

WS 2015/16

Diskrete Strukturen

Kapitel 4: Graphen (Matchings)

Hans-Joachim Bungartz

Lehrstuhl für wissenschaftliches Rechnen
Fakultät für Informatik
Technische Universität München

http://www5.in.tum.de/wiki/index.php/Diskrete_Strukturen_-_Winter_15

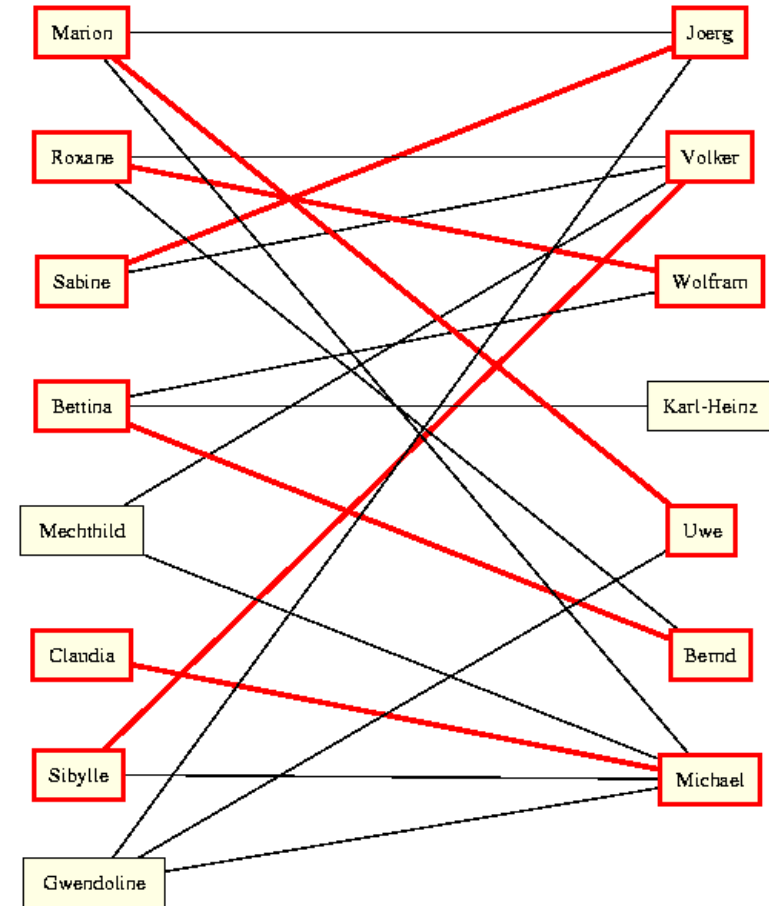
- Graphentheorie
 - Grundlagen
 - Bäume
 - Euler- und Hamiltonkreise
 - Planarität und Färbungen
 - **Matchings**



- **Das Heiratsproblem:**
 - Gegeben seien heiratswillige Damen und Herren. Jede Dame gibt an, mit welchem der Herren sie sich eventuell vermählen würde.
 - Das Problem besteht nun darin, möglichst viele Damen so zu verheiraten, dass jede Dame einen Herren ihrer Wahl erhält, und dass selbstverständlich keine zwei Damen mit demselben Herrn verheiratet sind.



