

WS 2015/16

# Diskrete Strukturen

## Kapitel 5: Algebraische Strukturen (Gruppen)

Hans-Joachim Bungartz

Lehrstuhl für wissenschaftliches Rechnen  
Fakultät für Informatik  
Technische Universität München

[http://www5.in.tum.de/wiki/index.php/Diskrete\\_Strukturen\\_-\\_Winter\\_15](http://www5.in.tum.de/wiki/index.php/Diskrete_Strukturen_-_Winter_15)

- Algebraische Strukturen
  - Grundlagen
  - **Gruppen**
  - Endliche Körper



- Eigenschaften von Gruppen:

**Satz:** Sei  $\langle S, \circ \rangle$  eine Gruppe. Dann gilt:

- (1)  $S$  enthält genau ein neutrales Element  $e$ .
- (2) Jedes  $a \in S$  hat genau ein inverses Element, bezeichnet als  $a^{-1}$ .
- (3) (**Involutionsgesetz**): Für alle  $a \in S$ :  $a = (a^{-1})^{-1}$ .
- (4) (**Kürzungsregel**): Für alle  $a, b, c \in S$ :
  - wenn  $a \circ c = b \circ c$ , dann  $a = b$ ;
  - wenn  $c \circ a = c \circ b$ , dann  $a = b$ .



- Eigenschaften von Gruppen:

(5) (**Eindeutige Lösung linearer Gleichungen**):

Für alle  $a, x, b \in S$ :

- wenn  $a \circ x = b$ , dann  $x = a^{-1} \circ b$ ;
- wenn  $x \circ a = b$ , dann  $x = b \circ a^{-1}$ .

(6) (**Injektivität von  $\circ$** ): Für alle  $a, b, c \in S$ :

- $a \neq b$ , gdw.  $a \circ c \neq b \circ c$ ;
- $a \neq b$ , gdw.  $c \circ a \neq c \circ b$ .

(7) (**Surjektivität von  $\circ$** ): Für alle  $a, b \in S$ :

- es gibt  $x \in S$ :  $a \circ x = b$ ;
- es gibt  $y \in S$ :  $y \circ a = b$ .



- Eigenschaften von Gruppen:

**Beweis:**

(1) **Beweis der Eindeutigkeit von  $e$ :**

Seien  $e_1, e_2$  neutrale Elemente. Dann gilt

$$e_1 = e_1 \circ e_2 = e_2 . \quad \square$$

(2) **Beweis der Eindeutigkeit von  $a^{-1}$ :**

Seien  $i_1, i_2$  inverse Elemente von  $a$ .

$$\begin{aligned} i_1 &= i_1 \circ e = i_1 \circ (a \circ i_2) \\ &= (i_1 \circ a) \circ i_2 = e \circ i_2 = i_2 . \quad \square \end{aligned}$$



- Eigenschaften von Gruppen

**Beweis (Fort.):**

**(3) Beweis von  $a = (a^{-1})^{-1}$ :**

$$\begin{aligned}(a^{-1})^{-1} &=: b = b \circ e = b \circ (a^{-1} \circ a) \\ &= (b \circ a^{-1}) \circ a = e \circ a = a. \quad \square\end{aligned}$$

**(4) Beweis von  $a \circ c = b \circ c \rightarrow a = b$ :**

$$\begin{aligned}b &= b \circ (c \circ c^{-1}) = (b \circ c) \circ c^{-1} \\ &= (a \circ c) \circ c^{-1} = a \circ (c \circ c^{-1}) = a. \quad \square\end{aligned}$$



- Ordnung eines Gruppenelements:

**Definition:** Sei  $\langle S, \circ \rangle$  eine Gruppe und sei  $a \in S$ . Wir definieren:

- $a^0 := e$ ,
- $\forall n \geq 1: a^n := a \circ a^{n-1} = a^{n-1} \circ a$ ,
- $\forall n \geq 1: a^{-n} := (a^{-1})^n$ .

Man bezeichnet  $a^n$  auch als die  $n$ -te Potenz des Elements  $a$ .



