WS 2016/17

Diskrete Strukturen

Kapitel 2: Grundlagen (Beweise)

Hans-Joachim Bungartz

Lehrstuhl für wissenschaftliches Rechnen
Fakultät für Informatik
Technische Universität München

http://www5.in.tum.de/wiki/index.php/Diskrete_Strukturen_-_Winter_16

Kapitel 2: Grundlagen (Beweise)

- Mathematische und notationelle Grundlagen
  - Mengen
  - Relationen und Abbildungen
  - Aussagen- und Prädikatenlogik
  - **Beweismethoden**
  - Wachstum von Funktionen

Kapitel 2: Grundlagen (Beweise)

- Die Bedeutung von Beweisen und Beweistechniken:
  - Informell verstehen wir unter einem Beweis eine korrekte und vollständige (lückenlose) Argumentation, aus der sich unbestreitbar die Wahrheit einer Aussage folgern lässt.
  - Korrektheit schützt uns davor, Fehler zu machen.
  - Vollständigkeit ermöglicht es jedem, das Resultat zu verifizieren.
  - Erst durch den Beweis einer Aussage können wir in allen Situationen auf ihre Korrektheit vertrauen und sie anwenden.

Kapitel 2: Grundlagen (Beweise)

- Terminologie (aus der Mathematik):
  - Axiome, Postulate, Hypothesen, Prämissen:
    - Aussagen, von denen man annimmt, dass sie wahr sind.
  - Theorem/Satz:
    - Eine Aussage, die aus den Axiomen folgt.
  - Beweis (eines Satzes):
    - Die Argumentation, die zeigt, dass der Satz tatsächlich aus den Axiomen folgt.
  - Lemma:
    - Ein Hilfssatz (Theorem) im Beweis eines wichtigen Theorems.
  - Korollar:
    - Ein weniger bedeutendes Theorem, das leicht als Konsequenz eines wichtigen Theorems bewiesen werden kann.

Kapitel 2: Grundlagen (Beweise)

- Formale Beweise:
  - Problem: Wann ist eine Argumentation korrekt und lückenlos?
  - Lösung: Formale Definition von Beweis:
    - Die Axiome werden als eine Sequenz A von Formeln der Prädikatenlogik formalisiert, bezüglich einer geeigneten Basisstruktur.
    - Die Aussage des Satzes (oft von der Gestalt $\forall x\,(F \rightarrow G)$).
    - Eine Menge von gültigen Inferenzregeln (bezüglich der Basisstruktur) wird festgelegt.
    - Ein formaler Beweis ist eine Herleitung von $A \vdash \forall x\,(F \rightarrow G)$.

Kapitel 2: Grundlagen (Beweise)

- In der Praxis:
  - Formale Beweise zu konstruieren ist extrem aufwändig.
  - Mit Hilfe von Theorembeweisern ist diese Aufgabe inzwischen für viele Sätze möglich.
  - Neue Sätze werden jedoch erst „informell“ in einer Mischung aus natürlicher Sprache und Prädikatenlogik bewiesen.
  - Der Beweis wird akzeptiert, wenn andere Mathematiker der Meinung sind, der Beweis ließe sich formalisieren, wenn genug Zeit investiert würde.
  - Wenn ein Teil des Beweises bezweifelt wird, muss der Autor diesen Teil näher an einen formalen Beweis bringen.

Kapitel 2: Grundlagen (Beweise)

- Zu jedem Zeitpunkt in einem Beweis hat man eine Menge von Beweisaufgaben. Jede Beweisaufgabe besteht aus einer Menge von Annahmen und einem Ziel (die Aussage, die man mit Hilfe der Annahmen beweisen will).
- Ein Ziel hat eine logische Gestalt. Beispiele:
  - Sei $n \in \mathbb{N}_0$ ungerade. Dann ist auch n^2 ungerade:

    $$\forall n \in \mathbb{N}_0 \, (U(n) \rightarrow U\big(q(n)\big)).$$

  - Sei $n \in \mathbb{N}_0$ ungerade. Dann lässt sich n als Differenz zweier Quadratzahlen aus $\mathbb{N}_0$ darstellen:

    $$\forall n \in \mathbb{N}_0$$
    $$(U(n) \rightarrow \exists \, n_1, n_2 \in \mathbb{N}_0 \, (Q(n_1) \wedge Q(n_2) \wedge n = \mathrm{diff}(n_1, n_2))).$$

Kapitel 2: Grundlagen (Beweise)

- Diese Gestalt suggeriert, wie man vorgehen soll:
  - Ziel der Gestalt $\forall x \in A : F$.

