WS 2014/15

Diskrete Strukturen

Kapitel 4: Graphen (Planare Graphen, Färbung)

Hans-Joachim Bungartz

Lehrstuhl für wissenschaftliches Rechnen
Fakultät für Informatik
Technische Universität München

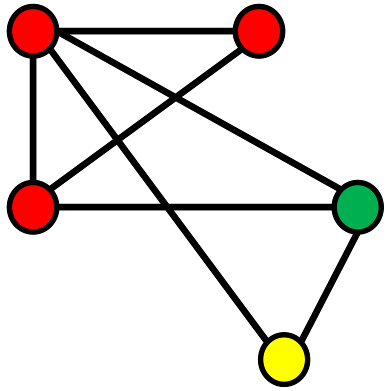
http://www5.in.tum.de/wiki/index.php/Diskrete_Strukturen_-_Winter_14

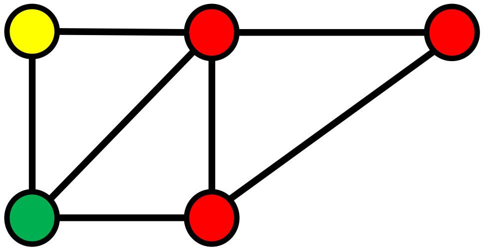
- Graphentheorie
  - Grundlagen
  - Bäume
  - Euler- und Hamiltonkreise
  - Planarität und Färbungen
  - Matchings

- Planare Graphen:

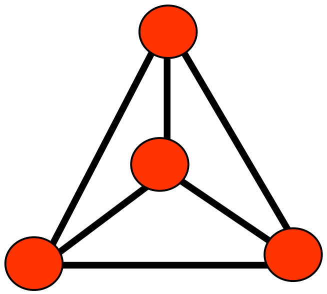
Definition: Ein Graph ist planar, wenn man ihn auf der Ebene ohne Kantenüberschneidungen zeichnen kann.

Eine ebene Darstellung eines Graphen ist eine Darstellung ohne Kantenüberschneidungen. Wir sprechen von einem ebenen Graphen (eigentlich inkorrekt).

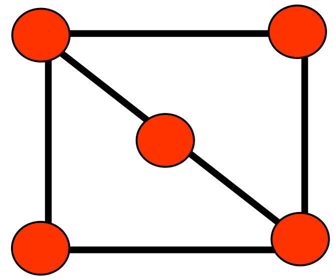




- Planare Graphen:



K_4

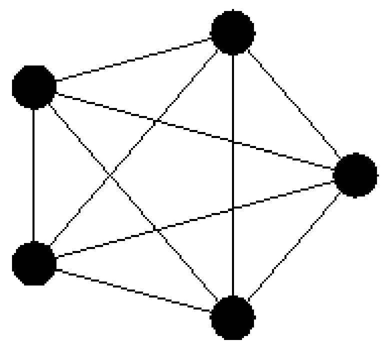


$K_{2,3}$

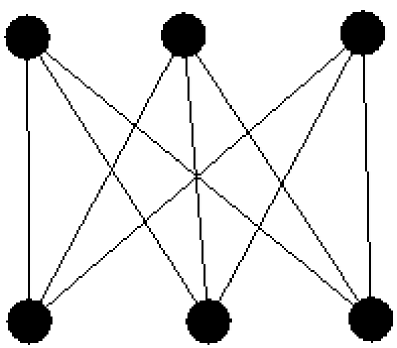
planar

nicht planar

(Beweis kommt später)



K_5



$K_{3,3}$

- Planare Graphen:

Satz (Eulersche Polyederformel-EPf): Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender ebener Graph. Dann gilt:

$$|R| := \#\text{Gebiete} = |E| - |V| + 2.$$

Die Gebiete sind die zusammenhängenden Teile der Ebene, die durch das Zerschneiden der Ebene entlang der Kanten entstehen. Das äußere Gebiet zählt man mit.

Korollar: In jeder planaren Darstellung eines Graphen bleibt die Anzahl der Gebiete gleich.

- Planare Graphen:

Beweis (Eulersche Polyederformel):

Da G zusammenhängend ist, gilt $|E| \geq |V| - 1$.

Durch Induktion über $n = |E| - |V| + 1$.

Basis: $n = 0$. Mit $|E| = |V| - 1$ ist G ein Baum. Da Bäume keine Kreise enthalten, gilt $|R| = 1$. Es folgt $|R| = 1 = |E| - |V| + 2$.

Induktionsannahme: für Graphen mit $|E| - |V| + 1 = n$ gilt die EPf.

- Planare Graphen:

  Schritt: Sei G mit $|E| - |V| + 1 = n + 1$.

  Dann ist G kein Baum und muss (da zusammenhängend) einen Kreis enthalten, der zwei Gebiete voneinander trennt.

  Wenn wir eine Kante aus dem Kreis löschen, dann verschmelzen wir zwei Gebiete und reduzieren die Anzahl der Gebiete um 1.

  Für den entstehenden Graph gilt nach Induktionsannahme die Polyederformel, und somit auch für den Graphen G. $\square$

- Planare Graphen:

Korollar 1: Für jeden planaren Graphen $G = (V, E)$ mit $|V| \geq 3$ Knoten gilt: $|E| \leq 3|V| - 6$.

Beweis: Da jedes Gebiet durch mindestens 3 Kanten begrenzt ist und jede Kante höchstens 2 Gebiete begrenzt, gilt $3|R| \leq 2|E|$.

Die EPf ergibt $2/3\,|E| \geq |R| = |E| - |V| + 2$. □

Korollar 2: Jeder planare Graph hat einen Knoten mit Grad höchstens 5.

Beweis: Sonst gilt $|E| \geq 3|V|$, im Widerspruch zu Korollar 1.

• Planare Graphen:

Korollar 3: Der K_5 (5 Knoten, 10 Kanten) ist nicht planar.

Beweis: Für den K_5 gilt $|E| > 3|V| - 6$.

Korollar 4: Der $K_{3,3}$ (6 Knoten, 9 Kanten) ist nicht planar.

Beweis: Durch Widerspruch.

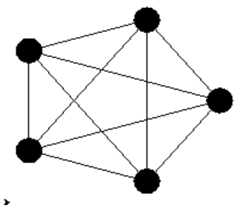
Wenn $K_{3,3}$ planar ist, dann gilt $|R| = 5$ (EPf).

Jedes Gebiet wird von mindestens 4 Kanten begrenzt ($K_{3,3}$ ist bipartit) und daher $4|R| \leq 2|E|$.

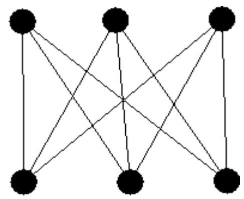
Mit $|R| = 5$ und $|E| = 9$ folgt $20 \leq 18$. Widerspruch.

- Planare Graphen:

nicht planar



K_5



$K_{3,3}$

Definition: Ein Unterteilungsgraph eines Graphen G ist ein Graph, der dadurch entsteht, dass Kanten von G durch Pfade ersetzt werden.

Fakt: Ein Unterteilungsgraph von K_5 oder $K_{3,3}$ ist nicht planar.

Fakt: Ein Graph, der einen Unterteilungsgraphen von K_5 oder $K_{3,3}$ als Teilgraphen besitzt, ist nicht planar.

- Planare Graphen:

  Satz (Kuratowski, 1930): Ein Graph G ist genau dann nicht planar, wenn er einen Teilgraphen besitzt, der ein Unterteilungsgraph des K_5 oder des $K_{3,3}$ ist.

  Dieser Satz führt sofort zu einem (ineffizienten) Algorithmus für das Planaritätsproblem.

- Färbung von Graphen:

  Frage: 7 Praktika werden angeboten. Jeder Studierende muss zwei wählen und absolvieren. Folgende Paare werden von mindestens einem Studierenden gewählt:

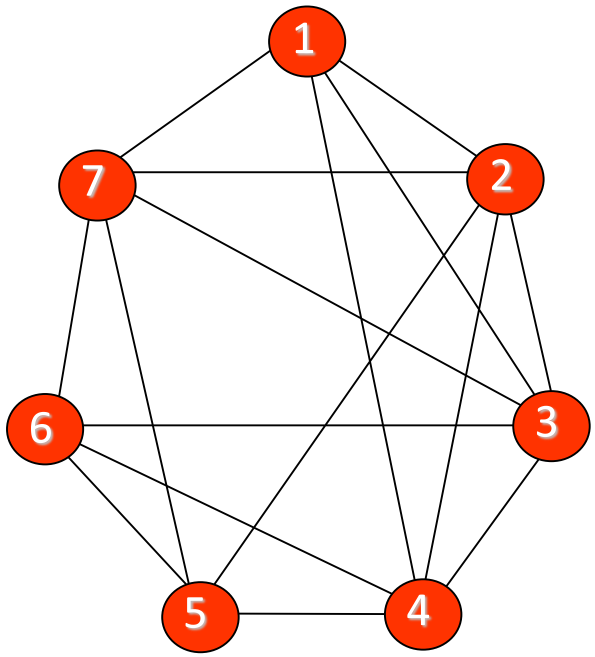
  $(1,2)\ (1,3)\ (1,4)\ (1,7)\ (2,3)\ (2,4)\ (2,5)\ (2,7)$

  $(3,4)\ (3,6)\ (3,7)\ (4,5)\ (4,6)\ (5,7)\ (6,7)$.

  Zwei Praktika dürfen gleichzeitig gehalten werden, wenn kein Studierender an beiden teilnimmt. Wie viele Termine sind notwendig?

- Färbung von Graphen:

Der folgende Graph repräsentiert diesen Sachverhalt:

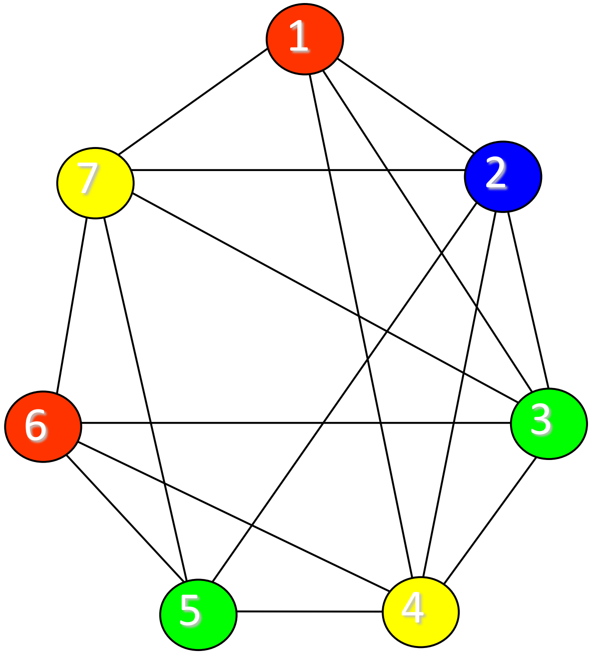


Eine Planung muss berücksichtigen, dass keine über eine Kante verbundenen Praktika zur selben Zeit stattfinden.

