WS 2014/15

Diskrete Strukturen

Kapitel 4: Graphen (Matchings)

Hans-Joachim Bungartz

Lehrstuhl für wissenschaftliches Rechnen
Fakultät für Informatik
Technische Universität München

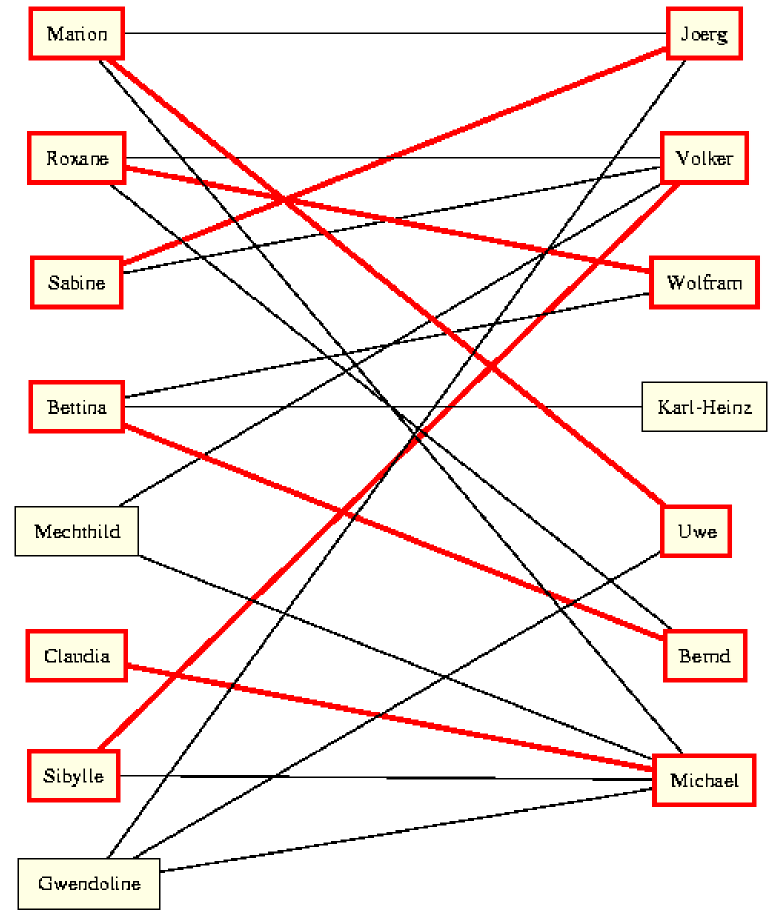
http://www5.in.tum.de/wiki/index.php/Diskrete_Strukturen_-_Winter_14

- Graphentheorie
  - Grundlagen
  - Bäume
  - Euler- und Hamiltonkreise
  - Planarität und Färbungen
  - Matchings

- Das Heiratsproblem:
  - Gegeben seien heiratswillige Damen und Herren. Jede Dame gibt an, mit welchem der Herren sie sich eventuell vermählen würde.
  - Das Problem besteht nun darin, möglichst viele Damen so zu verheiraten, dass jede Dame einen Herren ihrer Wahl erhält, und dass selbstverständlich keine zwei Damen mit demselben Herrn verheiratet sind.

- Das Heiratsproblem:
  - Der einer konkreten Situation zugrunde liegende bipartite Graph.
  - Das Problem:

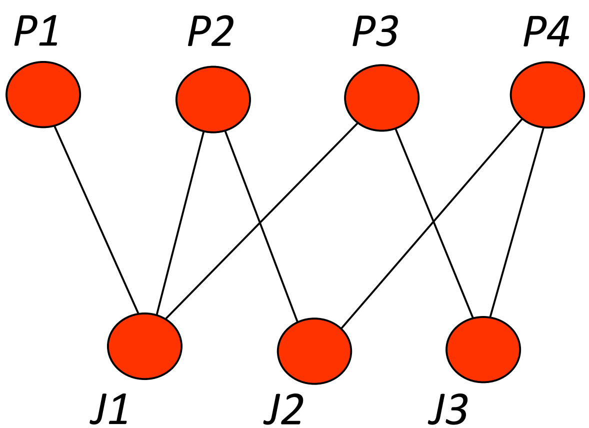
    Finde eine maximale Menge M von Kanten, sodass keine zwei Kanten aus M einen gemeinsamen Endknoten haben.