    Sei a ein beliebiges Element von A. Setze $F[x\backslash a]$ als Ziel.
  - Ziel der Gestalt $\exists x \in A: F$

    Wähle ein geeignetes Element n von A. Setze $F[x\backslash n]$ als Ziel.
  - Ziel der Gestalt $F \rightarrow G$

    Füge F zu den Annahmen, und setze G als neues Ziel.
  - Ziel der Gestalt $F \leftrightarrow G$ (F gdw. G)

    Setze $F \rightarrow G$ und $G \rightarrow F$ als neue Ziele.
  - Bei manchen Gestalten hat man jedoch mehrere Möglichkeiten

Kapitel 2: Grundlagen (Beweise)

- Beweistypen für Ziele der Gestalt $F \rightarrow G$:
  - Direkter Beweis
  - Indirekter Beweis
  - Widerspruchsbeweis

Kapitel 2: Grundlagen (Beweise)

- Beweistypen für Ziele der Gestalt $F \to G$.
  - Direkter Beweis:
    - „Um $F \to G$ zu beweisen, nimm F an, und zeige G“.
    - Entspricht der Regel

$$\frac{A, F \vdash G}{A \vdash F \to G}.$$

  - Indirekter Beweis
  - Widerspruchsbeweis

- Beispiel direkter Beweis:

  Theorem:

  Für alle $n \in \mathbb{N}_0$: wenn n ungerade ist, dann ist auch n^2 ungerade.

- Beispiel direkter Beweis:

Theorem:

Für alle $n \in \mathbb{N}_0$: wenn n ungerade ist, dann ist auch n^2 ungerade.

Beweis:

Sei n ein beliebiges ungerades Element von $\mathbb{N}_0$.

Wir zeigen, dass n^2 ungerade ist. Dazu konstruieren wir ein l mit $n^2 = 2l + 1$.

Aus der Definition von ungerade folgt: es gibt $m \in \mathbb{N}_0$ mit $n = 2m + 1$.

Aus der Definition von Quadrat folgt: $n^2 = (2m + 1)(2m + 1)$.

Aus den Eigenschaften der Multiplikation und der Summe folgt:

$$n^2 = 4m^2 + 4m + 1 = 2(2m^2 + 2m) + 1,$$

d.h. $n^2 = 2l + 1$ für $l = (2m^2 + 2m)$.

Kapitel 2: Grundlagen (Beweise)

- Beispiel direkter Beweis:

  Theorem:

  Sei $n \in \mathbb{N}_0$ ungerade. Dann lässt sich n als Differenz zweier Quadratzahlen aus $\mathbb{N}_0$ darstellen.

  Beweis:

  Sei n eine beliebige ungerade Zahl aus $\mathbb{N}_0$ (d.h. $n > 0$).

  Wir zeigen: Es gibt zwei Zahlen n_1, n_2 mit $n = n_1^2 - n_2^2$.

  Mit n ungerade gilt: $(n+1)$ ist gerade.

  Mit n ungerade und $n > 0$ gilt: $(n-1) \in \mathbb{N}_0$ und $(n-1)$ ist gerade.

  Mit $(n+1)$ und $(n-1)$ gerade gilt: $\frac{(n-1)}{2}, \frac{(n+1)}{2} \in \mathbb{N}_0$.

  Setze $n_1 := \frac{(n+1)}{2}$, $n_2 := \frac{n-1}{2}$.

- Beispiel direkter Beweis:

  Beweis (Fortsetzung):

  Aus der Definition des Quadrats, aus den Eigenschaften des Produkts und der Summe folgt:

$$n_1^2 - n_2^2 = \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{n-1}{2}\right)^2 = \frac{4n}{4} = n. \quad \square$$

Kapitel 2: Grundlagen (Beweise)

- Beweistypen für Ziele der Gestalt $F \to G$:
  - Direkter Beweis
  - Indirekter Beweis:
    - „Um $F \to G$ zu beweisen, nimm $\neg G$ an, und zeige $\neg F$.“
    - Entspricht der Regel

$$\frac{A, \neg G \vdash \neg F}{A \vdash F \to G}.$$

    - Korrekt, weil: $(F \to G) \equiv (\neg G \to \neg F)$.
  - Widerspruchbeweis

- Beispiel indirekter Beweis:

  Theorem:

  Sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Funktion mit $f(x) = x^2 - 5x + 6$.
  Für alle $k < 0$ gilt $f(k) \neq 0$.