Dies entspricht einer Färbung der Knoten (Knotenfärbung), wobei die Farben den Prüfungszeiten entsprechen und adjazente Knoten nicht die gleiche Farbe haben dürfen.

- Färbung von Graphen:

  Bei 4 möglichen Zeiten (rot, blau, grün, gelb) ergibt sich folgende Färbung:



Es gibt keine Färbung mit weniger als 4 Farben.

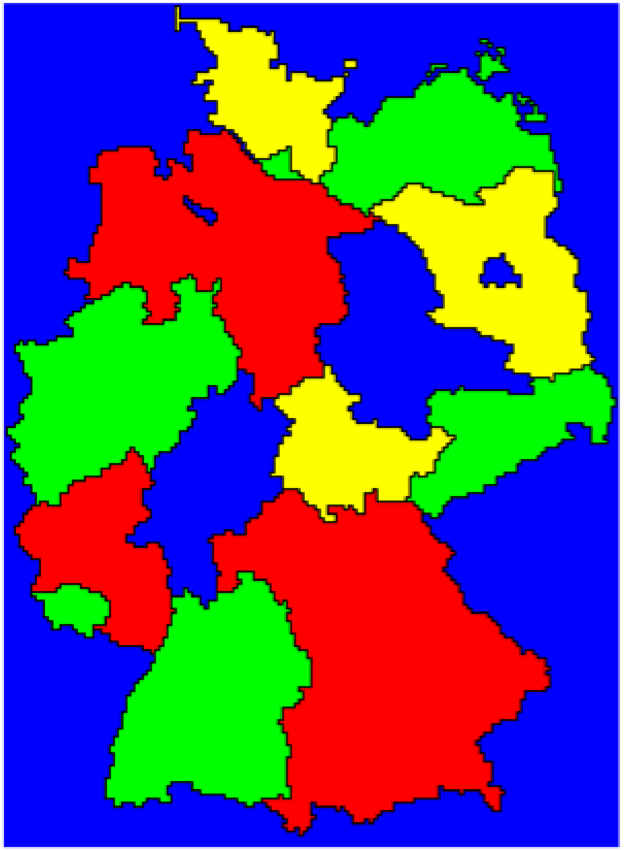
- Färbung von Graphen:

  Das klassische Graphfärbungsproblem ist das Färben von Landkarten, bei dem benachbarte Länder unterschiedliche Farben bekommen sollen.

  Man nimmt an, dass das Gebiet eines Landes zusammenhängend ist und Länder, die nur an einem Punkt zusammenstoßen, gleich gefärbt werden dürfen.

  Hierbei interessiert die kleinste Anzahl von unterschiedlichen Farben, die benötigt werden.

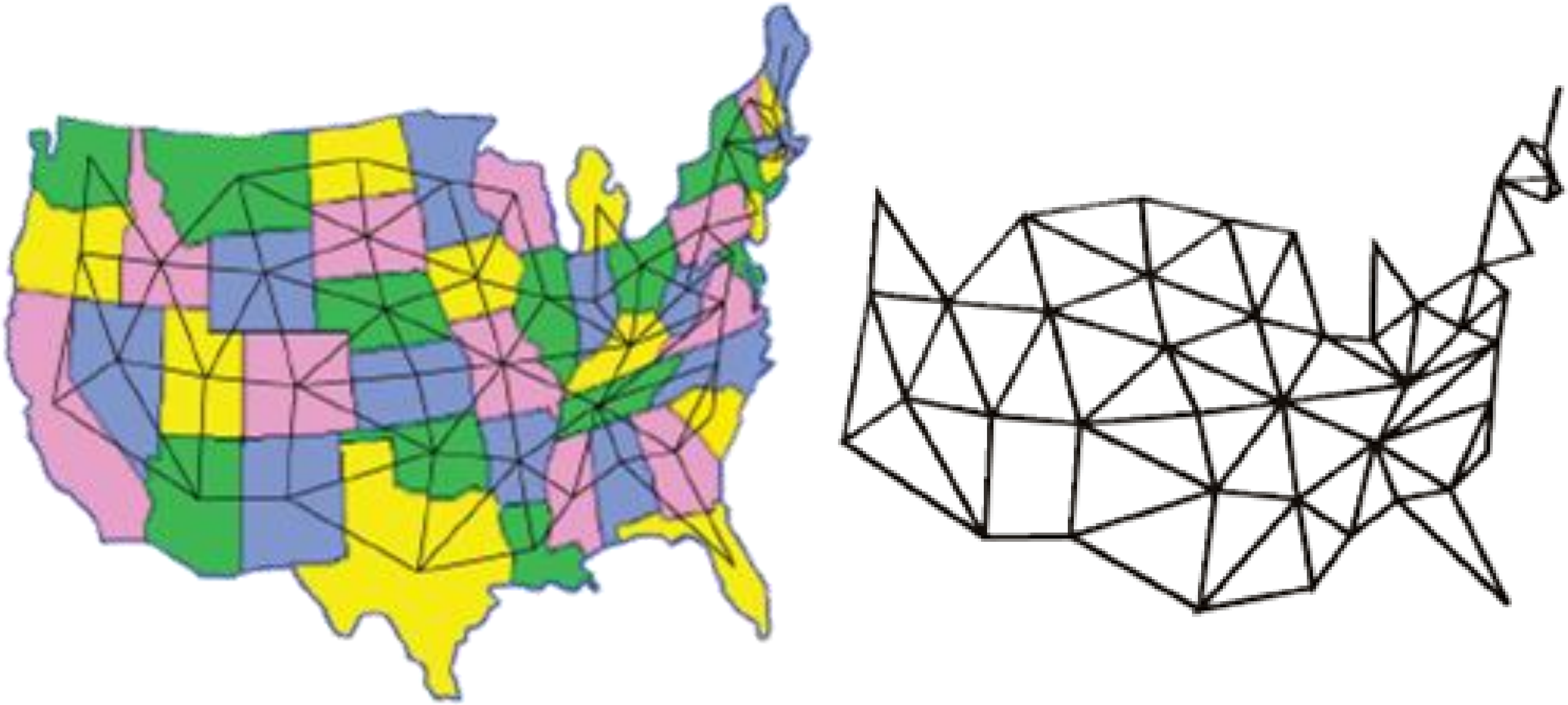
- Färbung von Graphen:



Vierfarbige Färbung der Karte Deutschlands

- Färbung von Graphen:

  Reduktion zu Knotenfärbung:



- Färbung von Graphen:

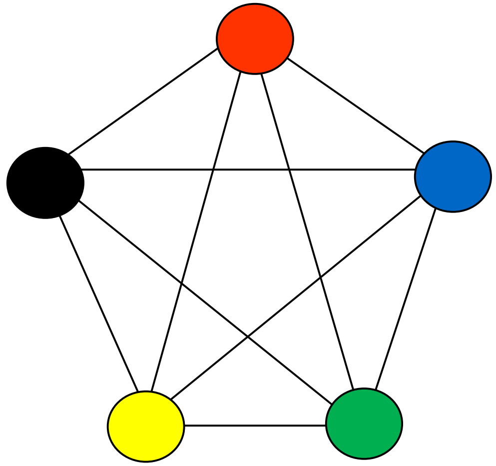
  Definition: Eine Knotenfärbung (vertex colouring) eines Graphen $G = (V, E)$ mit k Farben ist eine Abbildung $c: V \to [k]$, sodass gilt:

  $c(u) \neq c(v)$ für alle Kanten $\{u, v\} \in E$.

  Die chromatische Zahl (chromatic number) $\chi(G)$ von G ist die minimale Anzahl an Farben, die für eine Knotenfärbung von G benötigt werden.

- Färbung von Graphen:

  Fakt: Der K_n hat chromatische Zahl n.

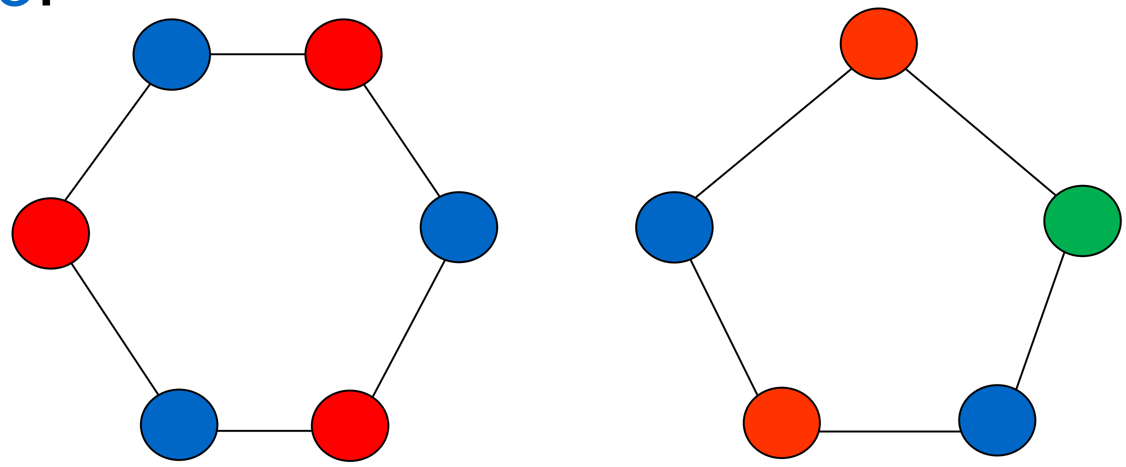


- Färbung von Graphen:

  Fakt:

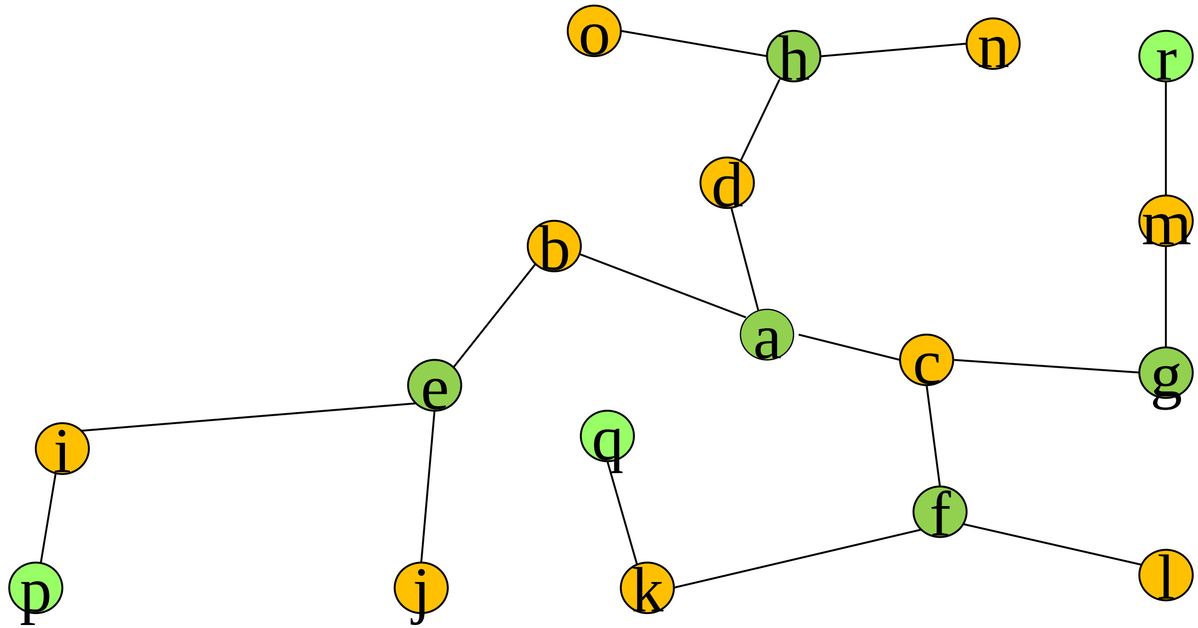
  – Kreise gerader Länge haben chromatische Zahl 2.

  – Kreise ungerader Länge haben chromatische Zahl 3.



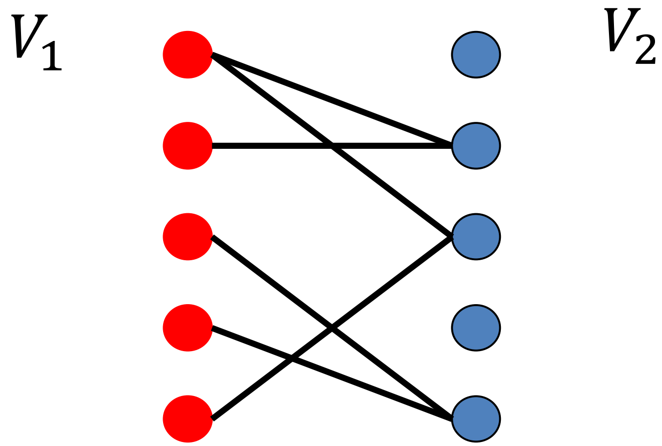
- Färbung von Graphen:

  Fakt: Bäume mit mindestens 2 Knoten haben chromatische Zahl 2.



- Färbung von Graphen:

  Fakt: Bipartite Graphen mit mindestens einer Kante haben chromatische Zahl 2.



- Färbung von Graphen:

  Satz: Für jeden planaren Graphen G gilt $\chi(G) \leq 5$.

  Beweis: Durch Induktion über $n = |V|$.

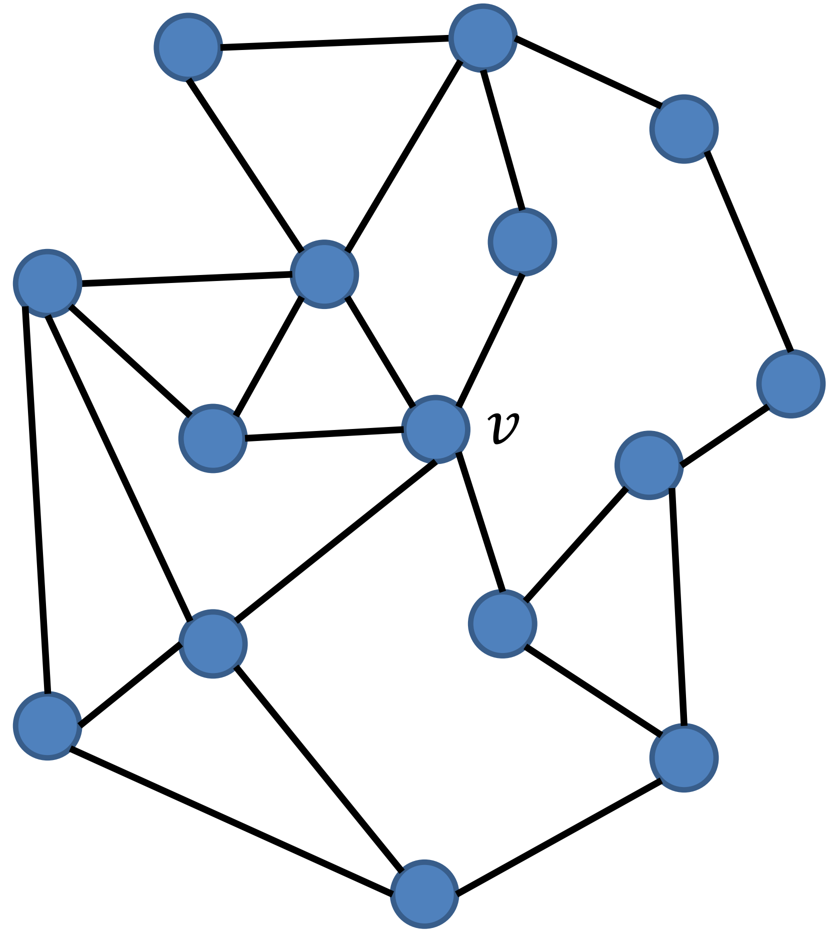
  Basis: $n = 1$. Trivial.

  Schritt: $n > 1$. Sei $v \in V$ mit Grad höchstens 5 (Korollar 2). Entferne v und seine adjazenten Kanten, sei G' der resultierende Graph. Aus der Ind.Vor. folgt, dass G' eine 5-Färbung besitzt.

  Fall 1: Die Nachbarn von v sind mit 4 oder weniger Farben gefärbt. Färbe dann v mit einer der übrigen Farben.

- Färbung von Graphen:

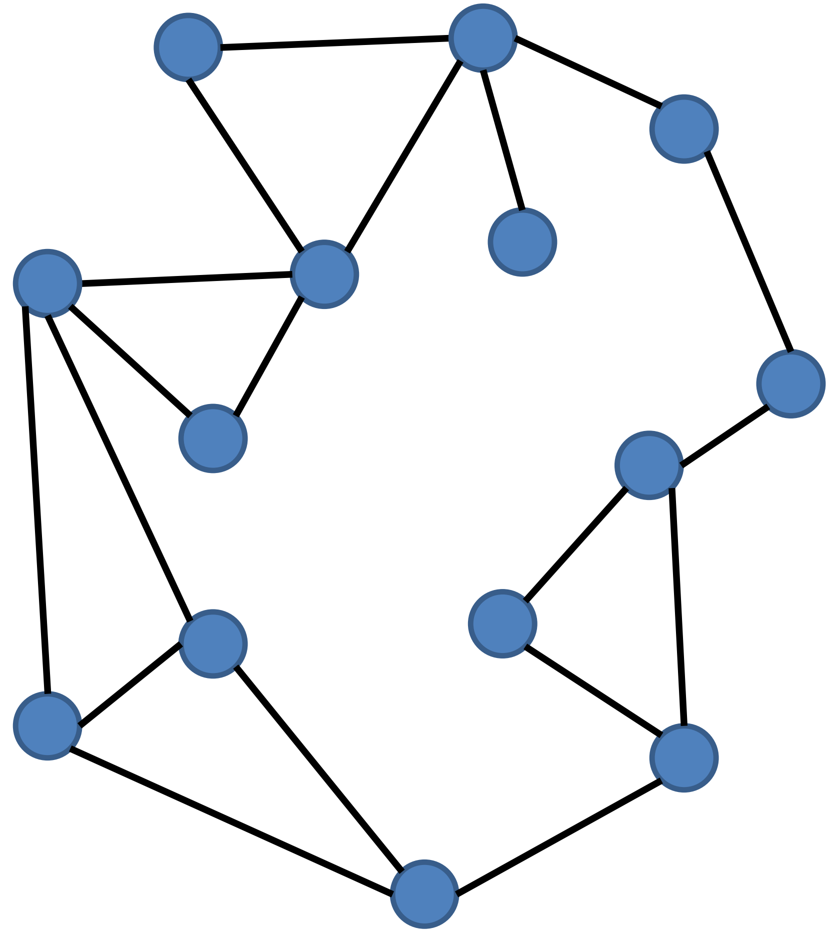
  Schritt: $n > 1$. Sei $v \in V$ mit Grad höchstens 5 (Korollar 2).



- Färbung von Graphen:

  Schritt: $n > 1$. Sei $v \in V$ mit Grad höchstens 5 (Korollar 2).

  Entferne v und seine adjazenten Kanten. Sei G' der resultierende Graph.

