

WS 2016/17

# Diskrete Strukturen

## Kapitel 3: Kombinatorik (1)

Hans-Joachim Bungartz

Lehrstuhl für wissenschaftliches Rechnen

Fakultät für Informatik

Technische Universität München

[http://www5.in.tum.de/wiki/index.php/Diskrete\\_Strukturen\\_-\\_Winter\\_16](http://www5.in.tum.de/wiki/index.php/Diskrete_Strukturen_-_Winter_16)

- Kombinatorische Strukturen und Algorithmen
  - Ziehen von Elementen aus einer Menge
  - Kombinatorische Beweisprinzipien
  - Fundamentale Zählkoeffizienten
  - Bälle und Urnen



- **Kombinatorik:** In der Kombinatorik studieren wir Probleme folgender Art:
  - Gegeben ist eine Menge  $A$ .  
Es wird eine Menge  $B$  definiert, deren Elemente die Objekte sind, die aus Elementen von  $A$  konstruiert worden sind, und eine gewisse Eigenschaft erfüllen.
  - **Frage:** Wie viele Elemente enthält  $B$ ?
- **Modellierung:** Schritte, die von der Formulierung des Problems auf Deutsch zu der präzisen Definition der Mengen  $A$  und  $B$  führen.



- **Beispiel:** Wie viele Lottoziehungen gibt es, in denen mindestens zwei Zahlen konsekutiv sind?
  - $A = \{1, \dots, 49\}$ ,
  - $B = \{ C \subseteq A \mid |C| = 6 \wedge \exists a, b \in C: b = a + 1 \}$ .
- **Beispiel:** In einem Wettkampf zwischen 100 Leuten, wie viele unterschiedliche Möglichkeiten für die ersten 10 gibt es?
  - $A = \{1, 2, \dots, 100\}$ ,
  - $B = \{ (b_1, \dots, b_{10}) \in A^{10} \mid b_i \neq b_j \forall i, j \in [10] \}$ .



- **Beispiel:** Ein Systemadministrator verwendet folgende Regel für die Vergabe von UserIds und Passwörtern:
  - Eine UserId enthält nur Ziffern und Buchstaben, hat Länge zwischen 6 und 32, und keine Ziffer darf vor einem Buchstaben kommen.
  - Ein Passwort enthält Ziffern, Buchstaben und Sonderzeichen (jeweils mindestens 1), und hat Länge zwischen 8 und 16. Die ersten drei Zeichen dürfen nicht mit den ersten drei Zeichen des UserIds identisch sein.
  - Frage: Wie viele Paare (UserId, Passwort) gibt es?



- Kombinatorische Strukturen und Algorithmen
  - Ziehen von Elementen aus einer Menge
  - Kombinatorische Beweisprinzipien
  - Fundamentale Zählkoeffizienten
  - Bälle und Urnen



- Ziehen von Elementen aus einer Menge:
  - In vielen Fällen kann man sich vorstellen, dass die Elemente von  $B$  konstruiert werden, indem man Elemente aus  $A$  hintereinander „zieht“ und zusammensetzt.
  - Dabei kann jedes Element nach der Ziehung
    - zurückgelegt werden (damit kann das Element **beliebig oft** gezogen werden).
    - nicht zurückgelegt werden (damit kann das Element **höchstens einmal** gezogen werden).
  - Die Reihenfolge der Ziehungen kann
    - berücksichtigt werden (z.B. wenn eine Zahl bestimmt wird, in dem man Ziffern zieht).
    - ignoriert werden (z.B. Lottoziehung).



- Ziehen von Elementen aus einer Menge:
  - $k$  Elemente, geordnet, mit Zurücklegen:
    - $B = A^k$
  - $k$  Elemente, geordnet, ohne Zurücklegen:
    - $B =$  Menge der Tupeln von  $A^k$ , deren Komponenten paarweise verschieden sind.
  - $k$  Elemente, ungeordnet, mit Zurücklegen:
    - $B =$  Menge aller  $k$ -elementigen **Multi**mengen über  $A$   
(Multimengen können ein Element mehrmals enthalten.)
  - $k$  Elemente, ungeordnet, ohne Zurücklegen:
    - $B =$  Menge aller  $k$ -elementigen **Teil**mengen von  $A$ .