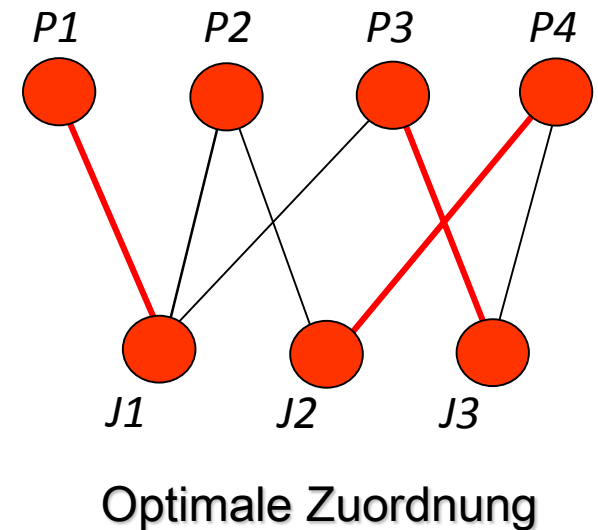
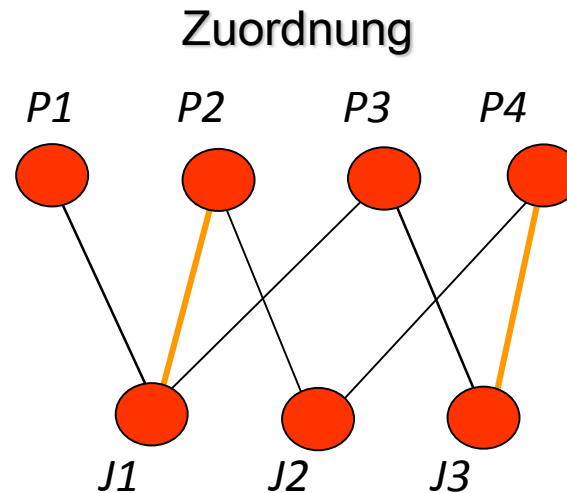
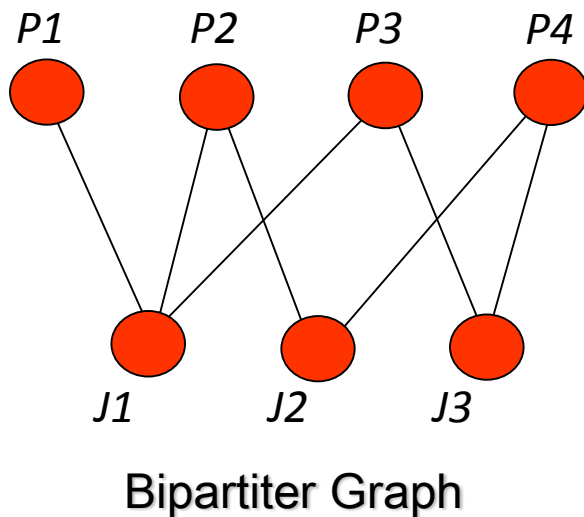
- Das **Heiratsproblem**:
 - Der einer konkreten Situation zugrunde liegende bipartite Graph.
 - **Das Problem**:
Finde eine **maximale** Menge M von Kanten, sodass keine zwei Kanten aus M einen gemeinsamen Endknoten haben.



- Job-Zuordnung:
 - Gegeben m Arbeitnehmer mit unterschiedlichen Fähigkeiten und n Jobs.
 - Gesucht ist eine Zuordnung, sodass möglichst viele Jobs vermittelt werden.



- Job-Zuordnung:
 - Gesucht ist eine Zuordnung, sodass möglichst viele Jobs vermittelt werden.

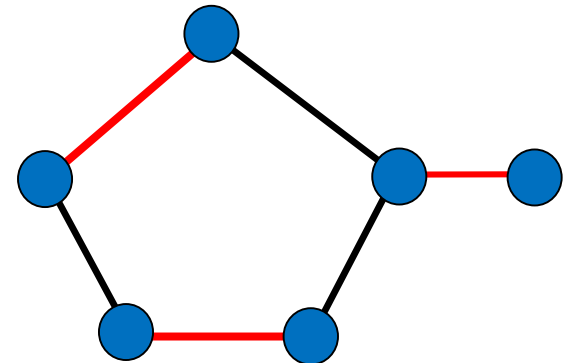
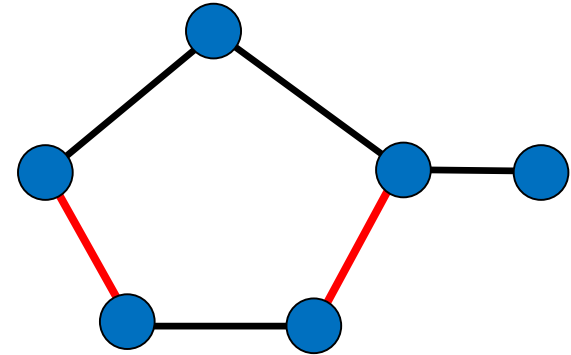


- Matchings:

Definition: Sei $G = (V, E)$ ein Graph.

- Ein **Matching** ist eine Menge $M \subseteq E$ von **paarweise disjunkten** Kanten.
- Ein Matching M ist **perfekt**, falls jeder Knoten zu (genau) einer Kante von M gehört.