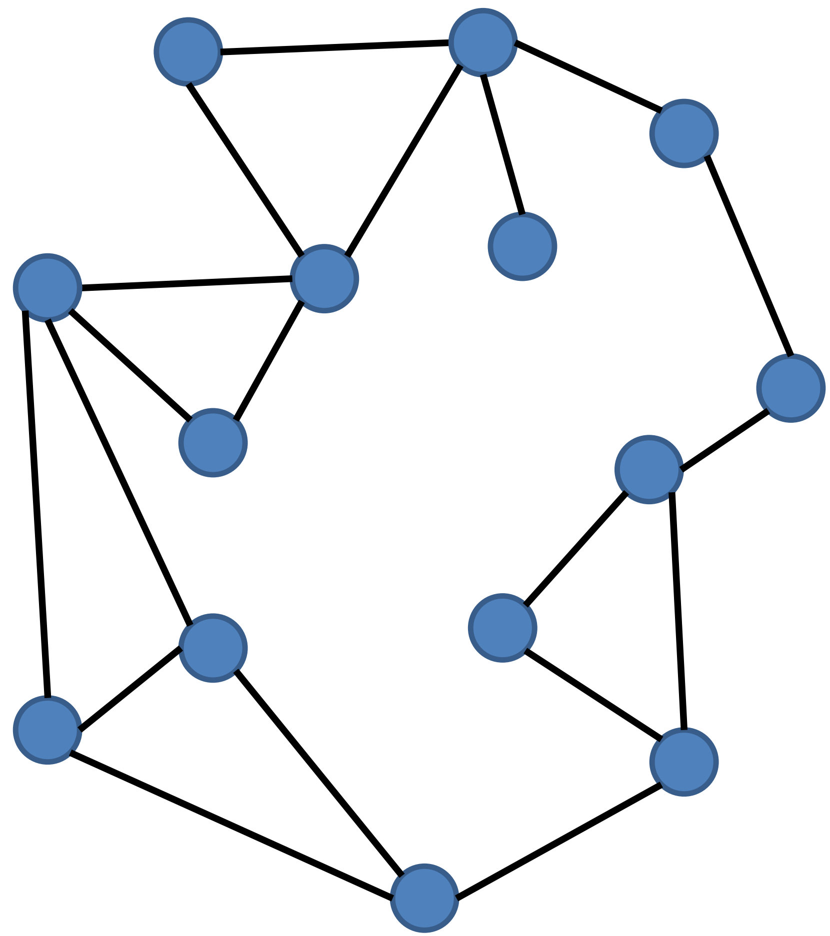


- Färbung von Graphen:

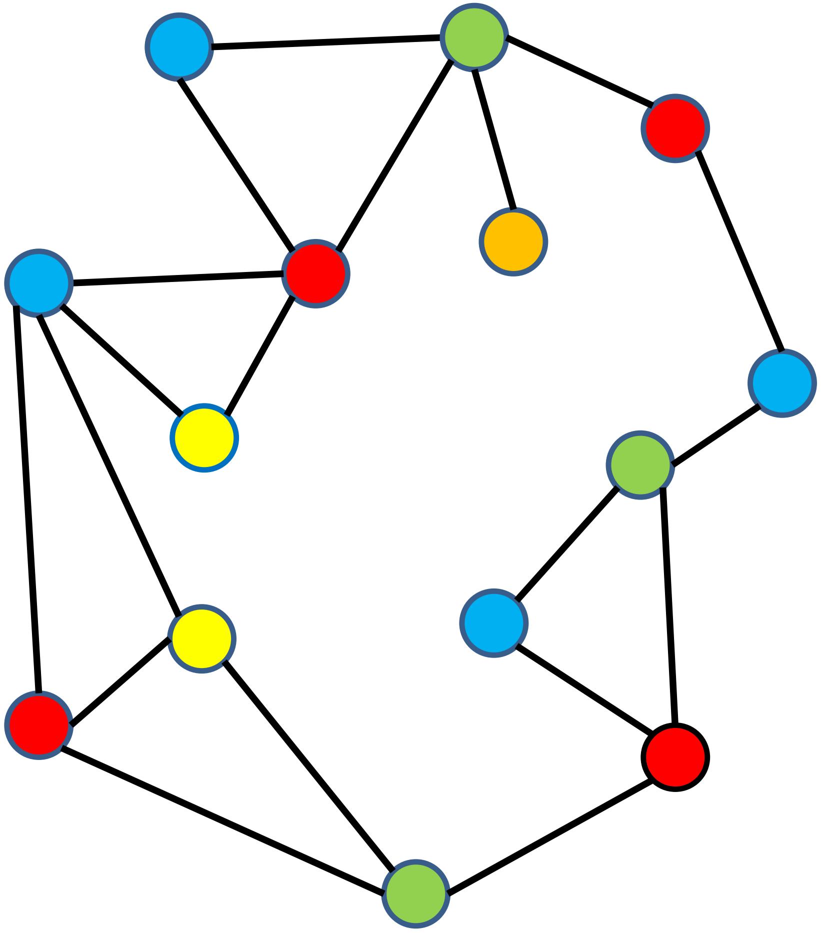
  Schritt: $n > 1$. Sei $v \in V$ mit Grad höchstens 5 (Korollar 2).

  Entferne v und seine adjazenten Kanten. Sei G' der resultierende Graph.

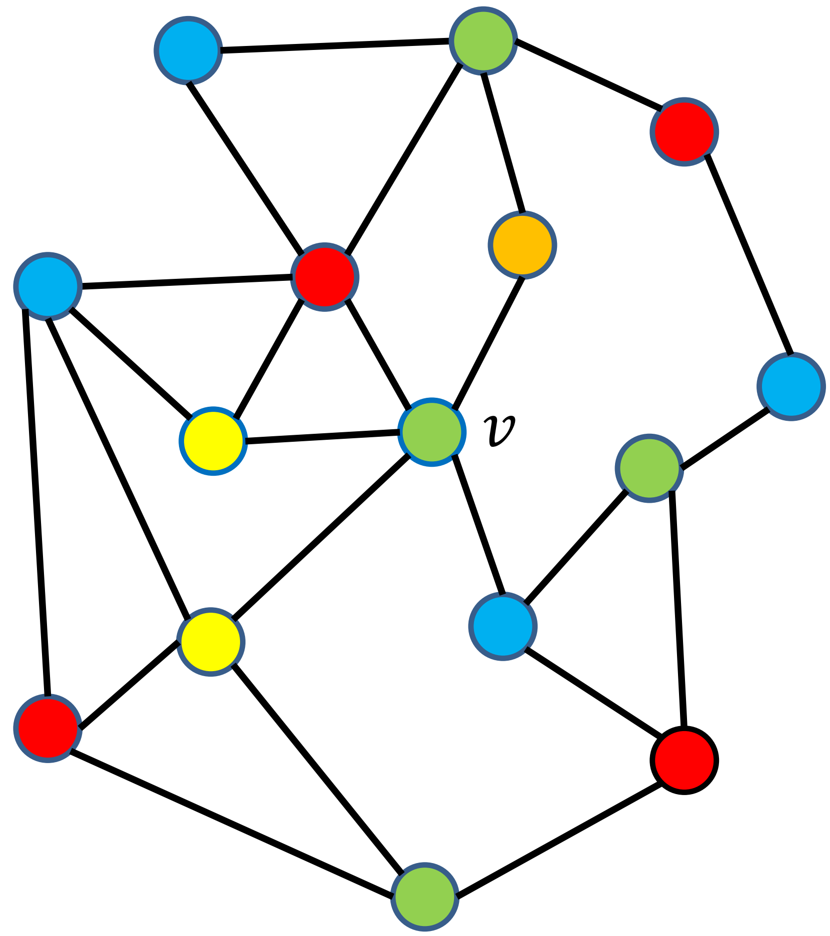
  Aus der Ind.Vor. folgt, dass G' eine 5-Färbung besitzt.



- Färbung von Graphen:
- Fall 1: Die Nachbarn von v sind mit höchstens 4 verschiedenen Farben gefärbt.

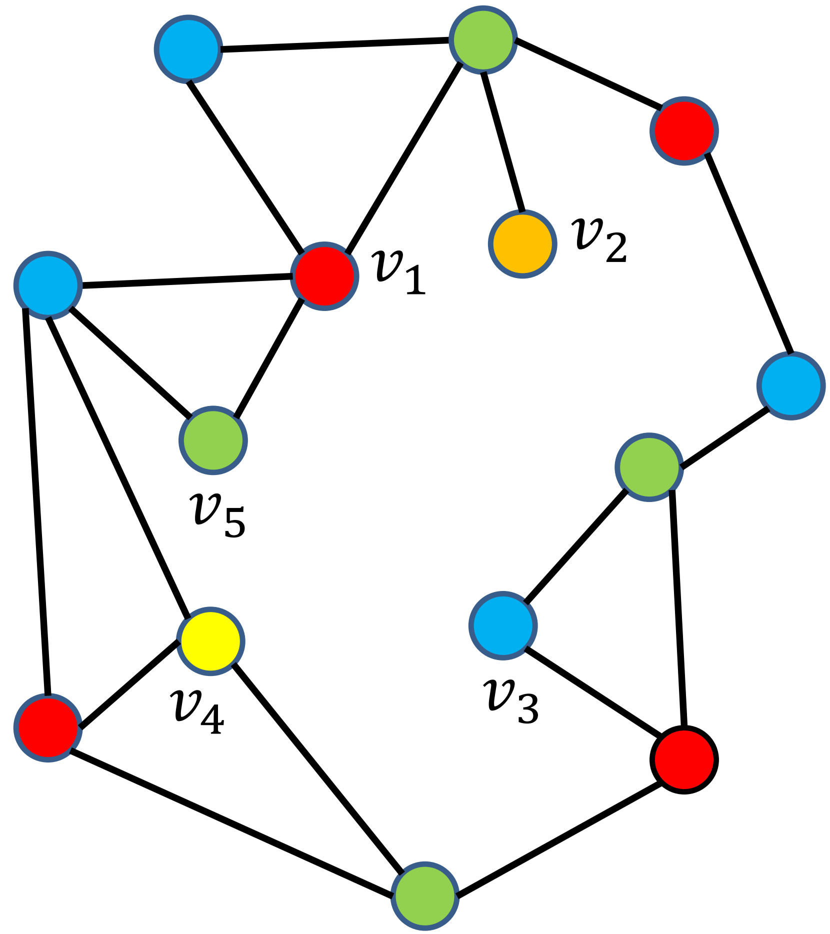


- Färbung von Graphen:
- Fall 1: Die Nachbarn von v sind mit höchstens 4 verschiedenen Farben gefärbt. Dann nehmen wir für v eine der übrigen Farben.



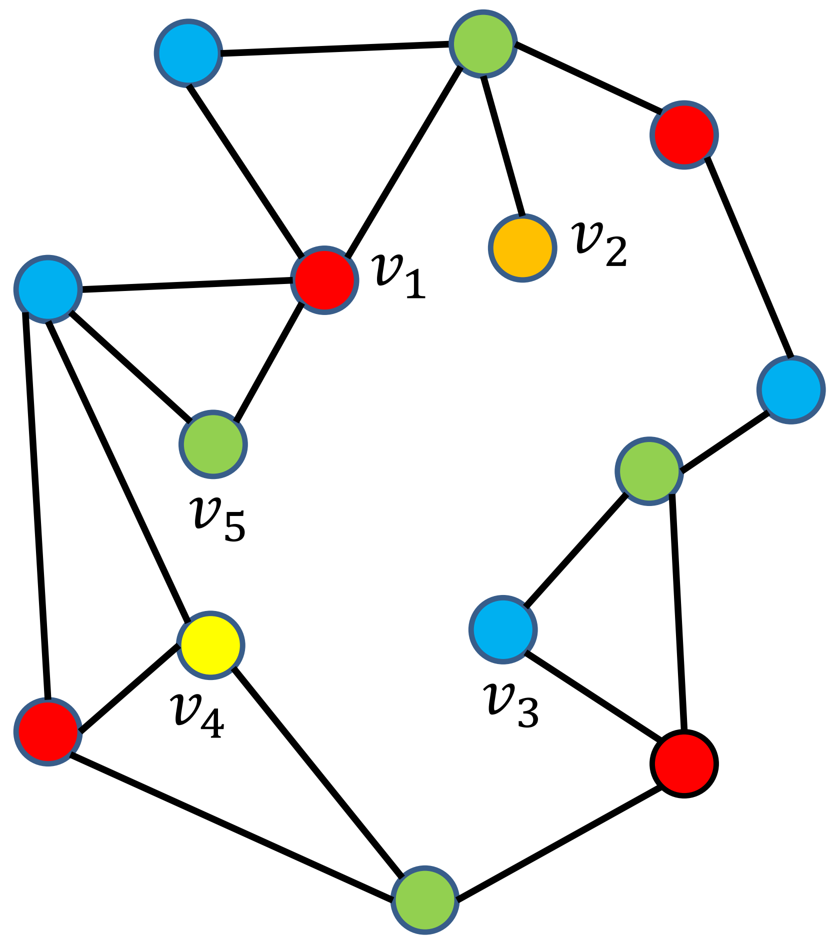
- Färbung von Graphen:

  Fall 2: Die Nachbarn $v_1, \ldots, v_5$ von v (im Uhrzeigesinn) sind mit 5 verschiedenen Farben gefärbt. Wir ändern die Färbung, sodass sie mit nur 4 Farben gefärbt werden.



