton-Kreise:

  Das Problem des Rösselsprungs auf dem Schachbrett – eine von Euler gefundene Lösung:

58	43	60	37	52	41	62	35
49	46	57	42	61	36	53	40
44	59	48	51	38	55	34	63
47	50	45	56	33	64	39	54
22	7	32	1	24	13	18	15
31	2	23	6	19	16	27	12
8	21	4	49	10	25	14	17
3	30	9	20	5	28	11	26

- Hamilton-Kreise:

  Die Aufgabe, einen Hamilton-Kreis zu finden, ist wesentlich schwerer als eine Euler-Tour zu finden; es ist ein NP-vollständiges Problem.

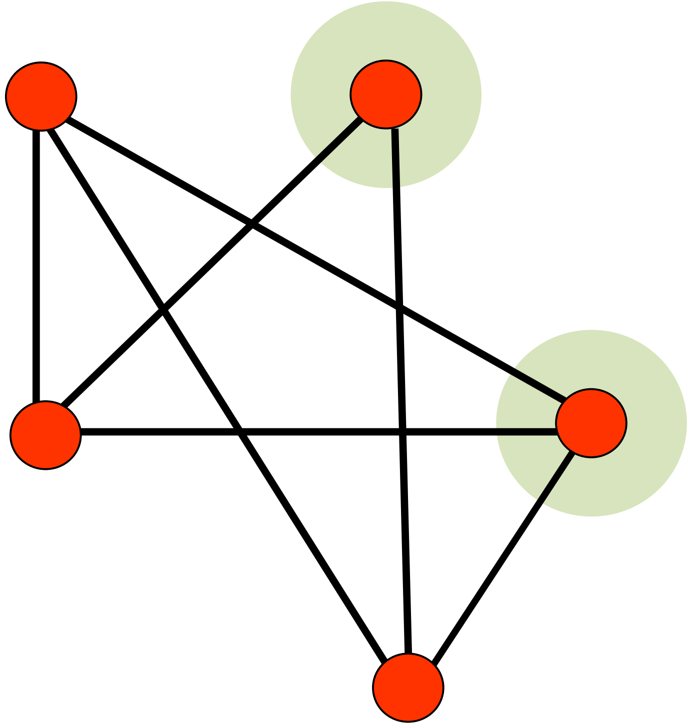
  Das systematische Ausprobieren aller Möglichkeiten ist für eine große Anzahl von Knoten nicht möglich, da es $O(n!)$ Möglichkeiten gibt.

- Hamiltonsche Graphen:

  Wir geben eine hinreichende Bedingung für die Existenz eines Hamilton-Kreises an.

  Satz (Kriterium von Ore): Sei G ein zusammenhängender Graph mit n Knoten (keine Mehrfachkanten). Ist die Summe des Grades je zweier nicht-adjazenter Knoten mindestens n, so enthält G einen Hamilton-Kreis.

- Hamiltonsche Graphen:



Praktische Anwendungen in der Informatik:

- Komplexitätstheorie: Hamilton-Kreis ist Prototyp eines „schwierigen“ Problems. Kann man dieses „effizient“ lösen, dann lassen sich alle „schwierigen“ Probleme „effizient“ lösen.
- Routenplanung, optimale Touren