- Ordnung eines Gruppenelements:

**Definition:** Sei  $\langle S, \circ \rangle$  eine Gruppe mit neutralem Element  $e$  und sei  $a \in S$ .

Die **Ordnung  $\text{ord}(a)$  von  $a$**  ist die kleinste Zahl  $r \in \mathbb{N}$ , sodass  $a^r = e$ . Falls kein solches  $r$  existiert, dann ist  **$\text{ord}(a) := \infty$** .





- Ordnung eines Gruppenelements:

Beispiele:

$\langle \mathbb{Z}, + \rangle$ :  $\text{ord}(1) = \infty$ .

$\langle \mathbb{Z}_{12}, +_{12} \rangle$ :

$a$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$\text{ord}(a)$	1	12	6	4	3	12	2	12	3	4	6	12

$\langle \mathbb{Z}_7 \setminus \{0\}, *_{7} \rangle$ :

$a$	1	2	3	4	5	6
$\text{ord}(a)$	1	3	6	3	6	2



- Ordnung eines Gruppenelements:

**Satz:** Sei  $\langle S, \circ \rangle$  eine **endliche** Gruppe. Dann hat auch jedes Element in  $S$  endliche Ordnung.

**Beweis:** Sei  $a \in S$  beliebig. Mindestens zwei von  $a^0, \dots, a^{|S|}$  sind gleich (Schubfachprinzip). Wähle  $0 \leq j < k \leq |S|$  mit  $a^j = a^k$  und  $k$  minimal.

Durch Multiplikation mit  $a^{-j}$  erhält man  $a^0 = a^{k-j}$ .

Aus der Minimalität von  $k$  folgt  $j = 0$  (sonst nehme man  $k' = k - 1, j' = j - 1$ ), d.h.  $e = a^k$ .

Aus der Minimalität von  $k$  folgt  $\text{ord}(a) = k$ .



- Untergruppen:

**Definition:** Ist  $\langle S, \circ \rangle$  eine Gruppe und  $S' \subseteq S$ , so heißt  $\langle S', \circ \rangle$  **Untergruppe** von  $\langle S, \circ \rangle$ , wenn sie selbst eine Gruppe ist.

**Beispiele:**

- $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$  ist Untergruppe von  $\langle \mathbb{Q}, + \rangle$ .
- $\langle \{0, 2, 4\}, +_6 \rangle$  ist Untergruppe von  $\langle \mathbb{Z}_6, +_6 \rangle$ .
- $\langle \mathbb{Z}_n, +_n \rangle$  ist nicht Untergruppe zu  $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$ , da sich die Operationen unterscheiden.



- Untergruppen:

**Lemma:** Sei  $G$  eine Gruppe und sei  $H$  eine Untergruppe von  $G$ . Die neutralen Elemente von  $G$  und  $H$  sind identisch.

**Beweis:** Seien  $e_H$  und  $e_G$  die neutralen Elemente von  $H$  und  $G$ . Dann gilt

$$e_H \circ e_H = e_H = e_G \circ e_H$$

und daraus folgt (Kürzungsregel)  $e_H = e_G$ .  $\square$



- Untergruppen:

**Satz:** Seien  $\langle S_1, \circ \rangle$  und  $\langle S_2, \circ \rangle$  Untergruppen von  $\langle S, \circ \rangle$ . Dann ist auch  $\langle S_1 \cap S_2, \circ \rangle$  eine Untergruppe von  $\langle S, \circ \rangle$ .

**Beweis:** Aus dem vorigen Lemma folgt  $e \in S_1$  und  $e \in S_2$  und damit gilt  $e \in S_1 \cap S_2$ .

Sei  $a \in S_1 \cap S_2$ . Aus der Eindeutigkeit von  $a^{-1}$  in  $\langle S, \circ \rangle$  folgt, dass  $a^{-1}$  auch das inverse Element von  $a$  in  $\langle S_1, \circ \rangle$  und  $\langle S_2, \circ \rangle$  ist. Es gilt also  $a^{-1} \in S_1$  und  $a^{-1} \in S_2$  und damit  $a^{-1} \in S_1 \cap S_2$ .  $\square$



- Untergruppen:

**Satz:** Sei  $\langle S, \circ \rangle$  eine endliche Gruppe und  $a \in S$ . Dann ist  $\langle \{a^0, a^1, \dots, a^{\text{ord}(a)-1}\}, \circ \rangle$  eine Untergruppe von  $\langle S, \circ \rangle$ .