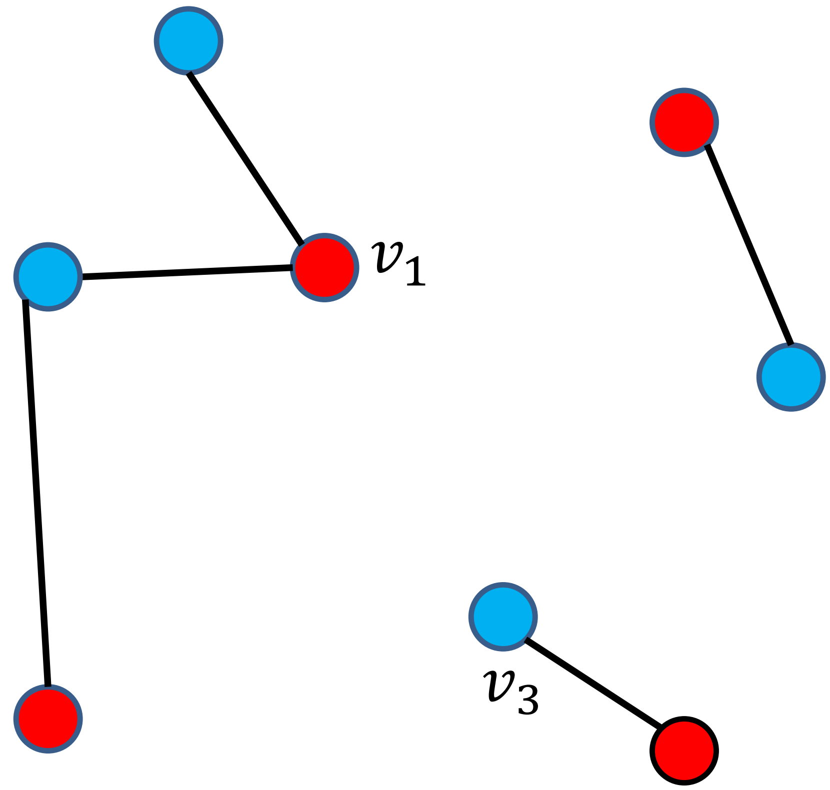
- Färbung von Graphen:

  Sei $H_{1,3}$ der von den Knoten mit Farben 1 und 3 induzierte Teilgraph von G.



- Färbung von Graphen:

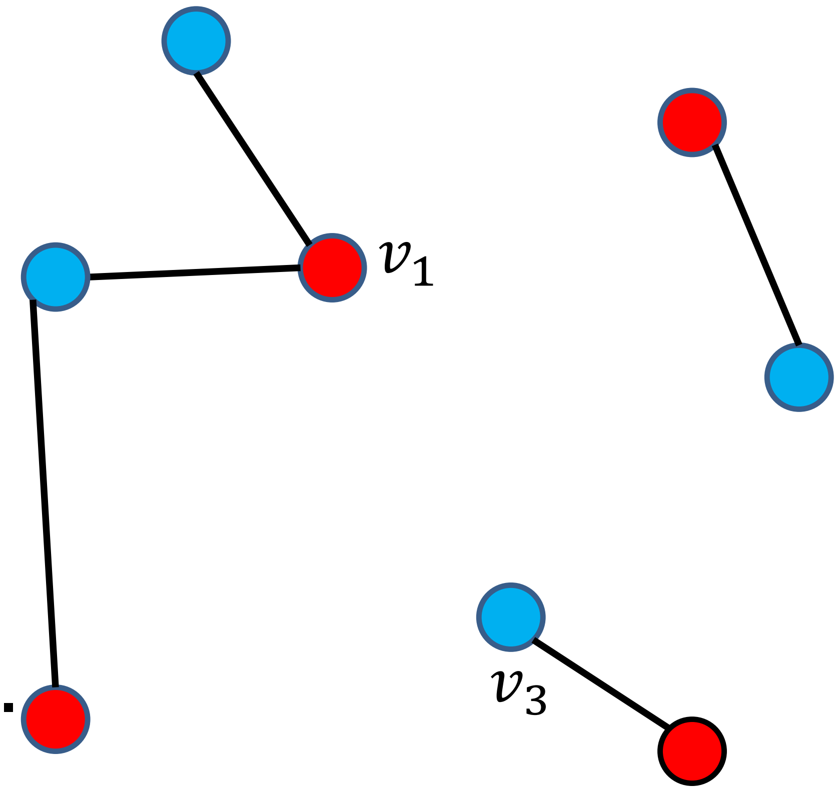
  Sei $H_{1,3}$ der von den Knoten mit Farben 1 und 3 induzierte Teilgraph von G.



- Färbung von Graphen:

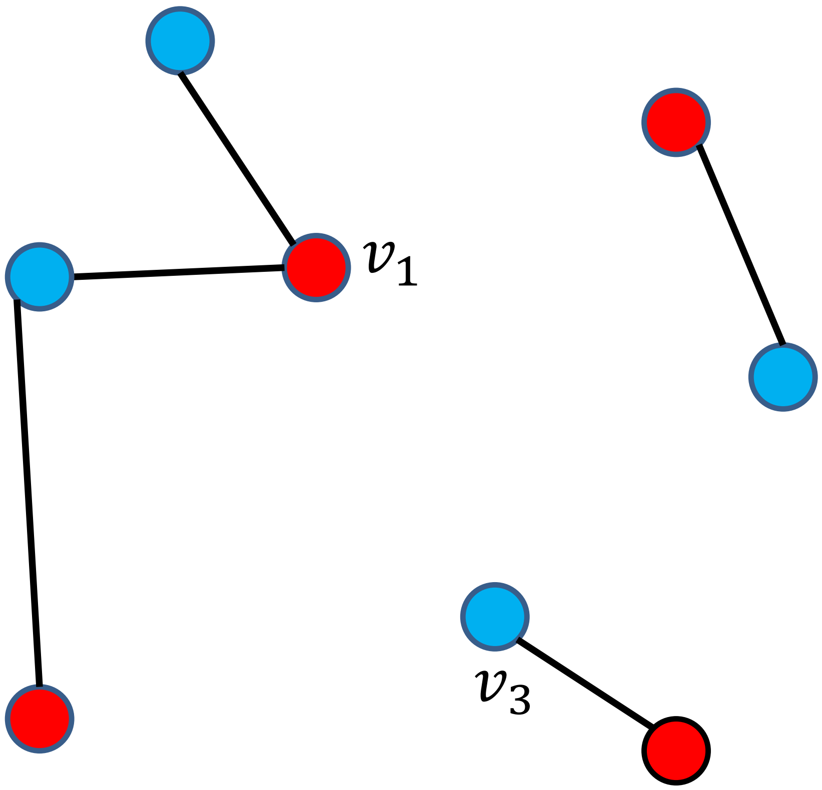
  Sei $H_{1,3}$ der von den Knoten mit Farben 1 und 3 induzierte Teilgraph von G.

  Fall 2.1: $H_{1,3}$ enthält keinen Pfad $(v_1, \ldots, v_3)$.



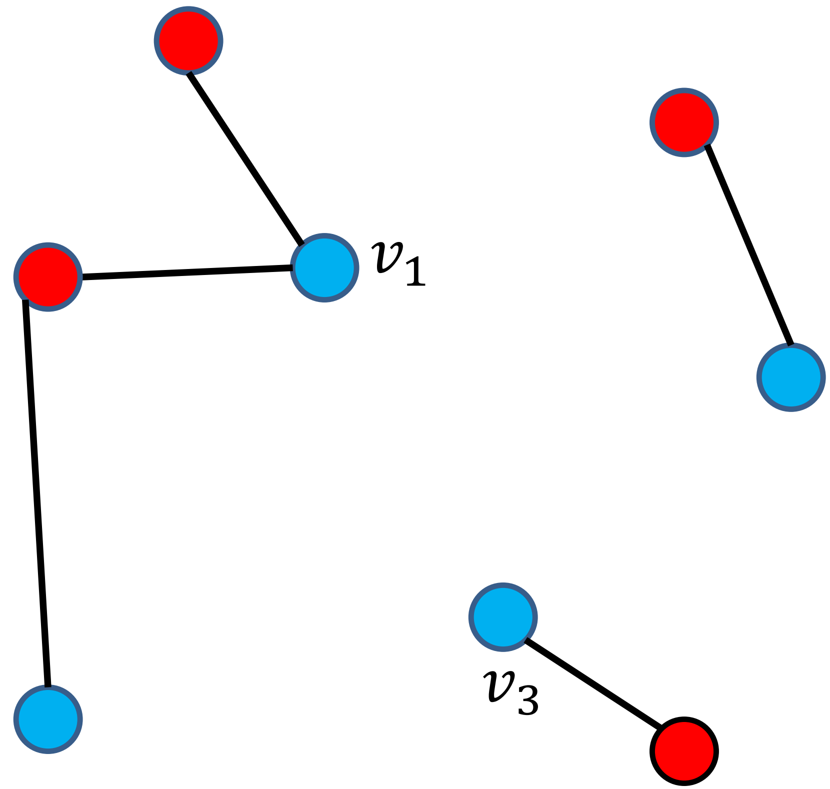
- Färbung von Graphen:

  Wir vertauschen die Farben 1 und 3 in der Komponente, die v_1 enthält.