- Job-Zuordnung:
  - Gegeben m Arbeitnehmer mit unterschiedlichen Fähigkeiten und n Jobs.
  - Gesucht ist eine Zuordnung, sodass möglichst viele Jobs vermittelt werden.

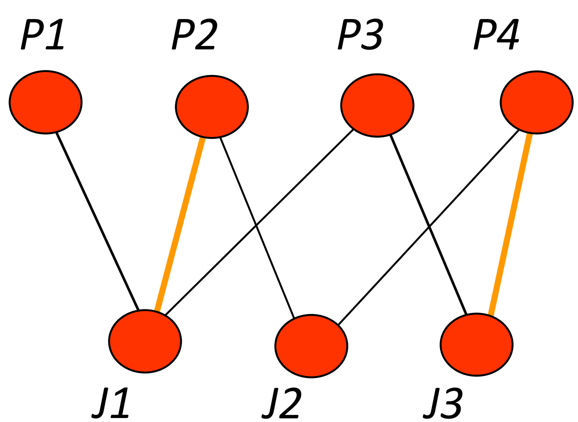
Kapitel 4: Graphen (Matchings)

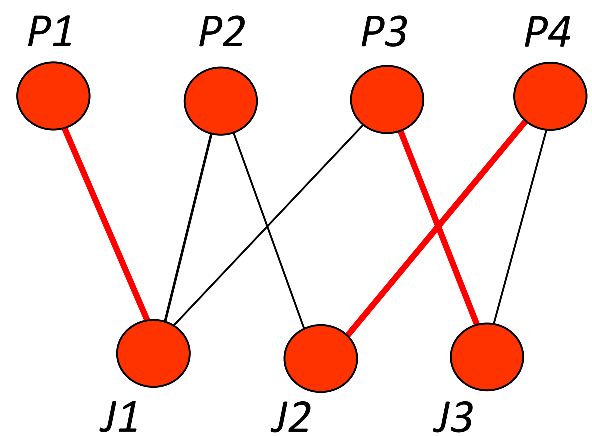
- Job-Zuordnung:
  - Gesucht ist eine Zuordnung, sodass möglichst viele Jobs vermittelt werden.



Bipartiter Graph

Zuordnung





Optimale Zuordnung

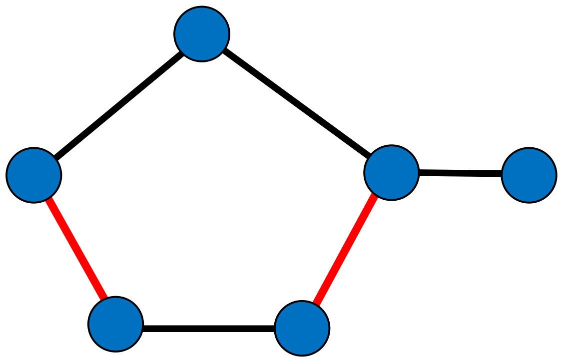
- Matchings:

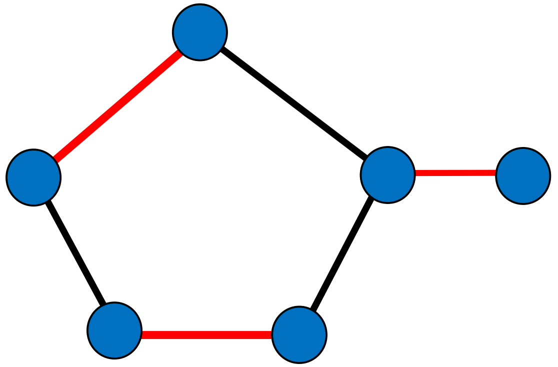
  Definition: Sei $G = (V, E)$ ein Graph.

  – Ein Matching ist eine Menge $M \subseteq E$ von paarweise disjunkten Kanten.

  – Ein Maching M ist perfekt, falls jeder Knoten zu (genau) einer Kante von M gehört.

  Fakt: Ein Matching M ist perfekt gdw. $|M| = |V|/2$.





- Matchings in bipartiten Graphen:

  Der Heiratssatz sagt:

  Jede Dame kann mit einem Wunschkandidaten verheiratet werden genau dann, wenn…

- Matchings in bipartiten Graphen.

  Der Heiratssatz sagt:

  Jede Dame kann mit einem Wunschkandidaten verheiratet werden genau dann, wenn

  jede k-Untermenge von Damen sich für mindestens k Herren interessiert.