**Beweis:** Folgt sofort aus  $a^0 = a^{\text{ord}(a)} = e$ .  $\square$



- Nebenklassen:

**Definition:** Sei  $H = \langle T, \circ \rangle$  eine Untergruppe von  $G = \langle S, \circ \rangle$  und sei  $b \in S$ . Dann heißt

$$T \circ b := \{ c \circ b \mid c \in T \} =: H \circ b$$

eine **rechte Nebenklasse** von  $H$  in  $G$  und

$$b \circ T := \{ b \circ c \mid c \in T \} =: b \circ H$$

eine **linke Nebenklasse** von  $H$  in  $G$  (engl. coset).

Der Index  $\text{ind}_G(H)$  von  $H$  in  $G$  ist die Anzahl von verschiedenen linken Nebenklassen von  $H$  in  $G$ .



- Nebenklassen:

Beispiel:

$H = \langle \{0,3,6,9\}, +_{12} \rangle$  bildet eine Untergruppe von  $\langle \mathbb{Z}_{12}, +_{12} \rangle$  mit drei verschiedenen Nebenklassen:

$$0 \circ H = 3 \circ H = 6 \circ H = 9 \circ H = \{0,3,6,9\},$$

$$1 \circ H = 4 \circ H = 7 \circ H = 10 \circ H = \{1,4,7,10\},$$

$$2 \circ H = 5 \circ H = 8 \circ H = 11 \circ H = \{2,5,8,11\}.$$





- Nebenklassen:

**Satz:** Sei  $H$  Untergruppe von  $G$ . Dann bildet die Menge der rechten (linken) Nebenklassen von  $H$  eine Partition (Zerlegung in disjunkte Teilmengen) von  $G$ .

**Beweis:** Zuerst zeigen wir  $H \circ h = H$  für alle  $h \in H$ .

- $H \circ h \subseteq H$ , weil  $H$  abgeschlossen bzgl.  $\circ$  ist.
- Sei nun  $h' \in H$  beliebig. Es gilt  $h' \circ h^{-1} \in H$  und daher  $h' = h' \circ (h^{-1} \circ h) = (h' \circ h^{-1}) \circ h \in H \circ h$ .



- Nebenklassen:

**Beweis (Fort.):** Wir zeigen nun:

- $G \subseteq \bigcup_{a \in G} H \circ a$ .

Folgt aus  $e \in H$ .

- Wenn  $H \circ a \cap H \circ b \neq \emptyset$ , dann  $H \circ a = H \circ b$ :

Aus  $H \circ a \cap H \circ b \neq \emptyset$  folgt, dass es  $h_1, h_2 \in H$  gibt mit  $h_1 \circ a = h_2 \circ b$ . Dann:

$$H \circ b = H \circ h_2^{-1} \circ h_1 \circ a = H \circ a. \quad \square$$



- Nebenklassen:

**Satz (Lagrange):** Sei  $G$  eine endliche Gruppe und  $H$  eine Untergruppe von  $G$ . Es gilt:

(1) Alle Nebenklassen von  $H$  in  $G$  haben gleich viele Elemente.

(2)  $|G| = \text{ind}_G(H) \cdot |H|$ .

(3)  $|H|$  teilt  $|G|$ .

**Korollar:** Sei  $G$  eine endliche Gruppe und sei  $a$  ein Element von  $G$ . Es gilt:  $\text{ord}(a)$  teilt  $|G|$ .