- Ziehen von Elementen aus einer Menge:

**Beispiel:** Die unterschiedlichen Möglichkeiten für das Ziehen von zwei Objekten aus einer dreielementigen Menge:

	geordnet	ungeordnet
mit Zurücklegen	$(1,1), (1,2), (1,3)$ $(2,1), (2,2), (2,3)$ $(3,1), (3,2), (3,3)$	$\{1,1\}, \{1,2\}, \{1,3\}$ $\{2,2\}, \{2,3\}, \{3,3\}$
ohne Zurücklegen	$(1,2), (1,3), (2,1)$ $(2,3), (3,1), (3,2)$	$\{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}$



- Ziehen **mit** Zurücklegen, **geordnet**:  
Wie viele Möglichkeiten gibt es,  **$k$  Elemente** aus einer  **$n$ -elementigen Menge** zu ziehen, wobei die gezogenen Elemente jeweils **zurückgelegt** werden und es auf die **Reihenfolge** der Elemente ankommen soll?
- Da es in jedem Zug  $n$  Möglichkeiten gibt, gibt es insgesamt

$$\underbrace{n \cdot n \cdot \dots \cdot n}_{k\text{-mal}} = n^k$$

Möglichkeiten.

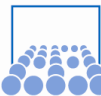


- Ziehen **ohne** Zurücklegen, **geordnet**:  
Wie viele Möglichkeiten gibt es,  **$k$  Elemente** aus einer  **$n$ -elementigen Menge** zu ziehen, wobei die gezogenen Elemente **nicht zurückgelegt** werden und es auf die **Reihenfolge** der Elemente ankommen soll?



- Ziehen **ohne** Zurücklegen, **geordnet**:  
Da wir **nicht** zurücklegen, gibt es in jedem Zug **eine Möglichkeit weniger** als im Zug zuvor (mit  $n$  Möglichkeiten im ersten Zug). Die Anzahl der Möglichkeiten ist somit:

$$\begin{aligned} n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdots (n - k + 1) &= \prod_{i=0}^{k-1} (n - i) \\ &= \frac{n!}{(n - k)!} \end{aligned}$$



- Ziehen **ohne** Zurücklegen, **geordnet**:
  - Jede mögliche Ziehung ist eine **Variation**.
    - Eine Variation einer Menge  $A$  ist eine Sequenz von Elementen von  $A$ , in der jedes Element **höchstens einmal** vorkommt.
  - Eine Variation der Länge  $|A|$  nennt man **Permutation**.
    - Eine Permutation einer Menge  $A$  ist eine Sequenz von Elementen von  $A$ , in der jedes Element **genau einmal** vorkommt.



- Der Ausdruck

$$\frac{n!}{(n - k)!}$$

wird **fallende Faktorielle** von  $n$  der Länge  $k$  genannt und wird mit

$$n^{\underline{k}}$$

bezeichnet. Es gilt

- Definition:  $n^{\underline{0}} := 1$  und  $0! := 1$
- Die fallende Faktorielle zählt die Anzahl von  **$k$ -Variationen** der  $n$  Elemente einer Menge.



- **Beispiel:**

Angenommen, ein Vertreter muss **8 Städte** besuchen, wobei er mit einer bestimmten Stadt beginnen muss, die Reihenfolge der anderen Städte jedoch beliebig ist.

**Frage:**

Auf wie viele unterschiedliche Möglichkeiten kann der Vertreter seine Reise durchführen?



- Lösung:

Die Anzahl möglicher Wege ist bestimmt durch die Permutation von **sieben** Elementen, da das erste Element (Stadt) vorgegeben ist.

Also gibt es  $7! = 5040$  mögliche Reiserouten.





- Beispiel:

Wie viele Möglichkeiten gibt es, die Buchstaben ABCDEFGH so anzuordnen, dass die Buchstabenfolge **ABC** enthalten ist?



- Lösung:

Wir führen das Problem auf das Ziehen von 6 Elementen (**ABC**,D,E,F,G,H) ohne Zurücklegen aus einer 6-elementigen Menge zurück.

Also gibt es  **$6! = 720$**  Permutationen.



- Ziehen **ohne** Zurücklegen, **ungeordnet**:  
Wie viele Möglichkeiten gibt es,  $k$  Elemente aus einer  $n$ -elementigen Menge zu ziehen, wobei die gezogenen Elemente **nicht zurückgelegt** werden und es **nicht** auf die **Reihenfolge** der Elemente ankommen soll?
- Die Ziehung wird eindeutig durch die **Untermenge der gezogenen Elemente** bestimmt.
- Da wir  $k$  Elemente ziehen, sprechen wir in diesem Fall von  **$k$ -Untermengen**.