  Beweis:

  Sei k eine beliebige reelle Zahl.

  Wir zeigen: Wenn $f(k) = 0$, dann $k \geq 0$.

  Nehmen wir $f(k) = 0$ an.

  Aus der Definition von f folgt $k^2 - 5k + 6 = 0$.

  Mit $k^2 - 5k + 6 = (k - 3)(k - 2)$ gilt $k = 3$ oder $k = 2$.

  In beiden Fällen gilt $k \geq 0$. □

Kapitel 2: Grundlagen (Beweise)

- Beweistypen für Ziele der Gestalt $F \rightarrow G$:
  - Direkter Beweis
  - Indirekter Beweis
  - Widerspruchsbeweis (reductio ad absurdum):
    - „Um F zu beweisen, zeige, dass aus $\neg F$ ein Widerspruch folgt.“
    - Entspricht dem Beweisschema

$$\frac{\dfrac{A, \neg F \vdash G \quad A, \neg F \vdash \neg G}{A, \neg F \vdash \text{false}}}{A \vdash F}.$$

    - … oder die Äquivalenz $F \equiv \neg F \rightarrow (G \wedge \neg G)$.

- Beispiel Widerspruchsbeweis:

  Theorem:

  Gegeben sei ein Dreieck mit den Seitenlängen a, b, c mit $a, b \leq c$. Wenn $a^2 + b^2 = c^2$ gilt, so ist der Winkel zwischen a und b ein rechter Winkel.

  Beweis:

  Annahme: Das Dreieck mit den Seiten a, b, c ($a, b \leq c, a^2 + b^2 = c^2$) hat keinen rechten Winkel zwischen a und b.

  Wir konstruieren ein zweites Dreieck mit Seitenlängen a, b und e, so dass zwischen den Seiten a und b ein rechter Winkel entsteht.

- Beispiel Widerspruchsbeweis:

  Beweis (Forts.):

  Da das ursprüngliche Dreieck keinen rechten Winkel enthält, gilt: $c \neq e$ (kann weiter argumentiert werden).

  Mit dem Satz des Pythagoras gilt für das zweite Dreieck: $a^2 + b^2 = e^2$.

  Da auch $a^2 + b^2 = c^2$, folgt $c^2 = a^2 + b^2 = e^2$, also $c^2 = e^2$. Und daher ist $c = e$, was im Widerspruch zur obigen Aussage ist, dass $c \neq e$ ist. □

- Beispiel Widerspruchsbeweis:

  Theorem:

  $\sqrt{2}$ ist irrational.

  Beweis:

  Annahme: $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$.

  Dann gibt es teilerfremde Zahlen $n, m \in \mathbb{N}$ mit $\sqrt{2} = n/m$.

  Es folgt $n^2 = 2m^2$. Damit sind n^2 und n gerade.

  Da n gerade ist, gibt es eine Zahl k mit $2k = n$.

  Es folgt $n^2 = 4k^2 = 2m^2$ und so $2k^2 = m^2$.

  Damit sind m^2 und m gerade.

  Also sind n und m nicht teilerfremd. Widerspruch.

- Vollständige Induktion:
  - Eine Beweistechnik, um zu zeigen, dass alle natürlichen Zahlen eine Eigenschaft P haben ($\forall n \in \mathbb{N}: P(n)$).
  - Um zu zeigen, dass $P(n)$ für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ gilt, geht man wie folgt vor:
    - Man zeigt, dass $P(1)$ gilt (Basis, Verankerung).
    - Man zeigt, dass für jede natürliche Zahl n gilt:
      - Wenn $P(n)$ gilt, dann gilt auch $P(n+1)$.

      $P(n)$ wird als Induktionsannahme bezeichnet.