- Nebenklassen:

**Beweis:**

- (1) Aus der Injektivität von  $\circ$  folgt  $|H \circ a| = |H|$  für alle  $a \in G$ .
- (2) Folgt aus (1) sowie dem letzten Satz.
- (3) Folgt aus (2).  $\square$



- Multiplikative Gruppen modulo  $n$ :
  - $\langle \mathbb{Z}_4 \setminus \{0\}, *_{4} \rangle$  und  $\langle \mathbb{Z}_9 \setminus \{0\}, *_{9} \rangle$  sind keine Gruppen (2 bzw. 3 haben kein inverses Element).
  - Sei  $\mathbb{Z}_n^*$  die Menge der Zahlen  $i \in \{1, \dots, n - 1\}$ , die teilerfremd zu  $n$  sind:  $\mathbb{Z}_4^* = \{1, 3\}$ ,  $\mathbb{Z}_5^* = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $\mathbb{Z}_9^* = \{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$ .
  - Wir zeigen, dass  $\langle \mathbb{Z}_n^*, *_{n} \rangle$  immer eine Gruppe ist. Man nennt sie die **multiplikative Gruppe modulo  $n$** .
  - Wir brauchen einen Exkurs über größte gemeinsame Teiler.



- Größter gemeinsamer Teiler:

**Definition:** Seien  $x, y \in \mathbb{N}$ . Der **größte gemeinsame Teiler**  $\text{ggT}(x, y)$  von  $x$  und  $y$  ist die größte natürliche Zahl, die sowohl  $x$  als auch  $y$  teilt.

Mit  $y|x$  („ $y$  teilt  $x$ “) bezeichnen wir, dass  $(x \bmod y) = 0$  ist.

**Fakt:**  $x$  und  $y$  sind teilerfremd gdw.  $\text{ggT}(x, y) = 1$ .



- Größter gemeinsamer Teiler:

**Satz:** Seien  $x, y \in \mathbb{N}$  mit  $x \leq y$ .

(1) Wenn  $(y \bmod x) = 0$ , dann

$$\text{ggT}(x, y) = x.$$

(2) Wenn  $(y \bmod x) > 0$ , dann

$$\text{ggT}(x, y) = \text{ggT}(y \bmod x, x).$$



- Größter gemeinsamer Teiler:

**Beweis:** (1) Klar.

(2) Es gilt  $y = (y \bmod x) + \lfloor y/x \rfloor \cdot x$ .

Daraus folgt für alle  $z \in \mathbb{N}$ :

$(z|x \text{ und } z|y)$  gdw.  $(z|x \text{ und } z|(y \bmod x))$ .

(Zur Erinnerung:  $z|x$  bedeutet „ $z$  teilt  $x$ “.)

Damit haben  $(x, y)$  und  $(x, y \bmod x)$  dieselben gemeinsamen Teiler, und so insbesondere

$$\text{ggT}(x, y) = \text{ggT}(y \bmod x, x). \quad \square$$





- Größter gemeinsamer Teiler:  
Der Satz führt zum **Euklidischen Algorithmus** zur Berechnung vom ggT zweier Zahlen:

```
Procedure ggT ( $x, y \in \mathbb{N}$  mit  $x \leq y$ )  
  if  $(y \bmod x) = 0$  then return  $x$ ;  
  else return ggT( $y \bmod x, x$ );
```

(Euklid von Alexandria, ca. 325–265 v. Chr.)



- **Größter gemeinsamer Teiler:**

**Satz:** Seien  $x, y \in \mathbb{N}$ . Es gibt  $a, b \in \mathbb{Z}$  mit

$$\text{ggT}(x, y) = ax + by.$$

**Beweis:** Durch Induktion über  $\max\{x, y\}$ .

**Basis:**  $\max\{x, y\} = 1$ .

Dann  $x = 1 = y$  und  $\text{ggT}(x, y) = 1 = 1 \cdot x + 0 \cdot y$ .

**Schritt:**  $\max\{x, y\} > 1$ .

O.B.d.A. sei  $x \leq y$ . Wir betrachten zwei Fälle.