- Matchings in bipartiten Graphen:

Satz (Heiratssatz – Hall 1935):

Für einen bipartiten Graphen $G = (A, B, E)$ gibt es genau dann ein Matching M der Kardinalität $|M| = |A|$, wenn gilt

$$|\Gamma(X)| \geq |X| \text{ für alle } X \subseteq A.$$

Hierbei ist $\Gamma(X)$ die Nachbarschaft der Knotenmenge X, d.h. $\Gamma(X) = \bigcup_{v \in X} \Gamma(v)$.

- Matchings in bipartiten Graphen:

  Beweis des Heiratssatzes:

  („$\Rightarrow$“) Indirekter Beweis:

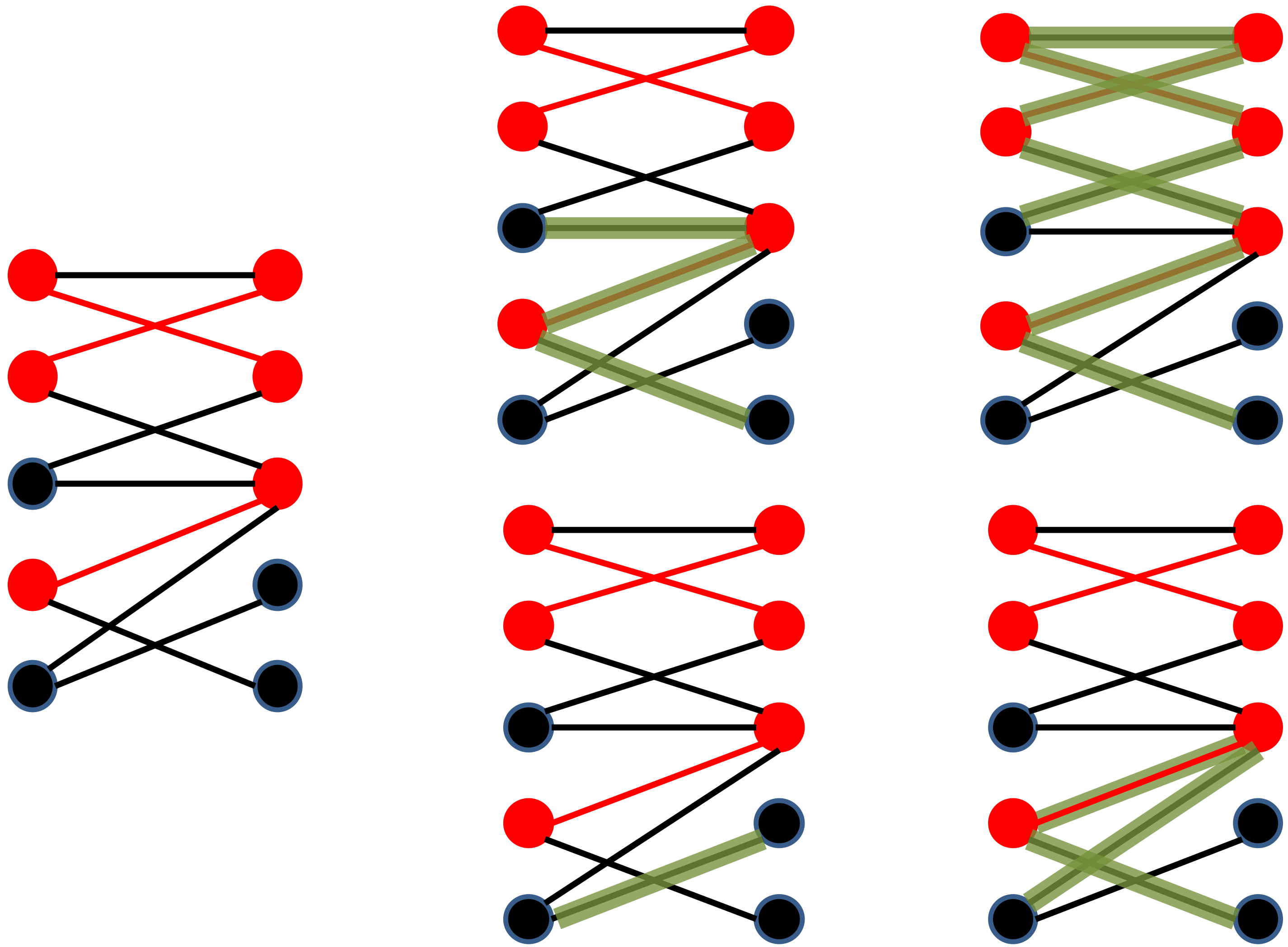
  Wenn es ein $X \subseteq A$ gibt mit $|X| > |\Gamma(X)|$ gibt, dann können nicht alle Knoten aus X zugleich gematcht werden. Es gibt also kein Matching M mit $|M| = |A|$.