Kapitel 2: Grundlagen (Beweise)

- Beispiel Vollständige Induktion

  Theorem:

$$\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}.$$

  Beweis:

  Induktionsbasis: Fall $n = 0$.

$$\sum_{i=0}^{0} i = 0 = \frac{0(0+1)}{2}.$$

  Induktionsschritt: Sei $n \geq 0$ beliebig und es gelte $\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$.

  Wir zeigen:

$$\sum_{i=0}^{n+1} i = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

- Beispiel Vollständige Induktion:

  Beweis (Fortsetzung):

  Es gilt:

$$\sum_{i=0}^{n+1} i = \sum_{i=0}^{n} i + (n+1).$$

  Aus der Induktionsvoraussetzung folgt

$$\sum_{i=0}^{n+1} i = \sum_{i=0}^{n} i + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)$$

$$= (n+1)\left(\frac{n}{2}+1\right) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

- Mengenoperationen – Die Potenzmenge:

  Theorem: Sei $n \in \mathbb{N}_0$ und sei M eine Menge der Kardinalität n. Dann enthält die Potenzmenge $P(M)$ genau 2^n Elemente.

  Beweis:

  Durch Induktion über n.

  Basis: Sei $n = 0$. Wir müssen zeigen, dass $P(M)$ genau ein Element enthält. Da $M = \emptyset$, gilt $P(M) = \{\emptyset\}$. Fertig.

  Schritt: Sei $n \in \mathbb{N}_0$ beliebig und sei $M = \{a_1, \ldots, a_{n+1}\}$ eine beliebige Menge der Kardinalität $n + 1$.

  Sei $M' = \{a_1, \ldots, a_n\}$. Aus der Induktionsannahme folgt $|P(M')| = 2^n$.

- Mengenoperationen - Die Potenzmenge

Beweis (Fortsetzung):

Seien $MIT = \{L \subseteq M \mid a_{n+1} \in L\}$,

$OHNE = \{L \subseteq M \mid a_{n+1} \notin L\}$.

Aus der Definition von Potenzmenge folgt

$$MIT \cup OHNE = P(M).$$

Da MIT und $OHNE$ disjunkt sind, gilt $|P(M)| = |MIT| + |OHNE|$.

Wir zeigen $|MIT| = 2^n$ und $|OHNE| = 2^n$.

$|OHNE| = 2^n$: Es gilt $OHNE = P(M')$ und daher $|OHNE| = 2^n$.

$|MIT| = 2^n$: Es gilt: $L \in OHNE$ gdw. $L \cup \{a_{n+1}\} \in MIT$. Es folgt $|MIT| = |OHNE| = 2^n$.

- Transitive Hülle:
  - Erinnerung: Sei $R \subseteq A \times A$ eine Relation. Die transitive Hülle R^+ von R ist die kleinste transitive Relation, die R enthält.
  - Wir haben behauptet, dass $R^+ = \bigcup_{n \geq 1} R^n$ gilt, wobei
    - $R^1 = R$,
    - $R^{n+1} = R^n \circ R$ für alle $n \geq 1$.

- Transitive Hülle:

  Theorem: $R^+ = \bigcup_{n\geq 1} R^n$.

  Beweis: Wir zeigen $R^+ \subseteq \bigcup_{n\geq 1} R^n$ und $\bigcup_{n\geq 1} R^n \subseteq R^+$.

  Beweis von $R^+ \subseteq \bigcup_{n\geq 1} R^n$:

  Wir zeigen zuerst: $\bigcup_{n\geq 1} R^n$ ist transitiv.
  Es seien also x, y, z beliebige Elemente von A mit $(x, y), (y, z) \in \bigcup_{n\geq 1} R^n$.

  Dann gibt es $i, j \geq 1$ mit $(x, y) \in R^i$ und $(y, z) \in R^j$.
  Mit $R^{i+j} = R^i \circ R^j$ gilt $(x, z) \in R^{i+j}$ und daher auch $(x, z) \in \bigcup_{n\geq 1} R^n$.

  Aus $R = R^1$ folgt $R \subseteq \bigcup_{n\geq 1} R^n$. Wir haben also: $\bigcup_{n\geq 1} R^n$ ist transitiv und enthält R. Da R^+ die kleinste Relation ist, die transitiv ist und R enthält, gilt $R^+ \subseteq \bigcup_{n\geq 1} R^n$.