**Fall 1:**  $(y \bmod x) = 0$ . Dann

$$\text{ggT}(x, y) = x = 1 \cdot x + 0 \cdot y.$$



- Größter gemeinsamer Teiler:

**Fall 2:**  $(y \bmod x) > 0$ . In diesem Fall gelten  $x < y$  und  $\text{ggT}(x, y) = \text{ggT}(y \bmod x, x)$ . Wir haben

$$\max\{x, y \bmod x\} = x < y \leq \max\{x, y\}.$$

Nach Induktionsannahme gibt es  $a', b' \in \mathbb{Z}$  mit

$$\text{ggT}(x, y) = \text{ggT}(y \bmod x, x) = a'(y \bmod x) + b'x.$$

Mit  $y \bmod x = y - \lfloor y/x \rfloor \cdot x$  erhalten wir

$$\begin{aligned} \text{ggT}(x, y) &= a'(y - \lfloor y/x \rfloor \cdot x) + b'x \\ &= (b' - \lfloor y/x \rfloor a')x + a'y. \quad \square \end{aligned}$$



- **Größter gemeinsamer Teiler:**

Der Beweis des Satzes führt zu einem Algorithmus für die Berechnung der Zahlen  $a$  und  $b$ , dem **erweiterten Euklidischen Algorithmus**:

```
Procedure erwggT( $x, y \in \mathbb{N}$  mit  $x \leq y$ )  
  if  $(y \bmod x) = 0$  then return  $(1, 0)$ ;  
  else  $(a', b') := \text{erwggT}(y \bmod x, x)$ ;  
     $(a, b) := (b' - \lfloor y/x \rfloor a', a')$ ;  
  return  $(a, b)$ ;
```



- Größter gemeinsamer Teiler:

Beispiel mit  $x = 45, y = 63$ :

$$\begin{aligned} \text{ggT}(45,63) & \quad 9 = (1 - [63/45] \cdot (-2)) \cdot 45 + (-2) \cdot 63 \\ & \quad = 3 \cdot 45 + (-2) \cdot 63 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ggT}(18,45) & \quad 9 = (0 - [45/18] \cdot 1) \cdot 18 + 1 \cdot 45 \\ & \quad = -2 \cdot 18 + 1 \cdot 45 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ggT}(9,18) & \quad 9 = 1 \cdot 9 + 0 \cdot 18 \\ & \quad = \\ & \quad 9 \end{aligned}$$



- Multiplikative Gruppen modulo  $n$ :

**Satz:**  $\langle \mathbb{Z}_n^*, *_n \rangle$  ist eine Gruppe für alle  $n \geq 1$ .

**Beweis:** Wir zeigen, dass jedes  $x \in \mathbb{Z}_n^*$  ein inverses Element hat.

Sei  $x \in \mathbb{Z}_n^*$  beliebig. Es gilt  $\text{ggT}(x, n) = 1$ .

Der erweiterte Euklidische Algorithmus berechnet  $a, b \in \mathbb{Z}$  mit  $ax + bn = 1$ .

Es gilt also  $a *_n x +_n b *_n n = 1$ .

Aus  $(b *_n n) = 0$  folgt  $(a *_n x) = 1$ .

Wähle  $x^{-1} := a \bmod n$ .  $\square$



- Multiplikative Gruppen modulo  $n$ :
  - **Korollar:** Sei  $\varphi(n) = |\mathbb{Z}_n^*|$ . Ist  $n$  Primzahl, dann gilt  $\varphi(n) = n - 1$ .



- Zyklische Gruppen:

**Definition:** Eine Gruppe  $\langle S, \circ \rangle$  heißt zyklisch, wenn es ein  $a \in S$  gibt, sodass  $S = \{a^i \mid i \in \mathbb{Z}\}$ .

Ein Element  $a$  mit  $S = \{a^i \mid i \in \mathbb{Z}\}$  nennt man **erzeugendes Element** der Gruppe.

**Beispiele:**  $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$  und  $\langle \mathbb{Z}_n, +_n \rangle$  sind zyklisch.

**Aufgabe:** Erzeugendes Element?





- Zyklische Gruppen:

**Definition:** Ein **Isomorphismus** zwischen zwei Gruppen  $\langle S_1, \circ_1 \rangle$  und  $\langle S_2, \circ_2 \rangle$  ist eine Bijektion  $f: S_1 \rightarrow S_2$  mit  $f(a \circ_1 b) = f(a) \circ_2 f(b)$  für alle  $a, b \in S_1$ .

