WS 2016/17

Diskrete Strukturen

Kapitel 3: Kombinatorik (3)

Hans-Joachim Bungartz

Lehrstuhl für wissenschaftliches Rechnen
Fakultät für Informatik
Technische Universität München

http://www5.in.tum.de/wiki/index.php/Diskrete_Strukturen_-_Winter_16

Kapitel 3: Kombinatorik (3)

- Kombinatorische Strukturen und Algorithmen
  - Ziehen von Elementen aus einer Menge
  - Kombinatorische Beweisprinzipien
  - Fundamentale Zählkoeffizienten
  - Bälle und Urnen

- Fundamentale Zählkoeffizienten:
  Die Binomialkoeffizienten
  $$\binom{n}{k}$$
  zählen die Anzahl k-elementiger Teilmengen einer n-elementigen Menge.
- Der Name „Binomialkoeffizient“ resultiert daher, dass diese Zahlen in der Exponentiation von binomialen Ausdrücken $(a+b)^n$ vorkommen.

- Die Binomische Formel:

Satz: Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} .$$

Beweis: Aus $(a+b)^n = \underbrace{(a+b)(a+b)\ldots(a+b)}_{n-\mathrm{mal}}$

und aus dem Distributivgesetz folgt

$$(a+b)^n = \sum_{(x_1,\ldots,x_n)\in\{a,b\}^n} x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n .$$

- Die Binomische Formel:

Beweis (Fort.):

Es gilt: $x_1 x_2 \dots x_n = a^k b^{n-k}$ gdw. a genau k-mal in $x_1 x_2 \dots x_n$ vorkommt.

Damit gibt es eine Bijektion zwischen den Tupeln $(x_1, \dots, x_n)$ mit $x_1 x_2 \dots x_2 = a^k b^{n-k}$ und den k-Untermengen von $\{1, \dots, n\}$. □

- Die Binomische Formel:

  Beispiel: Was ist der Koeffizient von $x^{12}y^{13}$ in der Entwicklung von $(2x - 3y)^{25}$? Antwort: Da

$$\big(2x + (-3y)\big)^{25} = \sum_{k=0}^{25} \binom{25}{k} (2x)^{25-k}(-3y)^k,$$

  erhalten wir für den Koeffizienten

$$\frac{25!}{13!\,12!}\,2^{12}\,(-3)^{13} = -3.395976 \times 10^{16}.$$

- Anwendung der Binomischen Formel:

Korollar: Für alle $n \geq 0$ gilt

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n .$$

1. Beweis: Binomische Formel mit $a = 1 = b$.

2. Beweis: Die linke Seite ist die Anzahl der Untermengen einer n-elementigen Menge.

- Die Pascalsche Identität:

  Satz: Für alle $n, k \in \mathbb{N}_0$ mit $n \geq k$ gilt

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}.$$

- Kombinatorischer Beweis der Identität:

  Eine n-elementige Menge T hat $\binom{n}{k}$ k-Teilmengen.

  Sei $a \in T$. Jede k-Teilmenge enthält entweder

  (1) a und $k-1$ Elemente aus $T \setminus \{a\}$, oder

  (2) k Elemente aus $T \setminus \{a\}$.

  Es gibt $\binom{n-1}{k-1}$ bzw. $\binom{n-1}{k}$ Teilmengen von Typ (1) bzw. von Typ (2). $\square$

- Das Pascalsche Dreieck:
  Geometrische Anordnung der Binomial-koeffizienten in Form eines Dreiecks:

Werden zwei benachbarte Koeffizienten addiert, dann ergibt dies den Koeffizienten in der nächsten Zeile zwischen diesen beiden.

$$
\begin{array}{ccccccccccccccccccccc}
&&&&&&&&&&1&&&&&&&&&&\\
&&&&&&&&&1&&1&&&&&&&&&\\
&&&&&&&&1&&2&&1&&&&&&&&\\
&&&&&&&1&&3&&3&&1&&&&&&&\\
&&&&&&1&&4&&6&&4&&1&&&&&&\\
&&&&&1&&5&&10&&10&&5&&1&&&&&\\
&&&&1&&6&&15&&20&&15&&6&&1&&&&\\
&&&1&&7&&21&&35&&35&&21&&7&&1&&&\\
&&1&&8&&28&&56&&70&&56&&28&&8&&1&&\\
&1&&9&&36&&84&&126&&126&&84&&36&&9&&1&\\
1&&10&&45&&120&&210&&252&&210&&120&&45&&10&&1
\end{array}
$$

- Die Vandermonde Identität:
  In unserem Vorlesungssaal befinden sich $n + m$ Studierende, davon sind n in München geboren und m woanders.