- Transitive Hülle:

  Beweis (Fortsetzung):

  Beweis der zweiten Inklusion $\bigcup_{n\geq 1} R^n \subseteq R^+$:

  Wir zeigen durch Induktion über n, dass $R^n \subseteq R^+$ für alle $n \geq 1$ gilt.

  Basis: Sei $n = 1$. $R^1 \subseteq R^+$ folgt aus $R^1 = R$ und $R \subseteq R^+$.

  Schritt: Sei $n \geq 1$ beliebig. Wir nehmen an, dass $R^n \subseteq R^+$ gilt und zeigen $R^{n+1} \subseteq R^+$.
  Sei $(x, y) \in R^{n+1}$ beliebig. Wir zeigen $(x, y) \in R^+$.
  Mit $R^{n+1} = R^n \circ R$ gilt: Es gibt $z \in A$ mit $(x, z) \in R^n$ und $(z, y) \in R$.
  Mit $R^n \subseteq R^+$ und $R \subseteq R^+$ gilt: Es gibt $z \in A$ mit $(x, z) \in R^+$ und $(z, y) \in R^+$.
  Da R^+ transitiv ist, gilt $(x, y) \in R^+$.

- DPLL (Davis-Putnam-Logemann-Loveland):

  Algorithmus 1:

  Wenn $F = \mathbf{true}$ dann antworte „erfüllbar“;

  Wenn $F = \mathbf{false}$ dann antworte „unerfüllbar“;

  Wenn $\mathbf{true} \neq F \neq \mathbf{false}$ dann

  wähle eine Variable p, die in F vorkommt;

  prüfe rekursiv, ob $F[p \backslash \mathbf{true}]$ oder $F[p \backslash \mathbf{false}]$ erfüllbar sind;

  wenn mindestens eine von den beiden erfüllbar ist, antworte „erfüllbar“, sonst „unerfüllbar“;

Kapitel 2: Grundlagen (Beweise)

- DPLL (Davis-Putnam-Logemann-Loveland):

  Lemma: F ist erfüllbar gdw. $F[p\backslash\mathbf{true}]$ oder $F[p\backslash\mathbf{false}]$ erfüllbar sind.

  Beweis:

  Sei β Belegung mit $[F](\beta) = 1$.

  Wenn $\beta(p) = 1$ dann gilt $[F](\beta) = \left[F[p\backslash\mathbf{true}]\right](\beta) = 1$.

  Wenn $\beta(p) = 0$ dann gilt $[F](\beta) = \left[F[p\backslash\mathbf{false}]\right](\beta) = 1$.

  Sei β Belegung mit $[F[\mathrm{p}\backslash\mathbf{true}]](\beta) = 1$. Sei β' die Belegung mit $\beta'(p) = 1$, und $\beta'(q) = \beta(q)$ für $q \neq p$. Dann gilt $F[\beta'] = 1$.

  Sei β Belegung mit $[F[\mathrm{p}\backslash\mathbf{false}]](\beta) = 1$. Sei β' die Belegung mit $\beta'(p) = 0$, und $\beta'(q) = \beta(q)$ für $q \neq p$. Dann gilt $F[\beta'] = 1$.

Theorem: Das DPLL-Verfahren ist korrekt.

Beweis:

1. Das Verfahren terminiert für jede Eingabeformel F:

Durch Induktion über die Anzahl n der Variablen von F.

Basis: $n = 0$. Dann gilt $F = \mathbf{false}$ oder $F = \mathbf{true}$ und das Verfahren terminiert sofort.

Schritt: Sei $n \geq 0$ beliebig. Wir nehmen an, dass das Verfahren für alle Formeln mit n Variablen terminiert.

Sei F eine Formel mit $n + 1$ Variablen.

Die Formeln $F[p \backslash \mathbf{true}]$ und $F[p \backslash \mathbf{false}]$ haben n Variablen.

Aus der Induktionsannahme folgt: Das Verfahren terminiert für $F[p \backslash \mathbf{true}]$ und $F[p \backslash \mathbf{false}]$.

Daher terminiert das Verfahren auch für F.

Beweis (Fortsetzung):

2. Wenn F erfüllbar ist, dann antwortet das Verfahren „erfüllbar“.

Durch Induktion über die Anzahl n der Variablen von F.