- Matchings in bipartiten Graphen:

Vorbereitung für („⇒“):

Definition: Sei M ein Matching. Ein Pfad heißt augmentierend oder Verbesserungspfad bezüglich M, wenn:

1. bei dem Pfad sich gematchte und ungematchte Kanten (bezüglich M) abwechseln (wir sagen, dass der Pfad alternierend ist), und
2. Anfangs- und Endknoten ungematcht sind.



- Matchings in bipartiten Graphen:

(„$\Leftarrow$“): Sei M ein Matching mit $|M| < |A|$.

Wir behaupten: Es gibt einen augmentierenden Pfad bezüglich M.

Wenn diese Behauptung gilt, dann können die Endknoten des Pfades gematcht werden. Damit gibt es ein neues Matching M' mit $|M'| = |M| + 1$, und die Aussage folgt.

Wir zeigen nun, dass die Behauptung gilt.

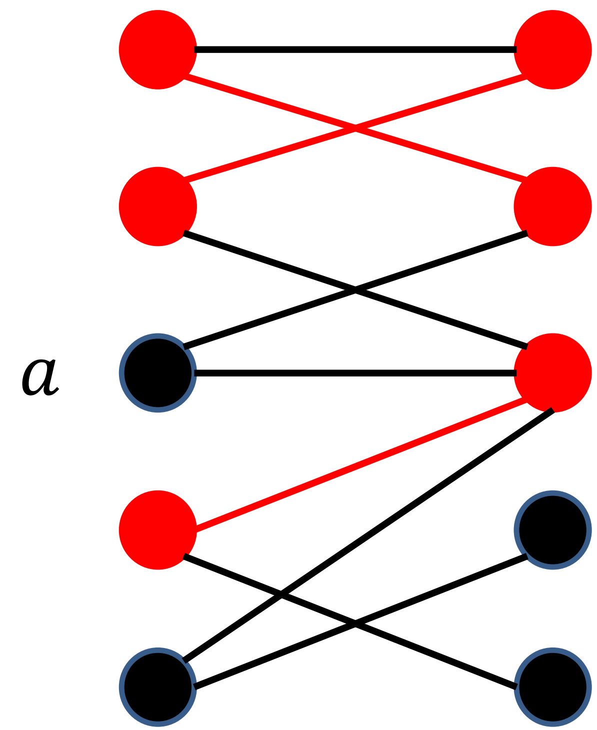
- Matchings in bipartiten Graphen:

Beweis der Behauptung: Da $|M| < |A|$, gibt es ein $a \in A$, welches in M ungematcht ist.

Sei Π_n die Menge der alternierenden Pfade aus a mit gerader Länge n.

Kann ein Element von Π_n zu einem augmentierenden Pfad erweitert werden, dann sind wir fertig.

Sonst: Seien A_n, B_n die Knoten von A, B, die in Π_n vorkommen.



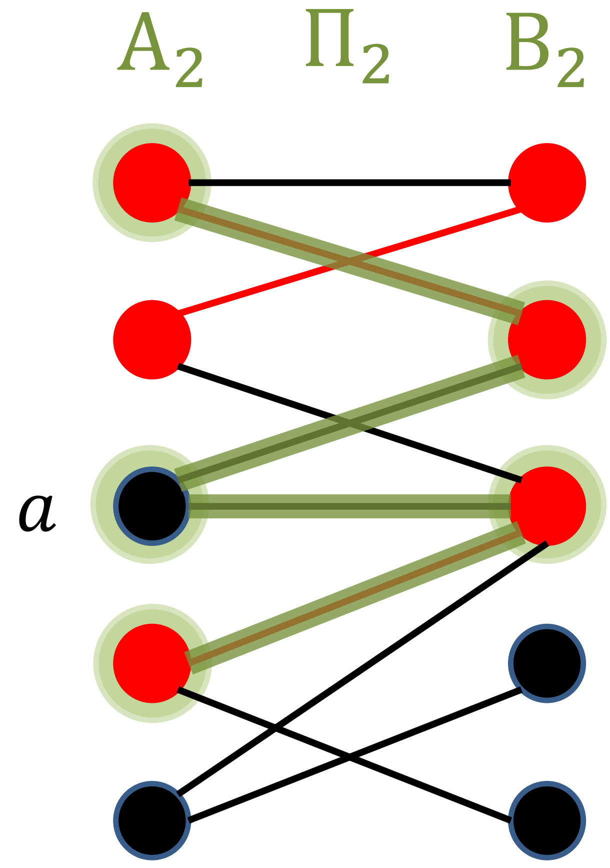
- Matchings in bipartiten Graphen:

Beweis der Behauptung: Da $|M| < |A|$, gibt es ein $a \in A$, welches in M ungematcht ist.

Sei Π_n die Menge der alternierenden Pfade aus a mit gerader Länge n.

Kann ein Element von Π_n zu einem augmentierenden Pfad erweitert werden, dann sind wir fertig.

Sonst: Seien A_n, B_n die Knoten von A, B, die in Π_n vorkommen.

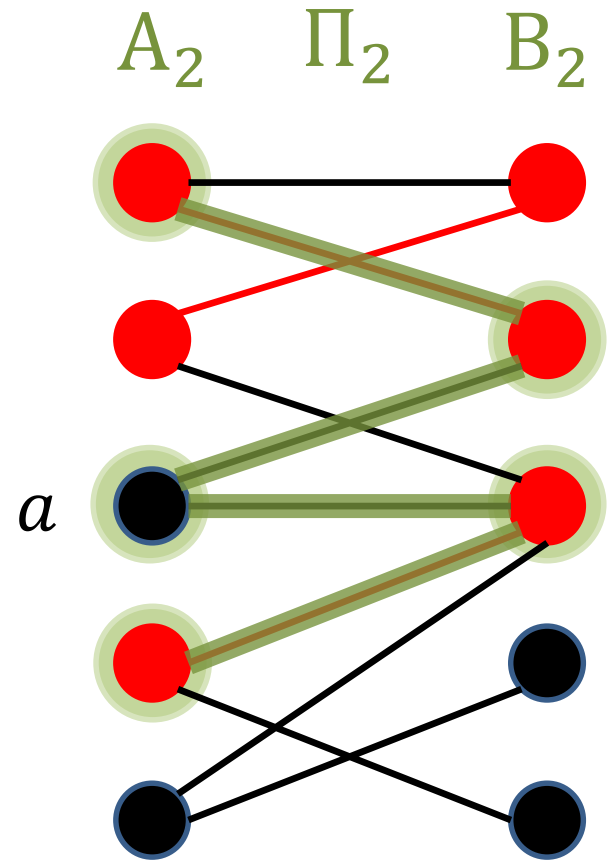


- Matchings in bipartiten Graphen:

Es gilt: $|A_n| > |B_n|$.
(B_n enthält nur gematchte Knoten und A_n enthält alle entsprechenden Matches plus a.)

Mit $|\Gamma(A_n)| \geq |A_n|$ (Annahme) gilt $B_n \subset \Gamma(A_n)$.

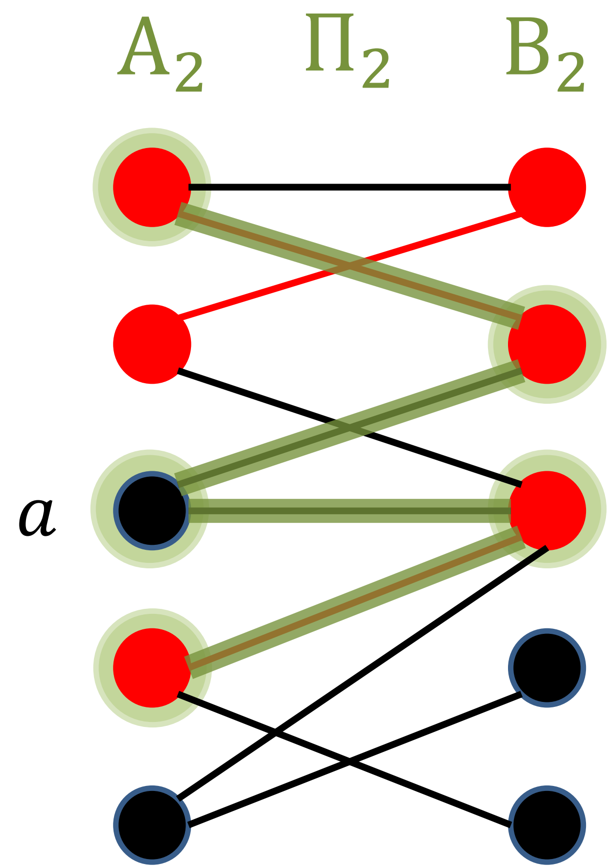
Es folgt: Mindestens ein Pfad aus Π_n kann zu einem längeren alternierenden Pfad erweitert werden ($\Pi_{n+2} \neq \emptyset$).