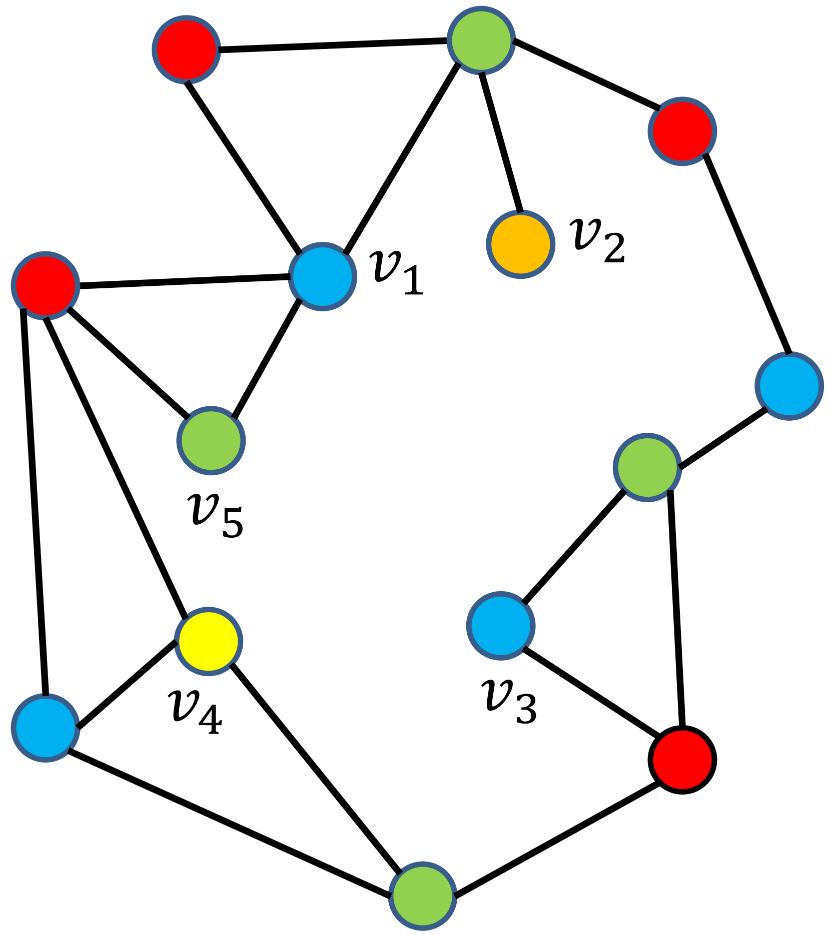
- Färbung von Graphen:

  Wir vertauschen die Farben 1 und 3 in der Komponente, die v_1 enthält.



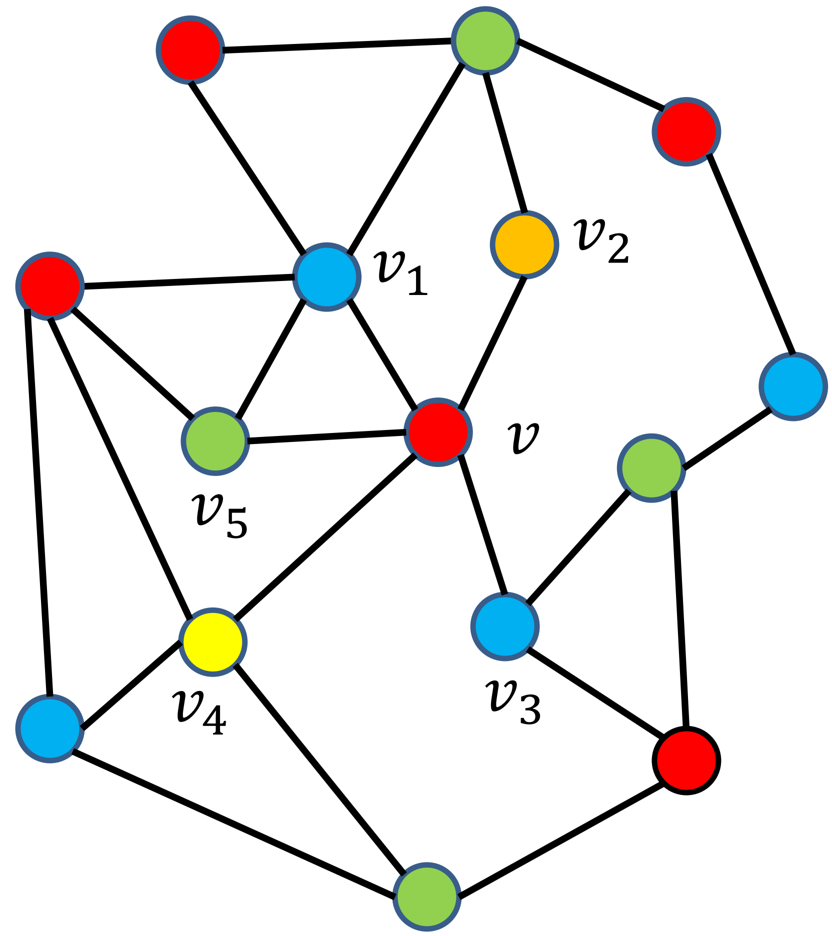
- Färbung von Graphen:

  Das ergibt eine neue Färbung von G', in der die Nachbarn von v mit nur 4 Farben gefärbt sind.



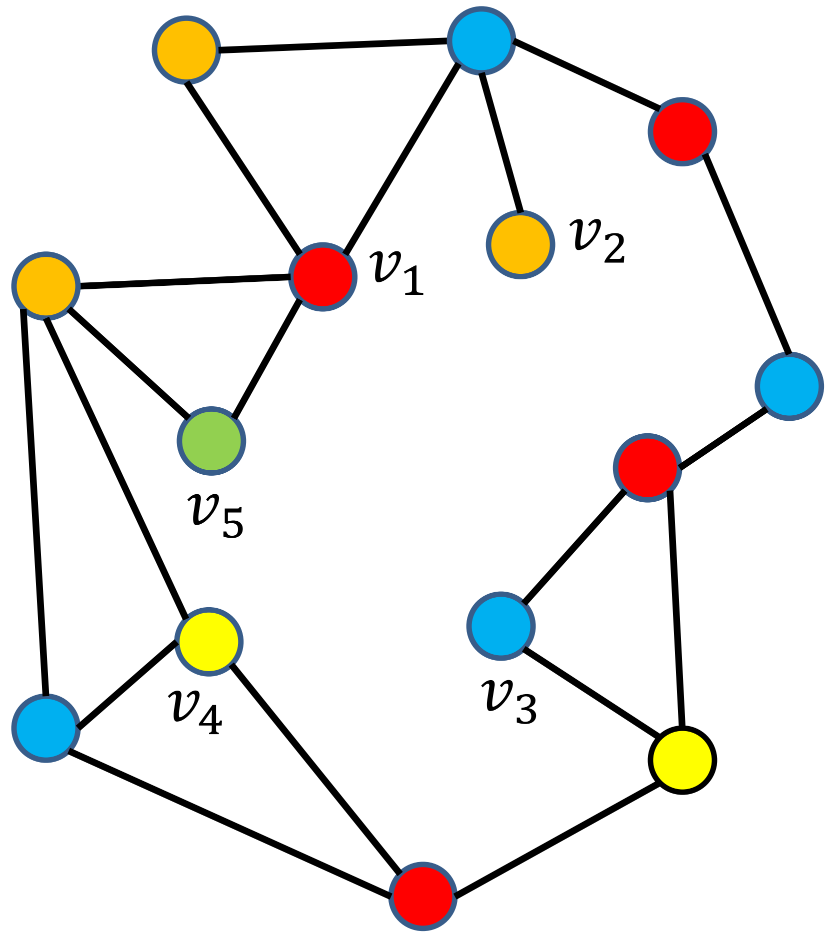
- Färbung von Graphen:

  Wir färben v mit der übrigen Farbe.



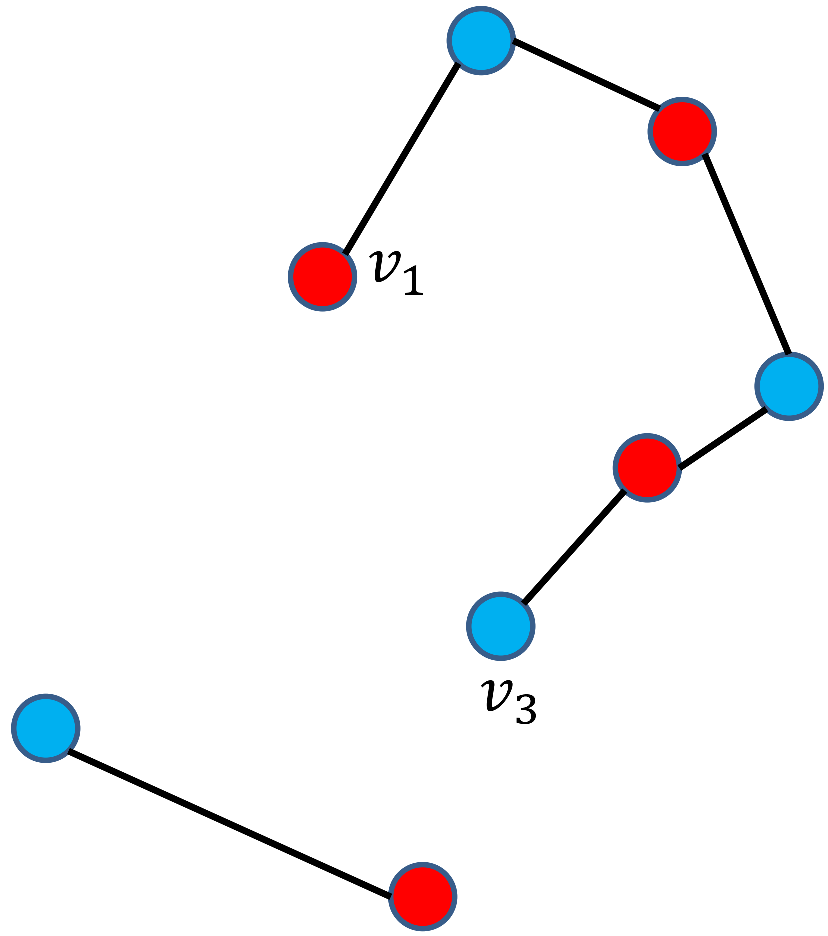
- Färbung von Graphen:

  Fall 2.2: $H_{1,3}$ enthält einen Pfad $(v_1, \ldots, v_3)$.