- Ziehen **ohne Zurücklegen**, **ungeordnet**:

Wie viele  **$k$ -Untermengen** einer  **$n$ -elementigen Menge** gibt es?

Beachte, dass die  $k$ -Variationen einer Menge aus den  $k$ -Untermengen erhalten werden, indem deren Elemente geordnet werden!

– Beispiel:

Aus  $\{1,3,5\}$  erhalten wir sechs 3-Variationen:  
 $(1,3,5)$ ,  $(1,5,3)$ ,  $(3,1,5)$ ,  $(3,5,1)$ ,  $(5,1,3)$ ,  $(5,3,1)$ .



- **Satz:** Die Anzahl von  $k$ -Untermengen einer  $n$ -elementigen Menge ist

$$\binom{n}{k} = \frac{n^k}{k!} = \frac{n!}{k! (n - k)!}.$$

Die Ausdrücke

$$\binom{n}{k}$$

heißen **Binomialkoeffizienten**.



- Ziehen **mit** Zurücklegen, **ungeordnet**:

Das Ergebnis des Ziehens mit Zurücklegen, ohne auf die Reihenfolge zu achten, wird durch sogenannte **Multimengen** beschrieben.

- In Multimengen dürfen Elemente mehrmals vorkommen.
- Beispiel:  $M = \{a, b, b, c, d, e, e\}$  ist eine Multimenge über der Menge  $\{a, b, c, d, e\}$  mit  $|M| = 7$ .



- Ziehen **mit** Zurücklegen, **ungeordnet**:

**Satz:** Es gibt

$$\binom{n + k - 1}{n - 1}$$

$k$ -Multimengen (Multimengen mit  $k$  Elementen) aus einer Menge mit  $n$  Elementen.



- Beweis:

Jede  $k$ -Multimenge aus einer Menge mit  $n$  Elementen kann als Liste bestehend aus  $n - 1$  Strichen „|“ und  $k$  Sternen „★“ repräsentiert werden.

– Beispiel: ★★ ★|★||★★★★||.

– Die Striche separieren  $n$  Listenbereiche, wobei der  $i$ -te Bereich genauso viele Sterne beinhaltet, wie das  $i$ -te Element in der Liste vorkommt.





- Beweis:

Das Problem lässt sich somit auf das Ziehen von  $n - 1$  Strichen aus  $n - 1 + k$  Elementen (ohne Zurücklegen!) zurückführen.

Daraus folgt der Satz.  $\square$



- Zusammenfassung:

	geordnet	ungeordnet
mit zurücklegen	$n^k$	$\binom{n+k-1}{n-1}$
ohne zurücklegen	$n^{\underline{k}}$	$\binom{n}{k}$



- Beispiel Lotto:  
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, bei 6 aus 49 zu gewinnen?



- **Beispiel Lotto:**

Zuerst beantworten wir die Frage, wie viele Möglichkeiten es gibt, 6 Zahlen aus 49 Zahlen zu ziehen, wobei die gezogenen Zahlen nicht wieder zurückgelegt werden.

- **Antwort:** Es gibt

$$M = \binom{49}{6} = \frac{49 \cdot 48 \cdot \dots \cdot 44}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = 13.983.816$$

Möglichkeiten.



- Beispiel Lotto:

Da alle Züge **voneinander unabhängig** sind, ist die Wahrscheinlichkeit  $p$ , die richtige Zahl zu tippen

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{M} = 0,0000000715 \\ &= 0,00000715\%. \end{aligned}$$



- Die Lottosensation am 29.6.1995:  
**Stuttgart (dpa/lsw).** Die Staatliche Toto-Lotto GmbH in Stuttgart hat eine Lottosensation gemeldet: Zum ersten Mal in der 40jährigen Geschichte des deutschen Zahlenlottos wurden zwei identische Gewinnreihen festgestellt. Am 21. Juni dieses Jahres [3016te Ausspielung] kam im Lotto am Mittwoch in der Ziehung A die Gewinnreihe 15-25-27-30-42-48 heraus. Genau die selben Zahlen wurden bei der 1628. Ausspielung im Samstagslotto schon einmal gezogen, nämlich am 20. Dezember 1986. Welch ein Lottozufall!



- Die Lottosensation am 29.6.1995:

## Wirklich eine Sensation?

Es gibt  $M = 13.983.816$  mögliche (Sechser)-Ziehungen.