Fakt: Ein Matching M ist perfekt gdw. $|M| = |V|/2$.



- Matchings in bipartiten Graphen:
Der Heiratssatz sagt:
Jede Dame kann mit einem
Wunschkandidaten verheiratet werden
genau dann, wenn...



- Matchings in bipartiten Graphen.

Der Heiratssatz sagt:

Jede Dame kann mit einem
Wunschkandidaten verheiratet werden
genau dann, wenn

jede k -Untermenge von Damen sich für
mindestens k Herren interessiert.



- Matchings in bipartiten Graphen:

Satz (Heiratssatz – Hall 1935):

Für einen bipartiten Graphen $G = (A, B, E)$ gibt es genau dann ein Matching M der Kardinalität $|M| = |A|$, wenn gilt

$$|\Gamma(X)| \geq |X| \text{ für alle } X \subseteq A.$$

Hierbei ist $\Gamma(X)$ die Nachbarschaft der Knotenmenge X , d.h. $\Gamma(X) = \bigcup_{v \in X} \Gamma(v)$.



- Matchings in bipartiten Graphen:

Beweis des Heiratssatzes:

(„ \Rightarrow “) Indirekter Beweis:

Wenn es ein $X \subseteq A$ gibt mit $|X| > |\Gamma(X)|$ gibt, dann können nicht alle Knoten aus X zugleich gematcht werden. Es gibt also kein Matching M mit $|M| = |A|$.



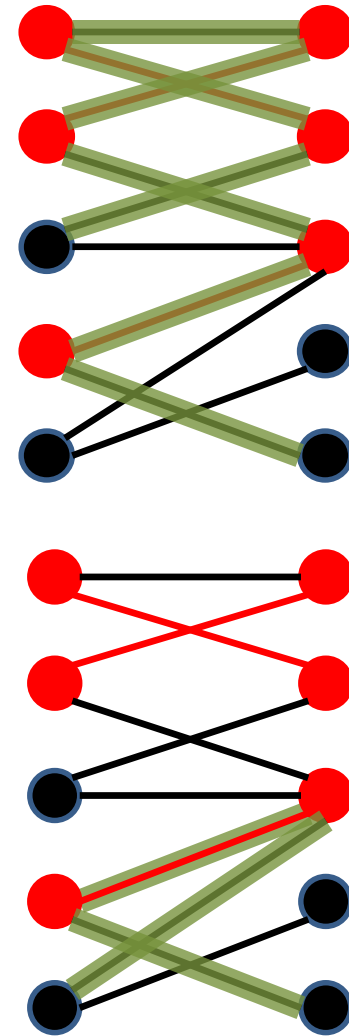
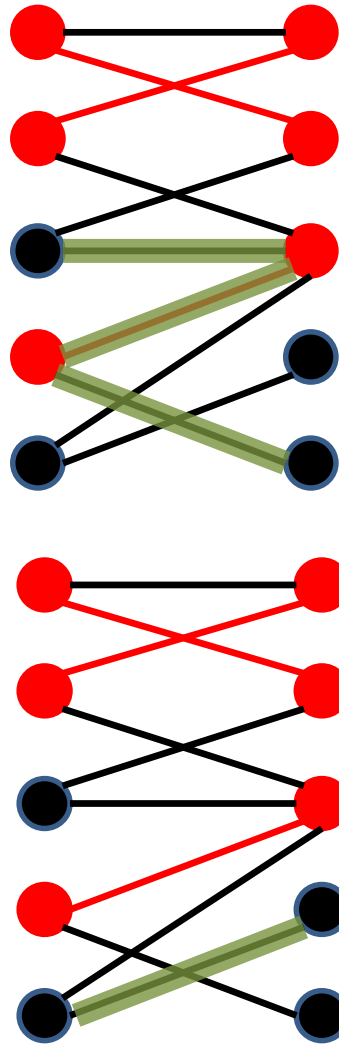
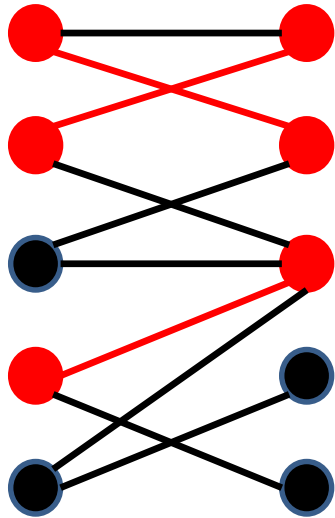
- Matchings in bipartiten Graphen:

Vorbereitung für („ \Leftarrow “):

Definition: Sei M ein Matching. Ein Pfad heißt **augmentierend** oder **Verbesserungspfad** bezüglich M , wenn:

1. bei dem Pfad sich gematchte und ungematchte Kanten (bezüglich M) abwechseln (wir sagen, dass der Pfad **alternierend** ist), und
2. Anfangs- und Endknoten ungematcht sind.