- Matchings in bipartiten Graphen:

Da alternierende Pfade jeden Knoten aus A höchstens einmal enthalten, wird irgendwann ein n erreicht, sodass ein Pfad aus Π_n zu einem augmentierenden Pfad erweitert werden kann.

Damit sind Behauptung und Satz bewiesen.



- Matchings in bipartiten Graphen:
  - Aus dem Beweis kann ein Algorithmus zur Berechnung eines perfekten Matchings gewonnen werden: Finde iterativ für jeden noch ungematchten Knoten aus A einen augmentierenden Pfad.
  - Aus dem Heiratssatz kann direkt das folgende Korollar abgeleitet werden.

  Korollar: Sei G ein k-regulärer bipartiter Graph. Dann enthält G ein perfektes Matching.

- Matchings in bipartiten Graphen:

  Stabile Heirat:

  - Seien F, M zwei Mengen von je n Frauen und Männern. Eine Heirat ist ein Matching $H \subseteq \{\{f, m\} \mid f \in F, m \in M\}$.
  - Jede Person hat eine Präferenzliste für die Personen vom anderen Geschlecht (totale Ordnung auf F bzw. M).
  - Eine Heirat ist stabil, wenn alle Personen verheiratet sind und es keine Paare $(a, b), (a', b') \in H$ gibt mit:
    - a bevorzugt b' vor b und
    - b' bevorzugt a vor a'.

    (Sonst lassen sich a und b' scheiden und heiraten einander.)

- Matchings in bipartiten Graphen:
  - Der Gale-Shapley Algorithmus berechnet eine stabile Heirat.
  - Im Algorithmus werden Personen verlobt oder verheiratet. Eine Verlobung darf gelöst werden, eine Heirat nicht.
  - Am Anfang ist niemand verlobt oder verheiratet.
  - Der folgende Schritt wird iteriert, solange es mindestens einen unverlobten Mann b gibt:
    - b macht derjenigen Dame a einen Antrag, die er noch nicht gefragt hatte und er unter diesen Damen bevorzugt.

      a verlobt sich mit b, wenn sie noch nicht verlobt ist, oder sie b ihrem derzeitigen Verlobten vorzieht.
  - Sind alle Männer verlobt, so heiratet jeder seine Verlobte.

- Matchings in bipartiten Graphen:

Satz (Gale, Shapley 1962): Der Algorithmus berechnet in maximal n^2 Schritten eine stabile Heirat.

Beweis: Der Algorithmus terminiert mit einer Heirat. Solange es einen unverlobten Mann b gibt, gibt es auch mindestens eine unverlobte Frau. Da verlobte Frauen verlobt bleiben, haben unverlobte Frauen noch keinen Antrag erhalten, auch nicht von b. Daher gilt in jeder Runde: entweder verlobt sich eine Frau zum ersten Mal, oder sie verbessert sich. Da eine Frau sich höchstens n-mal verbessern kann, sind irgendwann alle Frauen und somit alle Männer verlobt.

Der Algorithmus terminiert nach höchstens n^2 Schritten.

Ein Mann fragt eine Frau höchstens einmal.

- Matchings in bipartiten Graphen:

  Die Heirat ist stabil.

  Durch Widerspruch: Ist die Heirat instabil, dann gibt es $(a, b), (a', b')$ mit: a bevorzugt b' und b' bevorzugt a.

  Da Frauen sich nur verbessern können, hat a keinen Antrag von b' erhalten. Der Grund dafür kann nur sein, dass b' sich mit einer Frau verlobt hat, die er zu a vorzieht, und diese Verlobung nicht gelöst wurde. Diese Frau kann aber nur a' sein, im Widerspruch zur Annahme, dass a diejenige ist, die von b' bevorzugt wird.

Praktische Anwendungen in der Informatik:

- Zuordnungsprobleme (Arbeitsvermittlung, Partnervermittlung,…)
- Analyse und Algorithmen auf großen Daten