Basis: $n = 0$. Dann gilt $F = \mathbf{true}$ und das Verfahren antwortet „erfüllbar“.

Schritt: Sei $n \geq 0$ beliebig. Wir nehmen an, dass für alle erfüllbaren Formeln mit höchstens n Variablen das Verfahren „erfüllbar“ antwortet.

Sei F eine erfüllbare Formel mit $n + 1$ Variablen.

Aus dem Lemma folgt: $F[p\backslash\mathbf{true}]$ oder $F[p\backslash\mathbf{false}]$ sind erfüllbar.

$F[p\backslash\mathbf{true}]$ und $F[p\backslash\mathbf{false}]$ haben höchstens n Variablen.

Aus der Induktionsannahme folgt: Das Verfahren antwortet „erfüllbar“ für $F[p\backslash\mathbf{true}]$ oder $F[p\backslash\mathbf{false}]$.

Damit antwortet das Verfahren „erfüllbar“.

3. Wenn F unerfüllbar ist, dann antwortet das Verfahren „unerfüllbar“.

Analog zu 2.

Kapitel 2: Grundlagen (Beweise)

- Das Resolutionsverfahren:

while F die leere Klausel nicht enthält

{ if F zwei Klauseln K_1, K_2 enthält
mit einem Resolventen R, der $R \notin F$
erfüllt (d.h., R ist nicht Klausel von F)

then füge R als neue Klausel zu F hinzu

else antworte „erfüllbar“ und halte

}

antworte „unerfüllbar“ und halte.

Kapitel 2: Grundlagen (Beweise)

- Das Resolutionsverfahren:

  Theorem: Wenn die Eingabeformel F unerfüllbar ist, dann antwortet das Verfahren „unerfüllbar“.

  Beweis: Durch Induktion über die Anzahl n der Variablen von F.

  Basis: $n = 0$. Dann $F = \square$ und das Verfahren antwortet sofort „unerfüllbar“.

  Schritt: Sei $n \geq 0$ beliebig. Induktionsannahme: Für alle unerfüllbaren Formeln mit höchstens n Variablen antwortet das Verfahren „unerfüllbar“.

  Sei F eine unerfüllbare Formel mit $n + 1$ Variablen.

  Aus dem Lemma folgt: Die Formeln $F[p \backslash \mathbf{true}]$ und $F[p \backslash \mathbf{false}]$ haben n Variablen und sind unerfüllbar.

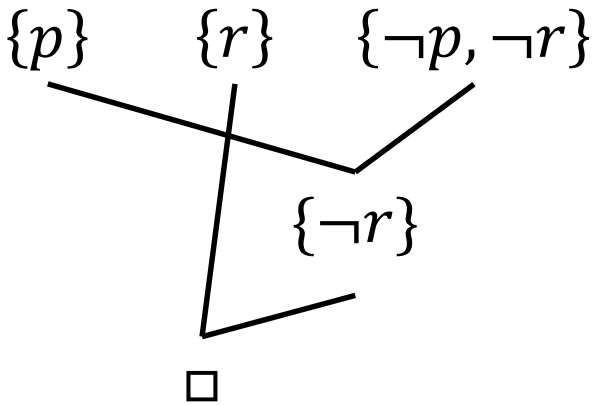
  Aus der Induktionsvoraussetzung folgt, dass die leere Klausel sowohl aus $F[p \backslash \mathbf{true}]$ wie aus $F[p \backslash \mathbf{false}]$ hergeleitet werden kann.

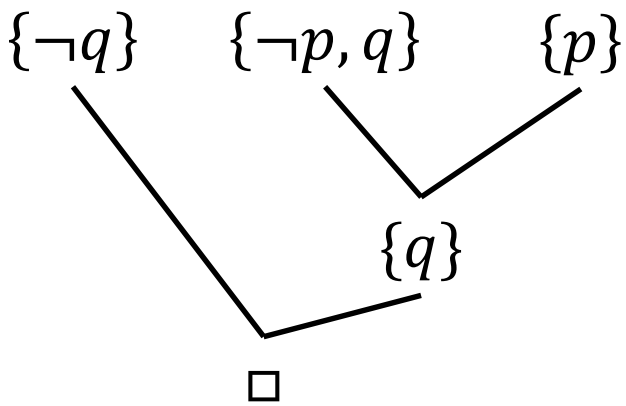
  Wir zeigen: Die leere Klausel kann auch aus F abgeleitet werden.