- Matchings in bipartiten Graphen:

(„ \leftarrow “): Sei M ein Matching mit $|M| < |A|$.

Wir behaupten: Es gibt einen augmentierenden Pfad bezüglich M .

Wenn diese Behauptung gilt, dann können die Endknoten des Pfades gematcht werden.

Damit gibt es ein neues Matching M' mit $|M'| = |M| + 1$, und die Aussage folgt.

Wir zeigen nun, dass die Behauptung gilt.



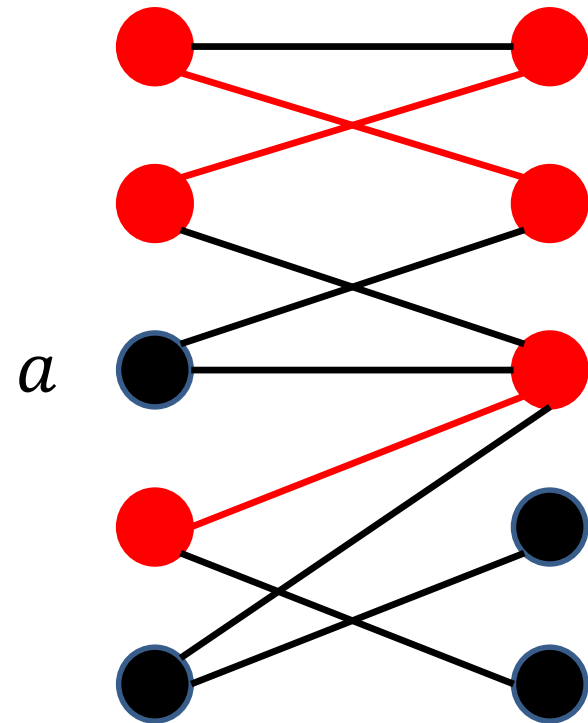
- Matchings in bipartiten Graphen:

Beweis der Behauptung: Da $|M| < |A|$, gibt es ein $a \in A$, welches in M ungematcht ist.

Sei Π_n die Menge der alternierenden Pfade aus a mit gerader Länge n .

Kann ein Element von Π_n zu einem augmentierenden Pfad erweitert werden, dann sind wir fertig.

Sonst: Seien A_n, B_n die Knoten von A, B , die in Π_n vorkommen.



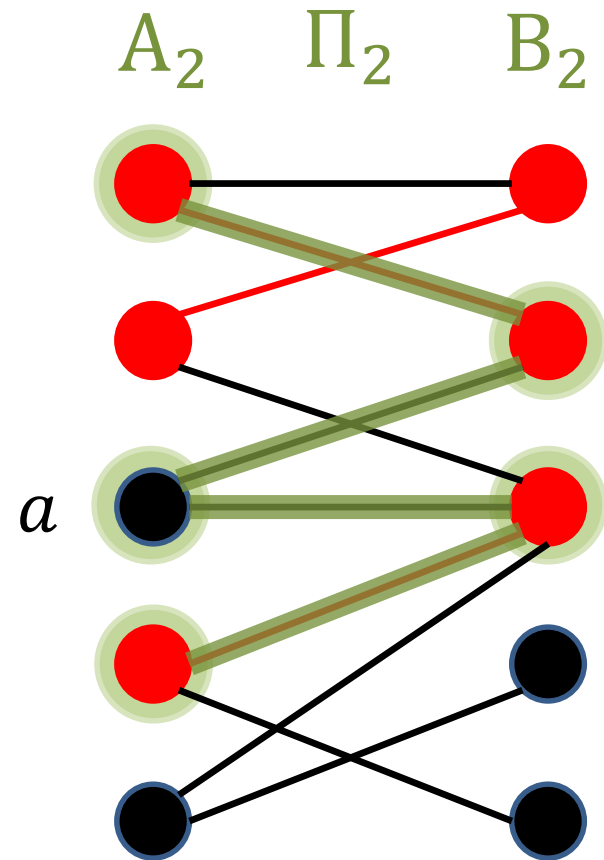
- Matchings in bipartiten Graphen:

Beweis der Behauptung: Da $|M| < |A|$, gibt es ein $a \in A$, welches in M ungematcht ist.