Zwei Gruppen sind **isomorph**, wenn es einen Isomorphismus zwischen ihnen gibt.

**Beispiel:** Die Bijektion  $\{0, \dots, 3\} \rightarrow \{1, \dots, 4\}$  mit  $0 \mapsto 1$ ,  $1 \mapsto 2$ ,  $2 \mapsto 4$ ,  $3 \mapsto 3$  ist ein Isomorphismus zwischen  $\langle \mathbb{Z}_4, +_4 \rangle$  und  $\langle \mathbb{Z}_5 \setminus \{0\}, *_5 \rangle$ .



- **Zyklische Gruppen:**

**Satz:** Sei  $G = \langle S, \circ \rangle$  eine zyklische Gruppe.

(1) Ist  $S$  unendlich, dann ist  $G$  isomorph zu  $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$ .

(2) Ist  $S$  endlich, dann ist  $G$  isomorph zu  $\langle \mathbb{Z}_{|S|}, +_{|S|} \rangle$ .

**Beweis:** (1) Sei  $G$  zyklisch und unendlich.

Es existiert  $a \in S$  mit  $S = \{a^i \mid i \in \mathbb{Z}\}$ .

Wir zeigen: Die Abbildung  $f: \mathbb{Z} \rightarrow S$  definiert durch  $f(i) = a^i$  ist ein Isomorphismus zwischen  $G$  und  $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$ :



## • Zyklische Gruppen:

### Beweis (Fort.):

- **$f$  ist surjektiv**: Folgt aus der Definition einer zyklischen Gruppe.
- **$f$  ist injektiv**: Wäre  $f$  nicht injektiv, dann gäbe es  $i, j$  mit  $i > j$  und  $a^i = a^j$ . Dann wäre  $a^{i-j} = e$  und somit  $S \subseteq \{a^0, \dots, a^{i-j-1}\}$ , im Widerspruch zur Annahme, dass  $S$  unendlich ist.
- **$\forall i, j \in \mathbb{Z} : f(i + j) = f(i) \circ f(j)$** :  
Es gilt:  $f(i + j) = a^{i+j} = a^i \circ a^j = f(i) \circ f(j)$ .



- Zyklische Gruppen:

Beweis (Fort.):

(2) Sei  $G$  zyklisch und endlich mit  $|G| = m$ .

Analog zu (1):

Es existiert  $a \in S$  mit  $S = \{a^0, a^1, \dots, a^{m-1}\}$ .

Beweisskizze: Die Abbildung

$f: \{0, 1, \dots, m-1\} \rightarrow S$  definiert durch  $f(i) = a^i$  ist ein Isomorphismus zwischen  $G$  und  $\langle \mathbb{Z}_m, +_m \rangle$ . Details analog zu (1).



- Symmetrische Gruppen:

**Definition:** Eine **Permutation** ist eine bijektive Abbildung einer endlichen Menge auf sich selbst.

Sei  $U_n$  die Menge aller Permutationen  $\{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ .

Die **symmetrische Gruppe** für  $n$  Elemente ist die Gruppe  $S_n = \langle U_n, \circ \rangle$ , wobei „ $\circ$ “ die Komposition von Abbildungen bezeichnet.



- Für  $n = 3$  enthält  $S_3$  sechs verschieden Permutationen:

$\circ$	(1)(2)(3)	(1)(23)	(12)(3)	(13)(2)	(123)	(132)
(1)(2)(3)	(1)(2)(3)	(1)(23)	(12)(3)	(13)(2)	(123)	(132)
(1)(23)	(1)(23)	(1)(2)(3)	(132)	(123)	(13)(2)	(12)(3)
(12)(3)						
(13)(2)			...			
(123)						
(132)						



## Praktische Anwendungen in der Informatik:

- Lineare Modelle
- Lineare Gleichungssysteme
- Zahlreiche Varianten des Euklidischen Algorithmus
- Rechnen mit Booleschen Werten und Operationen
- Basis von Verschlüsselungsverfahren