  Wie viele Möglichkeiten gibt es, k Studierende auszuwählen?

  Lösung 1: $\binom{n+m}{k}$.

Lösung 2: Man nimmt j Elemente aus der ersten Menge und dann $k - j$ Elemente aus der zweiten Menge, wobei $0 \leq j \leq k$ gilt. Aus der Produktregel folgt, dass es für jedes j

$$\binom{n}{j}\binom{m}{k-j}$$

Möglichkeiten gibt.

Die erste Lösung muss gleich der zweiten Lösung sein, wenn man die Möglichkeiten für alle Werte von j addiert. Es ergibt sich

- Satz (Vandermonde-Identität):

$$\binom{n+m}{k} = \sum_{j=0}^{k} \binom{n}{j} \binom{m}{k-j}.$$

- Aufgabe:

  Betrachte den Punkt der xy-Ebene mit Koordinaten $(m, n) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$. Wie viele Pfade gibt es vom Punkt $(0,0)$ zu (m, n), die aus Schritten der Länge 1 nach rechts oder nach oben bestehen?

- Aufgabe:

  Betrachte den Punkt der xy-Ebene mit Koordinaten $(m, n) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$. Wie viele Pfade gibt es vom Punkt $(0,0)$ zu (m, n), die aus Schritten der Länge 1 nach rechts oder nach oben bestehen?

  Da ein Pfad aus m Schritten nach rechts und n Schritten nach oben besteht, kann jeder Pfad als Zeichenfolge der Länge $m + n$ mit m Nullen und n Einsen dargestellt werden.

Die Anzahl von Zeichenfolgen der Länge $m + n$, die genau n Einsen beinhalten, ist gegeben durch die Anzahl Positionen, an denen die n Einsen (oder die m Nullen) stehen.

Es folgt, dass die Anzahl von Pfaden gegeben ist durch

$$\binom{n+m}{n} = \binom{n+m}{m}.$$

- Die Stirlingzahlen der zweiten Art:
  - Definition: Eine k-Partition einer n-elementigen Menge $A = \{s_1, \ldots, s_n\}$ ist eine Zerlegung von A in k disjunkte, nichtleere Teilmengen (oder Blöcke) $A_1, \ldots, A_k$, sodass gilt:

$$\biguplus_{i=1}^{k} A_i = A\,.$$

- Die Stirlingzahlen der zweiten Art:

  Beispiel für $n = 5$ und $k = 4$:

$\{ \{1\}, \{2\}, \{3,4\}, \{5\} \}$

$\{ \{1\}, \{2,3\}, \{4\}, \{5\} \}$

$\{ \{1\}, \{3\}, \{2,4\}, \{5\} \}$

$\{ \{1,2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\} \}$

$\{ \{1,3\}, \{2\}, \{4\}, \{5\} \}$

$\{ \{1,4\}, \{2\}, \{3\}, \{5\} \}$

$\{ \{1,5\}, \{2\}, \{3\}, \{4\} \}$

$\{ \{1\}, \{2,5\}, \{3\}, \{4\} \}$

$\{ \{1\}, \{2\}, \{3,5\}, \{4\} \}$

$\{ \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4,5\} \}$

- Die Stirlingzahlen der zweiten Art:

  Anzahl der k-Partitionen einer n-elementigen Menge

  =

  Anzahl der Möglichkeiten, n unterscheidbare Objekte in k gleiche Fächer zu verteilen (jedes Fach bekommt mindestens ein Objekt!).

- Die Stirlingzahlen der zweiten Art:

  Anzahl der k-Partitionen einer n-elementigen Menge

  =

  Anzahl der Möglichkeiten, n unterscheidbare Objekte in k gleiche Fächer zu verteilen (jedes Fach bekommt mindestens ein Objekt!).

  = (Warum?)

  $\left(\frac{1}{k!}\right) \cdot$ Anzahl der surjektiven Funktionen $f: A \to B$

  mit $|A| = n$ und $|B| = k$.

- Die Stirlingzahlen der zweiten Art:

  Die Anzahl von k-Partitionen wird durch die sogenannten Stirlingzahlen zweiter Art angegeben und mit $S_{n,k}$ oder $\left\{ n \atop k \right\}$ bezeichnet.

  Insbesondere gilt:
  - $S_{n,k} = 0$ für $k > n$,
  - $S_{n,0} = 0$ für $n > 0$, und
  - $S_{0,0} = 1$.
- Frage: Wie lassen sich diese Zahlen berechnen?

- Die Stirlingzahlen der zweiten Art:

  Sei $n \geq k > 0$. Wir teilen die k-Partitionen in zwei disjunkte Klassen auf:

  - Klasse 1: Alle Partitionen, in denen sich das Element s_n alleine in einem Block befindet.
  - Klasse 2: Alle andere Partitionen.

