WS 2014/15

Diskrete Strukturen

Kapitel 5: Algebraische Strukturen (Grundlagen)

Hans-Joachim Bungartz

Lehrstuhl für wissenschaftliches Rechnen
Fakultät für Informatik
Technische Universität München

http://www5.in.tum.de/wiki/index.php/Diskrete_Strukturen_-_Winter_14

Kapitel 5: Algebraische Strukturen (Grundlagen)

- Algebraische Strukturen
  - **Grundlagen**
  - Gruppen
  - Endliche Körper

- Die Algebra als Teilgebiet der Mathematik befasst sich mit algebraischen Strukturen, d.h. mit Mengen und darauf definierten Operationen, von denen nur bekannt ist, dass sie gewisse Eigenschaften (wie z.B. Assoziativität, Kommutativität, Distributivität, Idempotenz, …) besitzen.
- Welche Eigenschaften jede Operation hat, wird durch Axiome festgelegt.

- Algebra (als Struktur):

  Definition: Eine Algebra besteht aus einer Trägermenge S und einer Menge Φ von Operatoren (oder Operationen) auf S (der Operatorenmenge).

  Ein Operator der Stelligkeit (arity) $m \in \mathbb{N}$ ist eine Abbildung $S^m \to S$.

- Beispiele:
  - $\langle \mathbb{N}, + \rangle, \langle \mathbb{Z}, + \rangle, \langle \mathbb{N}, +, * \rangle$ sind Algebren.
  - Sei $Q = \{ x \in \mathbb{N} \mid x \text{ ist Quadratzahl} \}$.
    $\langle Q, * \rangle$ ist eine Algebra.
    $\langle Q, + \rangle$ ist keine Algebra.
  - $\langle \{\mathbf{true}, \mathbf{false}\}, \wedge, \vee, \neg \rangle$ ist eine Algebra.
  - Sei U eine Menge. $\langle 2^U, \cup, \cap \rangle$ ist eine Algebra.
  - Sei $F(U)$ die Menge aller Abbildungen $U \to U$. $\langle F(U), \circ \rangle$ ist eine Algebra (die Operation $\circ$ bezeichnet die Komposition von Abbildungen).

- Multiplikationstafeln:

  Algebren mit zweistelligen Operatoren lassen sich über ihre Multiplikationstafeln (Operationstafeln) darstellen.

  Beispiel: $\langle \{\mathbf{true}, \mathbf{false}\}, \wedge, \vee \rangle$

$\vee$	T	F
T	T	T
F	T	F

$\wedge$	T	F
T	T	F
F	F	F

- Neutrales und inverses Element:

  Definition: Sei $\langle S, \circ \rangle$ eine Algebra. Ein Element $e \in S$ heißt linksneutrales (bzw. rechtsneutrales) Element für den Operator $\circ$, falls

  $$\forall a \in S: e \circ a = a \text{ (bzw. } \forall a \in S: a \circ e = a).$$

  Ein neutrales Element ist ein Element, welches sowohl links- als auch rechtsneutral ist.

- Neutrales und inverses Element:

  Definition: Sei $\langle S, \circ \rangle$ eine Algebra mit einem neutralen Element e und sei $a \in S$.

  Ein Element $x \in S$ ist ein rechtsinverses (bzw. linksinverses) Element von a, falls $a \circ x = e$ (bzw. $x \circ a = e$).

  Ist x sowohl rechts- als auch linksinverses Element zu a, so heißt es inverses Element zu a.

- Neutrales und inverses Element:

  Beispiele:

  – Die Algebra $\langle \{a, b\}, \circ \rangle$ mit

$\circ$	a	b
a	a	a
b	b	b

hat rechtsneutrale Elemente a und b, jedoch keine linksneutralen Elemente.