- Färbung von Graphen:

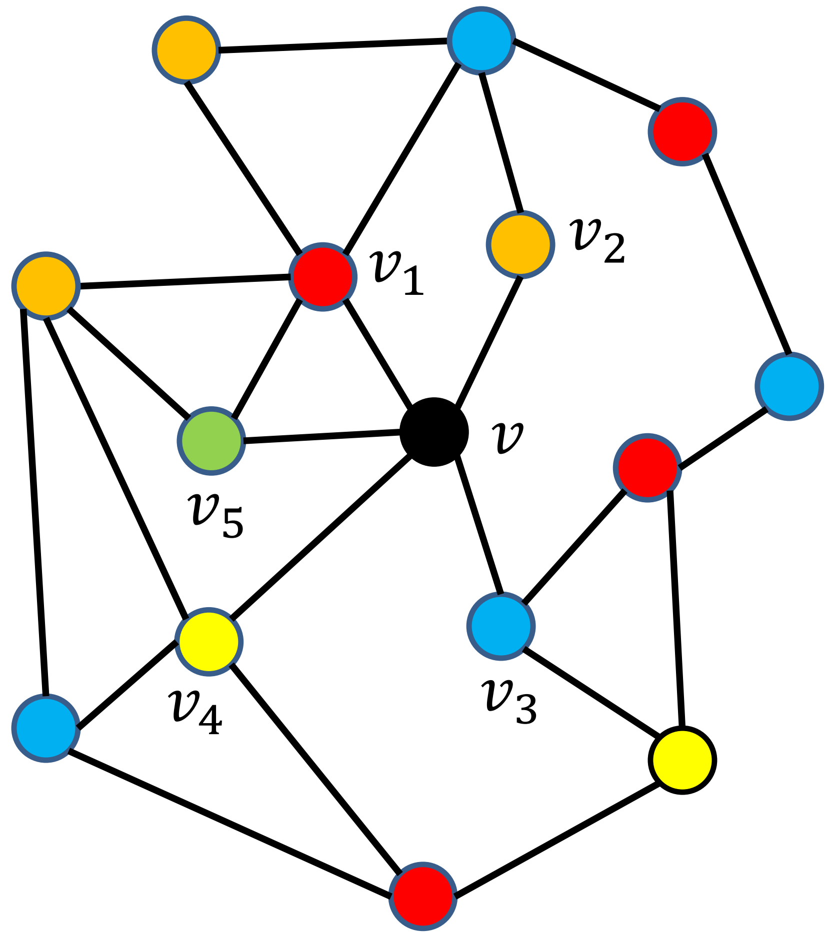
  Fall 2.2: $H_{1,3}$ enthält einen Pfad $(v_1, \ldots, v_3)$.



- Färbung von Graphen:

  Fall 2.2: $H_{1,3}$ enthält einen Pfad $(v_1, \ldots, v_3)$.

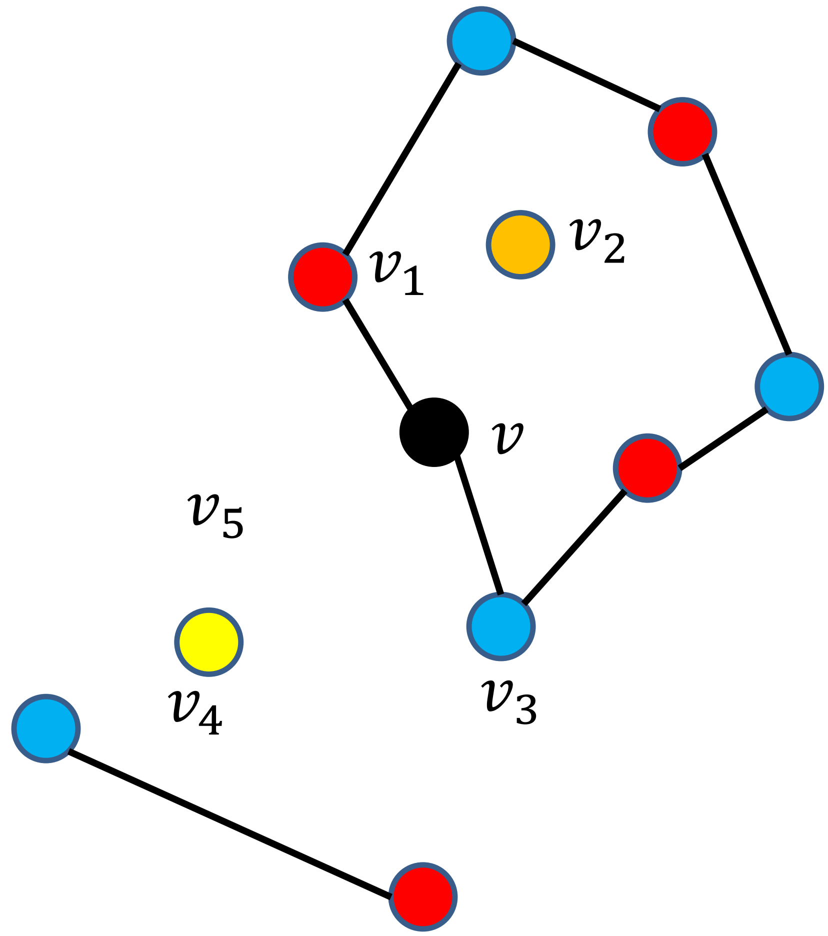
  Dann befinden sich die Knoten v_2 und v_4 auf unterschiedlichen Seiten des Kreises $(v, v_1, \ldots, v_3, v)$.



- Färbung von Graphen:

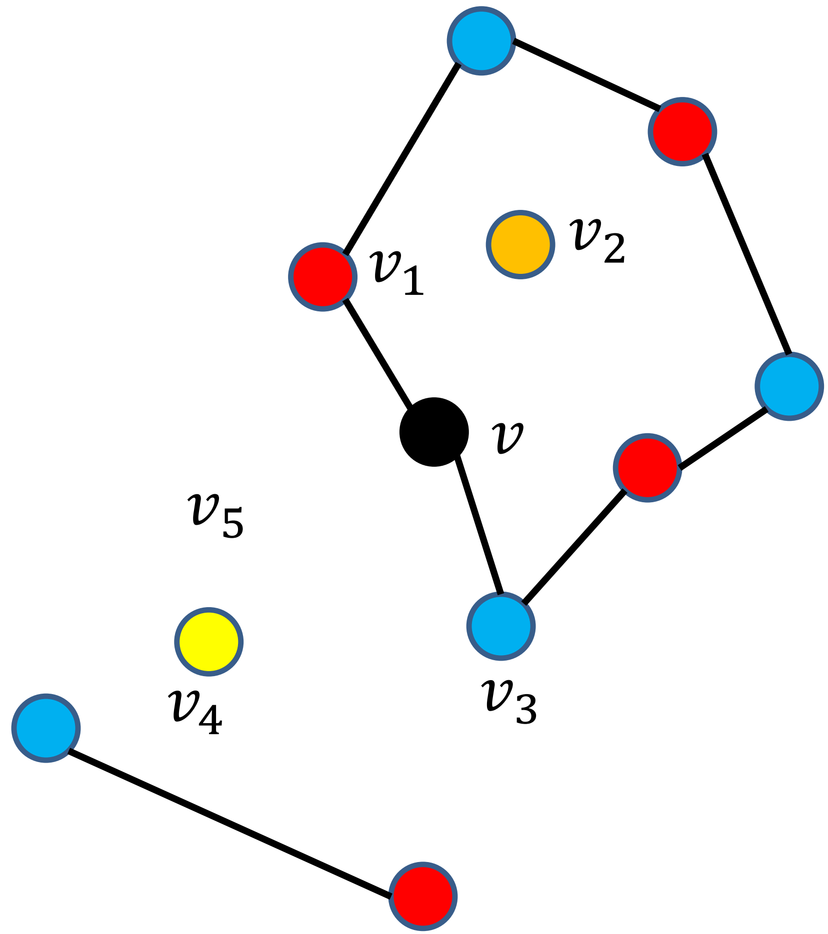
  Fall 2.2: $H_{1,3}$ enthält einen Pfad $(v_1, \ldots, v_3)$.

  Dann befinden sich die Knoten v_2 und v_4 auf unterschiedlichen Seiten des Kreises $(v, v_1, \ldots, v_3, v)$.



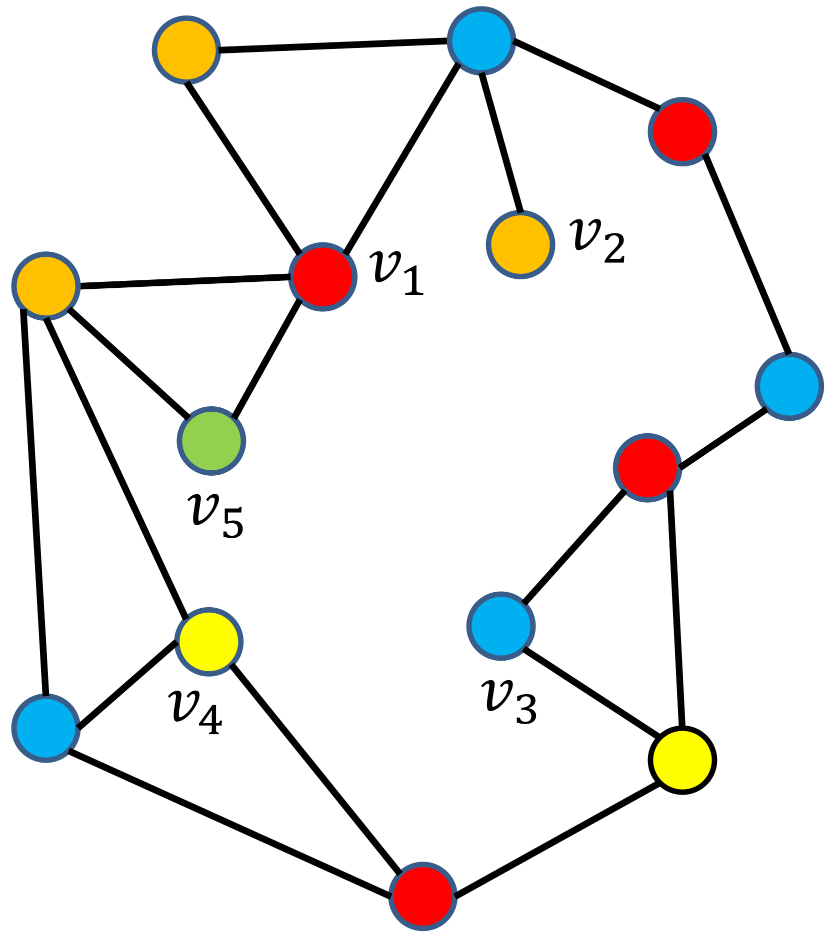
- Färbung von Graphen:

  Damit enthält $H_{2,4}$ keinen Pfad $(v_2, \ldots, v_4)$, und wir können wie im Fall 2.1 vorgehen.