Sei Π_n die Menge der alternierenden Pfade aus a mit gerader Länge n .

Kann ein Element von Π_n zu einem augmentierenden Pfad erweitert werden, dann sind wir fertig.

Sonst: Seien A_n, B_n die Knoten von A, B , die in Π_n vorkommen.



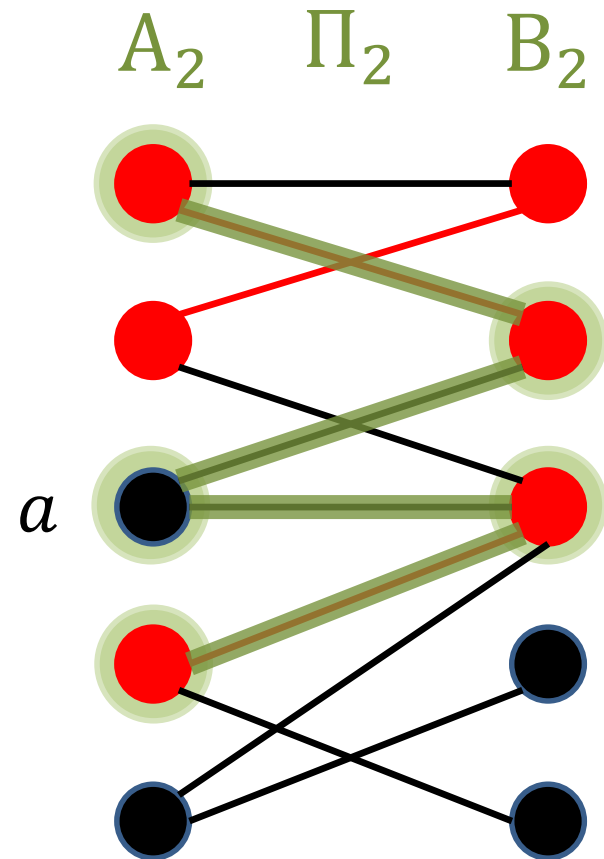
- Matchings in bipartiten Graphen:

Es gilt: $|A_n| > |B_n|$.

(B_n enthält nur gematchte Knoten und A_n enthält alle entsprechenden Matches plus a .)

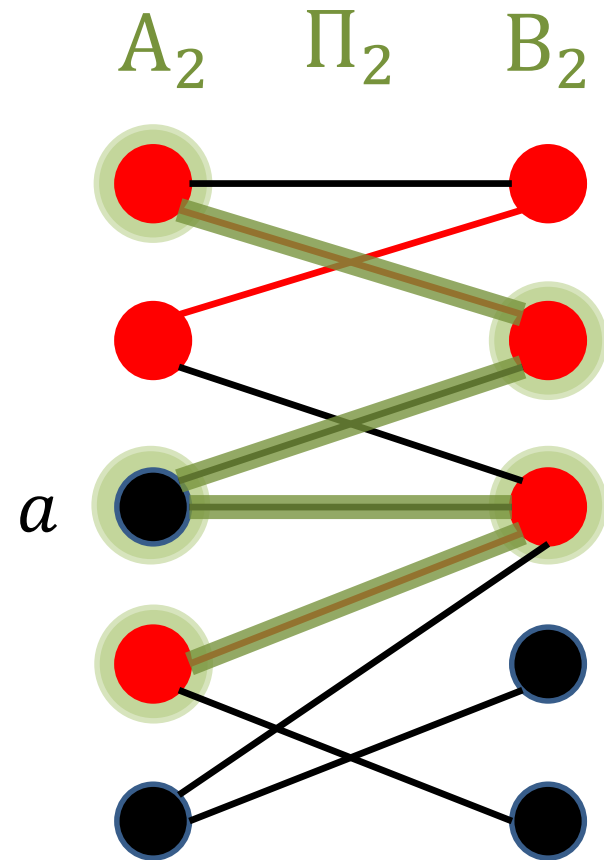
Mit $|\Gamma(A_n)| \geq |A_n|$
(Annahme) gilt $B_n \subset \Gamma(A_n)$.