Wie viele Sequenzen von 3016 Ziehungen gibt es, und wie viele davon enthalten irgendeine Ziehung mindestens zweimal?

Sei  $Z$  die Menge aller Ziehungen,  $|Z| = M$ .

Wir ziehen nun 3016 Elemente aus  $Z$ , mit Zurücklegen, geordnet. Die Anzahl  $S$  der möglichen Sequenzen ist:

$$S = M^{3016}.$$



- Die Lottosensation am 29.6.1995:

## Wirklich eine Sensation?

Wie viele von diesen Sequenzen enthalten eine Ziehung mindestens zweimal?

**Trick:** wir berechnen die Anzahl der Sequenzen  $HE$ , in denen jede Ziehung höchstens einmal vorkommt, und subtrahieren sie von  $S$ .





- Die Lottosensation am 29.6.1995

## Wirklich eine Sensation?

Für die Berechnung von  $HE$  ziehen wir 3016 Elemente aus  $Z$ , geordnet, aber **ohne Zurücklegen**. Wir erhalten:

$$HE = M^{\underline{3016}}.$$



- Die Lottosensation am 29.6.1995

## Wirklich eine Sensation?

Unter der Annahme, dass alle Sequenzen genauso wahrscheinlich sind, haben wir für die Wahrscheinlichkeit  $p$ , nach 3016 Ziehungen mindestens eine Wiederholung gesehen zu haben:

$$p = \frac{S - HE}{S} = 1 - \frac{M^{3016}}{M^{3016}} = 1 - \prod_{j=1}^{3016} \frac{M - (j - 1)}{M}$$

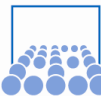


- Die Lottosensation am 29.6.1995:

## Wirklich eine Sensation?

Mit der Abschätzung  $1 - x \leq e^{-x}$  erhalten wir

$$p = 1 - \prod_{j=1}^{3016} \frac{M - (j - 1)}{M} = 1 - \prod_{j=1}^{3016} \left(1 - \frac{(j - 1)}{M}\right)$$



- Die Lottosensation am 29.6.1995:

## Wirklich eine Sensation?

Mit der Abschätzung  $1 - x \leq e^{-x}$  erhalten wir

$$p = 1 - \prod_{j=1}^{3016} \frac{M - (j - 1)}{M} = 1 - \prod_{j=1}^{3016} \left( 1 - \frac{(j - 1)}{M} \right)$$

$$\geq 1 - \prod_{j=1}^{3016} e^{-\frac{j-1}{M}} = 1 - e^{-\frac{1}{M} \sum_{j=0}^{3015} j}$$



- Die Lottosensation am 29.6.1995:

## Wirklich eine Sensation?

Mit der Abschätzung  $1 - x \leq e^{-x}$  erhalten wir

$$p = 1 - \prod_{j=1}^{3016} \frac{M - (j - 1)}{M} = 1 - \prod_{j=1}^{3016} \left(1 - \frac{j - 1}{M}\right)$$
$$\geq 1 - \prod_{j=1}^{3016} e^{-\frac{j-1}{M}} = 1 - e^{-\frac{1}{M} \sum_{j=0}^{3015} j} = 1 - e^{-\frac{1}{M} \cdot \frac{3016 \cdot 3015}{2}}$$



- Die Lottosensation am 29.6.1995:

## Wirklich eine Sensation?

Mit der Abschätzung  $1 - x \leq e^{-x}$  erhalten wir

$$\begin{aligned} p &= 1 - \prod_{j=1}^{3016} \frac{M - (j - 1)}{M} = 1 - \prod_{j=1}^{3016} \left( 1 - \frac{(j - 1)}{M} \right) \\ &\geq 1 - \prod_{j=1}^{3016} e^{-\frac{j-1}{M}} = 1 - e^{-\frac{1}{M} \sum_{j=0}^{3015} j} = 1 - e^{-\frac{1}{M} \cdot \frac{3016 \cdot 3015}{2}} \\ &= 1 - e^{-0.325} \approx 0,278 = 27.8\%. \end{aligned}$$



Praktische Anwendungen in der Informatik:

- Darstellungsmächtigkeit von  $n$  Bits ( $2^n$ )
- Sicherheit von Passwörtern beruht i.W. auf der „kombinatorischen Explosion“
- Brute-Force-Algorithmen (Durchprobieren aller Möglichkeiten)
- Bestimmung von Wahrscheinlichkeiten