- Neutrales und inverses Element:
  - Die neutralen Elemente der Addition bzw. Multiplikation auf den natürlichen/ganzen Zahlen sind 0 bzw. 1.
  - In $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$ hat jedes Element x ein inverses Element: $-x$.
  - In $\langle \mathbb{R} \setminus \{0\}, * \rangle$ hat jedes Element x ein inverses Element: $1/x$.
  - In $\langle \mathbb{Z} \setminus \{0\}, * \rangle$ haben nur die Elemente 1 und -1 ein inverses Element.

- Halbgruppen, Monoide, Gruppen:

  Definition: Eine Algebra $A = \langle S, \circ \rangle$ mit einem zweistelligen Operator $\circ$ heißt Halbgruppe, falls $\circ$ assoziativ ist, also gilt:

  $$\forall a, b, c \in S\colon\ a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c.$$

  Beispiele:

  - $\langle \mathbb{N}, + \rangle, \langle \mathbb{Z}, + \rangle, \langle \mathbb{N}, * \rangle, \langle \mathbb{Z}, * \rangle, \langle 2^U, \cup \rangle, \langle F(U), \circ \rangle$ sind Halbgruppen.
  - $\langle \{\mathbf{true}, \mathbf{false}\}, \rightarrow \rangle$ ist keine Halbgruppe. Gegenbeispiel?

- Halbgruppen, Monoide, Gruppen:

  Welche der beiden folgenden, durch ihre Multiplikationstafeln beschriebenen Algebren mit $S = \{a_1, a_2\}$ sind Halbgruppen?

$\circ$	a_1	a_2
a_1	a_1	a_1
a_2	a_2	a_2

$\circ$	a_1	a_2
a_1	a_2	a_2
a_2	a_1	a_1

- Halbgruppen, Monoide, Gruppen:

  Definition: Eine Algebra $A = \langle S, \circ \rangle$ mit einem zweistelligen Operator $\circ$ heißt Monoid, falls $\circ$ assoziativ ist und es ein neutrales Element gibt.

  Beispiele:

  – $\langle \mathbb{N}_0, + \rangle, \langle \mathbb{Z}, + \rangle, \langle \mathbb{N}, * \rangle, \langle 2^U, \cup \rangle, \langle 2^U, \cap \rangle, \langle F(U), \circ \rangle$ sind Monoide. Was sind die neutralen Elemente?

  – $\langle \mathbb{N}, + \rangle$ ist Halbgruppe aber kein Monoid.

  – $\langle \mathbb{Z} \setminus \{0\}, + \rangle$ ist keine Algebra. Warum?

- Halbgruppen, Monoide, Gruppen:

  Definition: Eine Algebra $A = \langle S, \circ \rangle$ mit einem zweistelligen Operator $\circ$ heißt Gruppe, falls $\circ$ assoziativ ist, es ein neutrales Element gibt und jedes Element ein inverses Element besitzt.

  Beispiele:

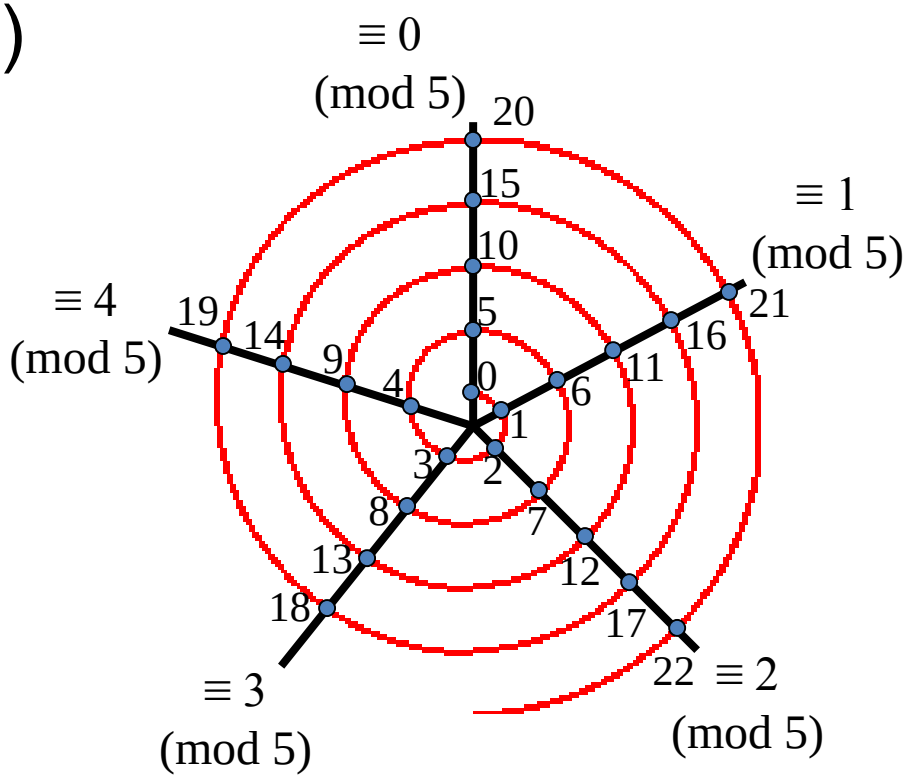
  - $\langle \mathbb{N}_0, + \rangle$ ist Monoid, aber keine Gruppe.
  - $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$, $\langle \mathbb{Q} \setminus \{0\}, * \rangle$ und $\langle \mathbb{R} \setminus \{0\}, * \rangle$ sind Gruppen.
  - $\langle B(U), \circ \rangle$ ist Gruppe.

- Einschub – Modulare Arithmetik:

  Definition: Sei $m \in \mathbb{N}$. Zwei Zahlen $x, y \in \mathbb{Z}$ sind kongruent modulo m gdw.
  - die Differenz $(x - y)$ durch m teilbar ist,
  - es $k \in \mathbb{Z}$ gibt mit $x = y + k\,m$,
  - sie bei Division durch m den gleichen Rest haben.

  Die Kongruenz modulo m ist eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Z}$. Sie wird $x \equiv_m y$ oder $x \equiv y \bmod m$ geschrieben.

- Einschub Modulare Arithmetik:
  - Spiralvisualisierung der Äquivalenzklassen (mod 5)



- Einschub Modulare Arithmetik:

  Definition: Seien $x, y, m \in \mathbb{N}$.

  $(x \bmod y)$ bezeichnet den Rest der Division $x : y$.

  $x +_m y$ ist eine Abkürzung für $(x + y) \bmod m$.

  $x *_m y$ ist eine Abkürzung für $(x * y) \bmod m$.

- Zurück zu Gruppen:
  Beispiele: Sei $\mathbb{Z}_n = \{0, \ldots, n-1\}$, $n \geq 2$.
  - $\langle \mathbb{Z}_n, +_n \rangle$ ist eine Gruppe:
    - 0 ist neutrales Element.
    - $(n-a)$ ist inverses Element von a für alle $a \neq 0$.
  - $\langle \mathbb{Z}_5 \setminus \{0\}, *_5 \rangle$ ist eine Gruppe:
    - 1 ist neutrales Element;
    - 1 ist inverses Element von 1; 3 von 2; 2 von 3; 4 von 4.
  - $\langle \mathbb{Z}_4 \setminus \{0\}, *_4 \rangle$ ist keine Gruppe:
    - 2 hat kein inverses Element.

- Abelsche Gruppen:

  Definition: Eine Gruppe (ein Monoid, eine Halbgruppe) heißt abelsch oder kommutativ, falls $\circ$ kommutativ ist, also gilt:

  $$\forall a, b \in S: a \circ b = b \circ a.$$

  Beispiele:

  – $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$, $\langle \mathbb{R} \setminus \{0\}, * \rangle$ und $\langle \mathbb{Z}_n, +_n \rangle$ sind abelsch.

  – $\langle B(U), \circ \rangle$ ist nicht abelsch.
  Gegenbeispiel?

Praktische Anwendungen in der Informatik:

- Endliche Gruppen in der Computeralgebra
- Modulo-Rechnen in der Algorithmik (z.B. Index-Arithmetik)