$$F = \{ \{\neg q, s\} , \{\neg p, q, s\} , \{p\} , \{r, \neg s\} , \{\neg p, \neg r, \neg s\} \}$$

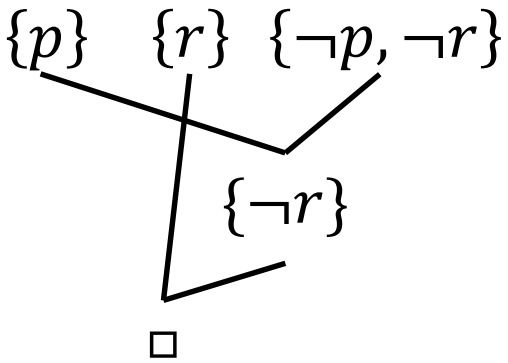
$$F[s\backslash \mathbf{true}] = \{ \{p\} , \{r\} , \{\neg p, \neg r\} \}$$

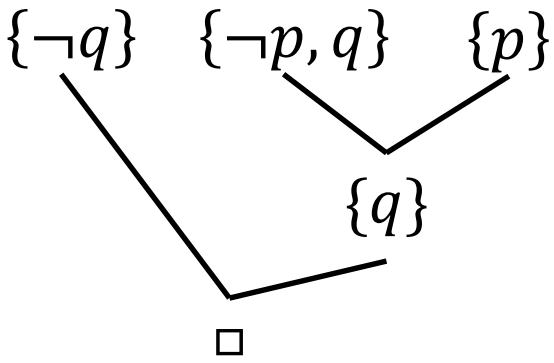
$$F[s\backslash \mathbf{false}] = \{ \{\neg q\} , \{\neg p, q\} , \{p\} \}$$