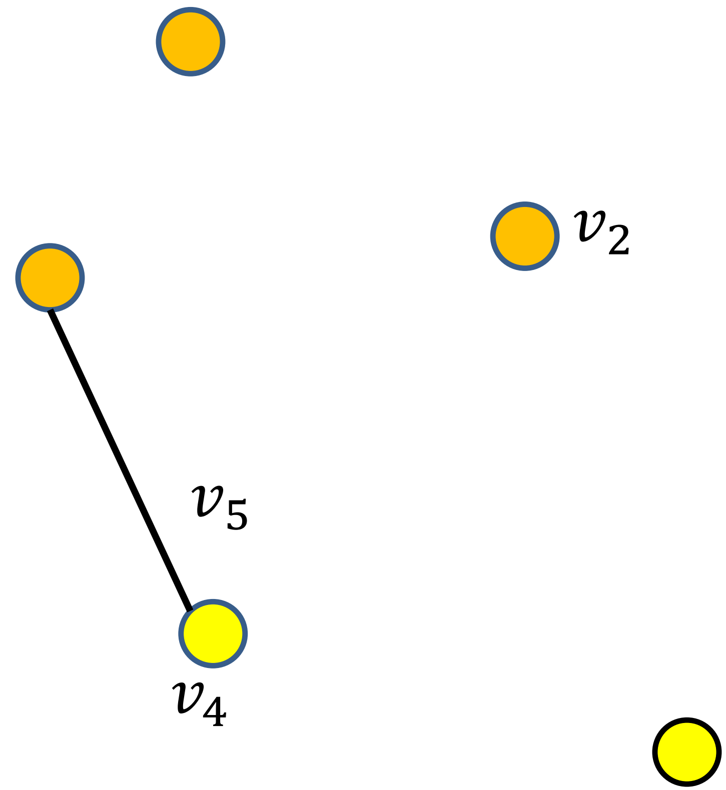
- Färbung von Graphen:

  Damit enthält $H_{2,4}$ keinen Pfad $(v_2, \ldots, v_4)$, und wir können wie im Fall 2.1 vorgehen.



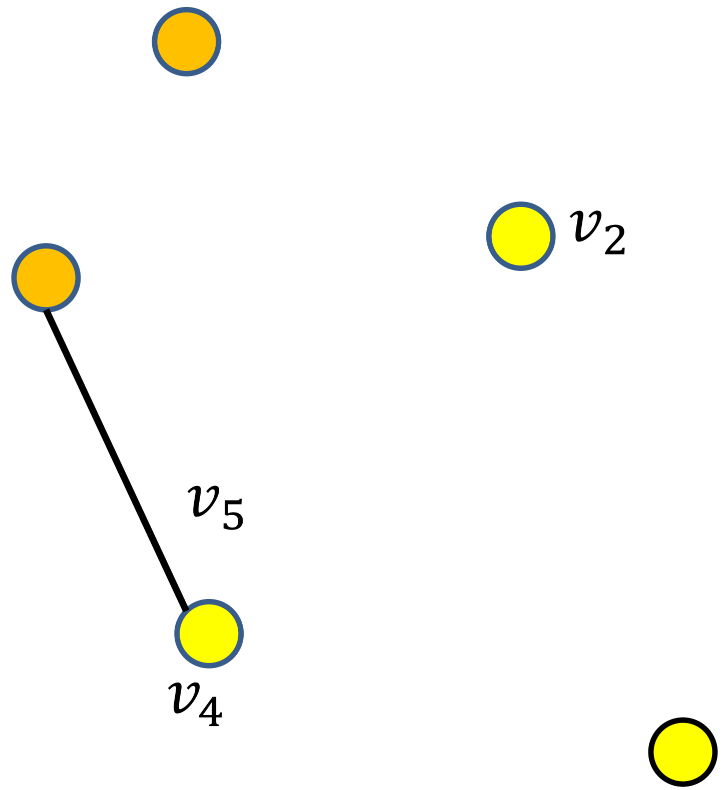
- Färbung von Graphen:

  Damit enthält $H_{2,4}$ keinen Pfad $(v_2, \dots, v_4)$, und wir können wie im Fall 2.1 vorgehen.



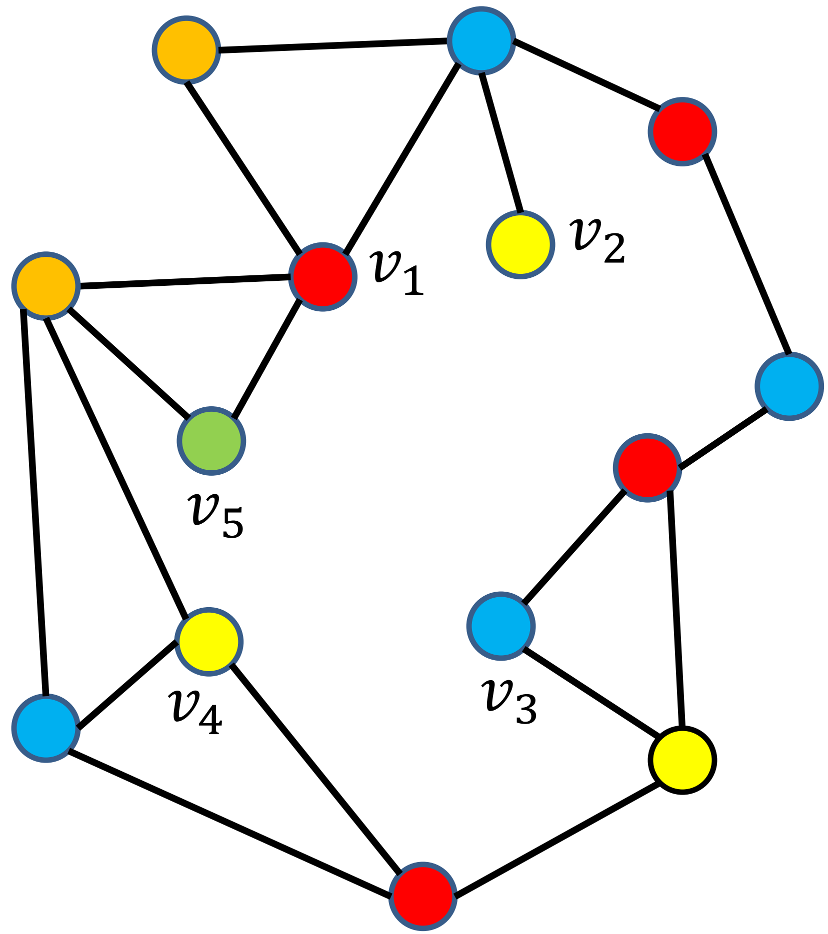
- Färbung von Graphen:

  Damit enthält $H_{2,4}$ keinen Pfad $(v_2, \ldots, v_4)$, und wir können wie im Fall 2.1 vorgehen.



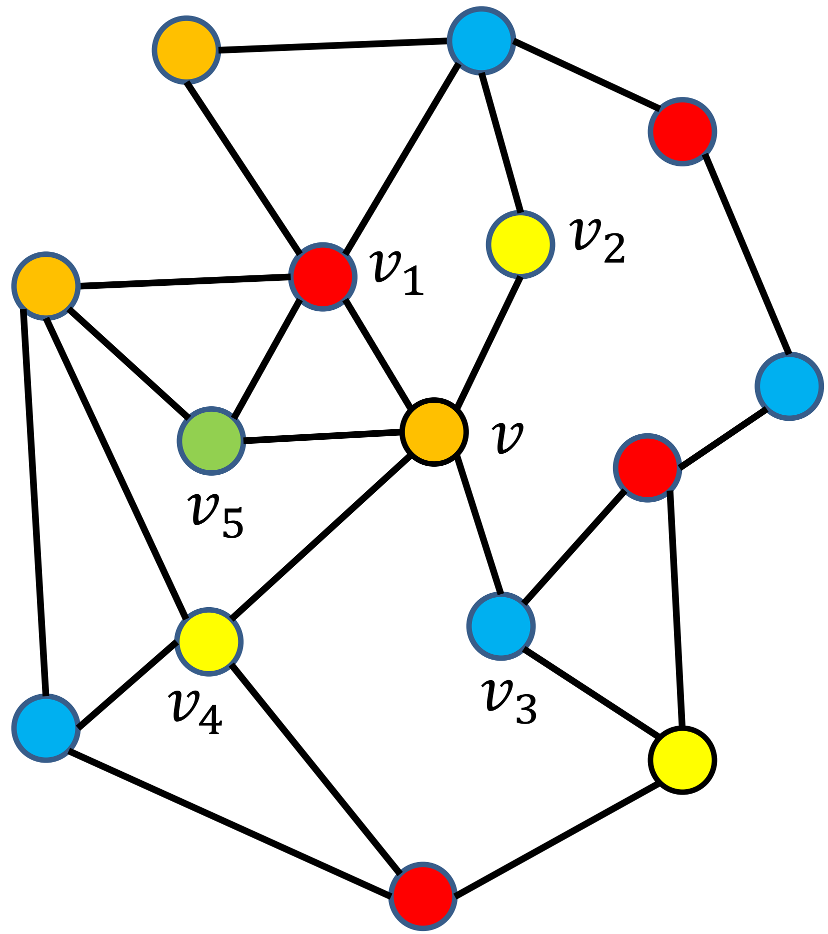
- Färbung von Graphen:

  Damit enthält $H_{2,4}$ keinen Pfad $(v_2, \ldots, v_4)$, und wir können wie im Fall 2.1 vorgehen.



- Färbung von Graphen:

  Damit enthält $H_{2,4}$ keinen Pfad $(v_2, \ldots, v_4)$, und wir können wie im Fall 2.2 vorgehen.



- Färbung von Graphen:

  Satz: Für jeden planaren Graphen G gilt $\chi(G) \leq 4$.

  1858: von Guthrie als Vermutung aufgestellt.

  1976: von Appel und Haken bewiesen.
  Fallunterscheidung mit 1936 Fällen, geprüft durch Computer.

  2005: von Gonthier und Werner im Beweisassistenten Coq formal bewiesen.

Praktische Anwendungen in der Informatik:

- Modellierung von Stundenplanproblemen
- Lastbalanzierung, z.B. Red-Black-Gauss-Seidel
- Zuweisung von Rechnerleistung (Prozessoren, Bandbreite,…)