Es folgt: Mindestens ein Pfad aus Π_n kann zu einem längeren alternierenden Pfad erweitert werden ($\Pi_{n+2} \neq \emptyset$).



- Matchings in bipartiten Graphen:

Da alternierende Pfade jeden Knoten aus A höchstens einmal enthalten, wird irgendwann ein n erreicht, sodass ein Pfad aus Π_n zu einem augmentierenden Pfad erweitert werden kann. Damit sind Behauptung und Satz bewiesen.



- Matchings in bipartiten Graphen:
 - Aus dem Beweis kann ein Algorithmus zur Berechnung eines perfekten Matchings gewonnen werden: Finde iterativ für jeden noch ungematchten Knoten aus A einen augmentierenden Pfad.
 - Aus dem Heiratssatz kann direkt das folgende Korollar abgeleitet werden.

Korollar: Sei G ein k -regulärer bipartiter Graph. Dann enthält G ein perfektes Matching.



- Matchings in bipartiten Graphen:

Stabile Heirat:

- Seien F, M zwei Mengen von je n Frauen und Männern. Eine **Heirat** ist ein Matching $H \subseteq \{\{f, m\} \mid f \in F, m \in M\}$.
- Jede Person hat eine Präferenzliste für die Personen vom anderen Geschlecht (totale Ordnung auf F bzw. M).
- Eine Heirat ist **stabil**, wenn alle Personen verheiratet sind und es **keine** Paare $(a, b), (a', b') \in H$ gibt mit:
 - a bevorzugt b' vor b und
 - b' bevorzugt a vor a' .(Sonst lassen sich a und b' scheiden und heiraten einander.)



- Matchings in bipartiten Graphen:
 - Der **Gale-Shapley Algorithmus** berechnet eine stabile Heirat.
 - Im Algorithmus werden Personen verlobt oder verheiratet. Eine Verlobung darf gelöst werden, eine Heirat nicht.
 - Am Anfang ist niemand verlobt oder verheiratet.
 - Der folgende Schritt wird iteriert, solange es mindestens einen unverlobten Mann b gibt:
 - b macht derjenigen Dame a einen Antrag, die er noch nicht gefragt hatte und er unter diesen Damen bevorzugt.
 a verlobt sich mit b , wenn sie noch nicht verlobt ist, oder sie b ihrem derzeitigen Verlobten vorzieht.
 - Sind alle Männer verlobt, so heiratet jeder seine Verlobte.



- Matchings in bipartiten Graphen:

Satz (Gale, Shapley 1962): Der Algorithmus berechnet in maximal n^2 Schritten eine stabile Heirat.

Beweis: Der Algorithmus terminiert mit einer Heirat.

Solange es einen unverlobten Mann b gibt, gibt es auch mindestens eine unverlobte Frau. Da verlobte Frauen verlobt bleiben, haben unverlobte Frauen noch keinen Antrag erhalten, auch nicht von b . Daher gilt in jeder Runde: entweder verlobt sich eine Frau zum ersten Mal, oder sie verbessert sich. Da eine Frau sich höchstens n -mal verbessern kann, sind irgendwann alle Frauen und somit alle Männer verlobt.

Der Algorithmus terminiert nach höchstens n^2 Schritten.

Ein Mann fragt eine Frau höchstens einmal.



- Matchings in bipartiten Graphen:

Die Heirat ist stabil.

Durch Widerspruch: Ist die Heirat instabil, dann gibt es $(a, b), (a', b')$ mit: a bevorzugt b' und b' bevorzugt a .

Da Frauen sich nur verbessern können, hat a keinen Antrag von b' erhalten. Der Grund dafür kann nur sein, dass b' sich mit einer Frau verlobt hat, die er zu a vorzieht, und diese Verlobung nicht gelöst wurde. Diese Frau kann aber nur a' sein, im Widerspruch zur Annahme, dass a diejenige ist, die von b' bevorzugt wird.



Praktische Anwendungen in der Informatik:

- Zuordnungsprobleme (Arbeitsvermittlung, Partnervermittlung,...)
- Analyse und Algorithmen auf großen Daten