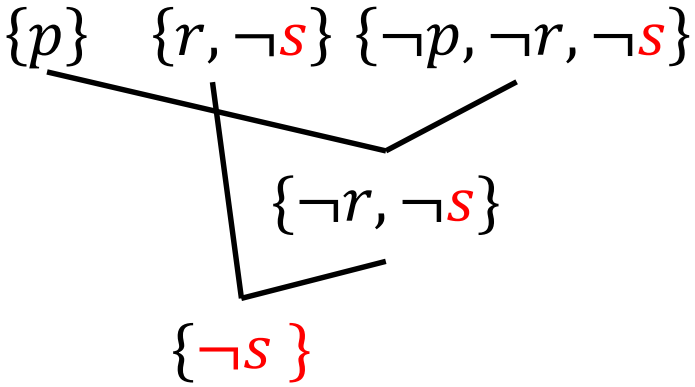


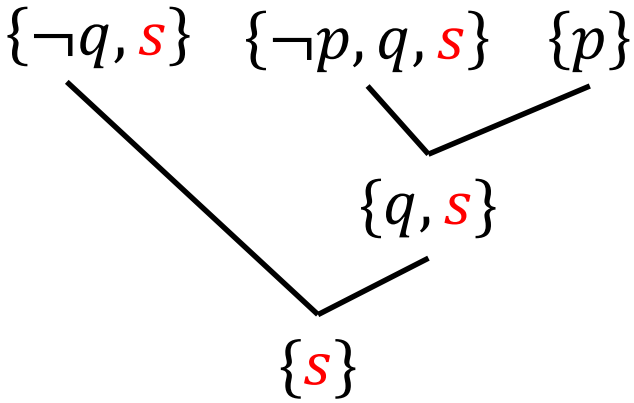


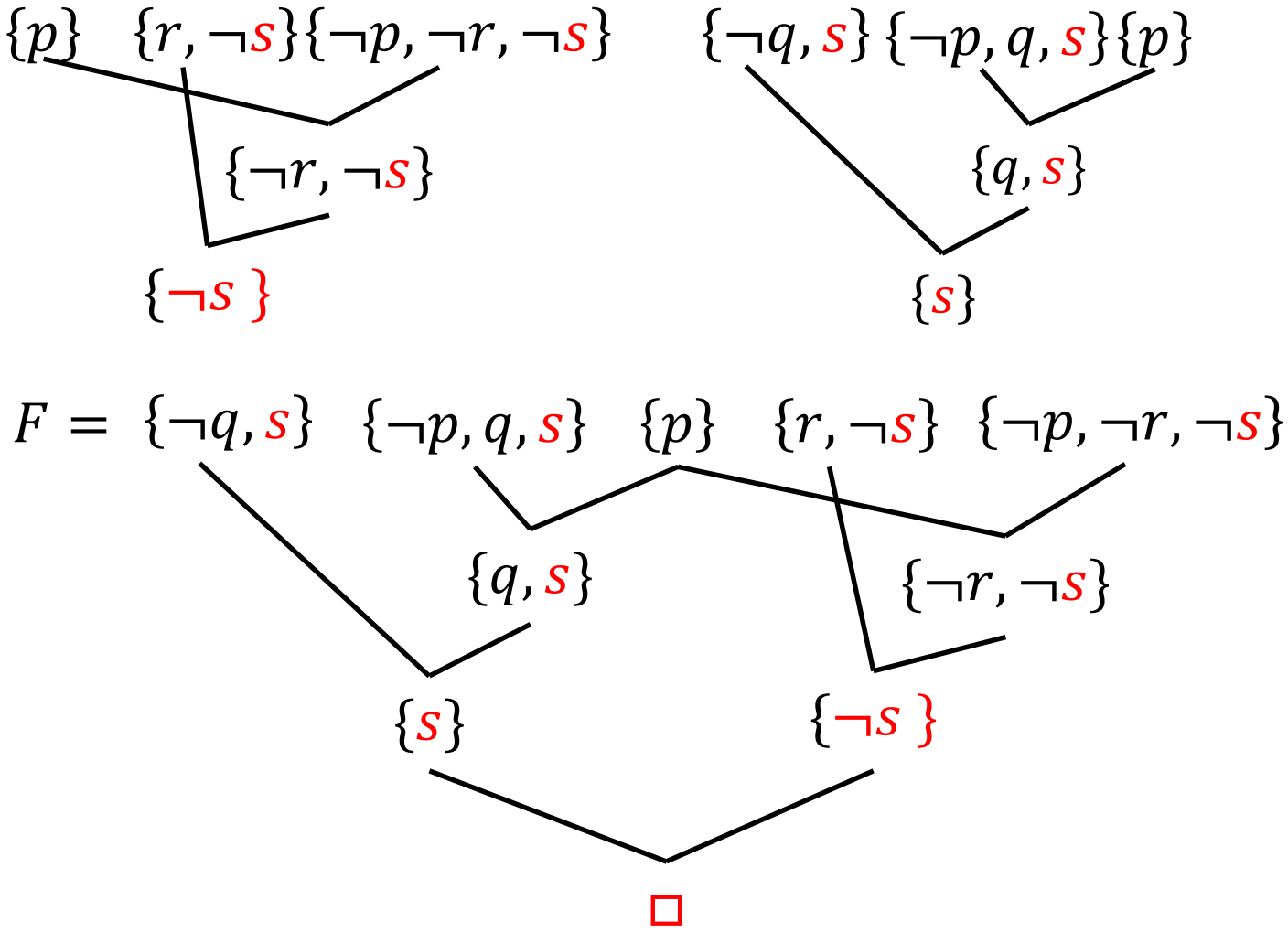
$$F = \{ \{\neg q, s\} , \{\neg p, q, s\} , \{p\} , \{r, \neg s\} , \{\neg p, \neg r, \neg s\} \}$$










{p} {r, ¬s} {¬p, ¬r, ¬s}
{¬r, ¬s}
{¬s }
{¬q, s} {¬p, q, s} {p}
{q, s}
{s}
F = {¬q, s} {¬p, q, s} {p} {r, ¬s} {¬p, ¬r, ¬s}
{q, s}
{¬r, ¬s}
{s}
{¬s }
□

Praktische Anwendungen in der Informatik:

- Vollständige Induktion als mathematisches Äquivalent der Rekursion
  $\Longrightarrow$ Analyse von Algorithmen.
- Strukturelle Induktion als allgemeinere Form der vollständigen Induktion
- Terminierung und Korrektheit von Algorithmen