- Die Stirlingzahlen der zweiten Art:

  Klasse 1: Alle Partitionen, in denen sich das Element s_n alleine in einem Block befindet.

  Dann müssen die Elemente $s_1, \dots, s_{n-1}$ auf die übrigen $k-1$ Blöcke verteilt werden.

  Jede Verteilung ist eine $(k-1)$-Partitionierung von $\{s_1, \dots, s_{n-1}\}$.

  Es gibt also genau $S_{n-1,k-1}$ k-Partitionen der Klasse 1.

- Die Stirlingzahlen der zweiten Art:

  Klasse 2: Alle Partitionen, die nicht in der ersten Klasse sind.

  Dann befindet sich s_n in einem der k Blöcke, auf die die Elemente $s_1, \ldots, s_{n-1}$ verteilt wurden.

  Es gibt $S_{n-1,k}$ k-Partitionen von $\{s_1, \ldots, s_{n-1}\}$.

  Es gibt also $k \cdot S_{n-1,k}$ Partitionen der Klasse 2.

  Insgesamt: $S_{n,k} = S_{n-1,k-1} + k \cdot S_{n-1,k}$.

- Die Stirlingzahlen der zweiten Art:

  Satz: Die Stirlingzahlen $S_{n,k}$ der zweiten Art erfüllen folgende Rekursionsgleichung:

$$S_{n,k} = \begin{cases} 1, & \text{falls } k = 0, n = 0; \\ 0, & \text{falls } k = 0, n > 0; \\ 0, & \text{falls } k > 0, k > n; \\ S_{n-1,k-1} + kS_{n-1,k}, & \text{falls } k > 0, k \leq n. \end{cases}$$

- Die Stirlingzahlen der zweiten Art:

$$\begin{array}{lccccccccc}
n=1: & & & & 0 & & 1 & & & \\
 & & & & & \searrow\overset{1\cdot}{}\swarrow & & & & \\
n=2: & & & 0 & & 1 & & 1 & & \\
 & & & & \searrow\overset{1\cdot}{}\swarrow & & \searrow\overset{2\cdot}{}\swarrow & & & \\
n=3: & & 0 & & 1 & & 3 & & 1 & \\
 & & & \searrow\overset{1\cdot}{}\swarrow & & \searrow\overset{2\cdot}{}\swarrow & & \searrow\overset{3\cdot}{}\swarrow & & \\
n=4: & 0 & & 1 & & 7 & & 6 & & 1 \\
 & & \searrow\overset{1\cdot}{}\swarrow & & \searrow\overset{2\cdot}{}\swarrow & & \searrow\overset{3\cdot}{}\swarrow & & \searrow\overset{4\cdot}{}\swarrow & \\
 & & 1 & & 15 & & 25 & & 10 &
\end{array}$$

usw.

- Die Stirlingzahlen der ersten Art:

  Anzahl der Möglichkeiten, n Objekte in k Zyklen zu arrangieren, oder Anzahl der Permutationen mit k Zyklen.

  Eine Permutation einer Menge $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ ist eine bijektive Abbildung $\pi: A \to A$, d.h.

  - jedem Element $a \in A$ entspricht ein Bild $\pi(a)$,
  - jedes Element von A ist das Bild genau eines a.

$$\pi = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n \\ \pi(a_1) & \cdots & \pi(a_n) \end{pmatrix}.$$

- Die Stirlingzahlen der ersten Art:

  Es gibt $n!$ Permutationen.

  Die Komposition $\pi \circ \pi'$ zweier Permutationen ergibt wieder eine Permutation.

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \pi' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dann ist $\pi \circ \pi' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

- Die Stirlingzahlen der ersten Art:

  Zyklen einer Permutation:

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 5 & 8 & 3 & 6 & 2 & 7 & 4 & 1 & 9 & 11 & 10 \end{pmatrix}.$$

  1,5,2,8 bildet einen Zyklus der Länge 4, d.h.

$$\pi\left(\pi\left(\pi(\pi(1))\right)\right) = 1.$$

  3 und 9 sind Fixpunkte von π (sie werden auf sich selber abgebildet). Wir interpretieren sie als Zyklen der Länge 1.

- Die Stirlingzahlen der ersten Art:
  - Definition: Ein Zyklus der Länge t (mit $t \in \mathbb{N}$) zu einer Permutation π auf $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ ist definiert über einer t-elementigen Teilmenge $\{a_{i_1}, \dots, a_{i_t}\} \subseteq A$ mit:
    - $a_{i_1}, \dots, a_{i_t}$ sind paarweise verschieden
    - $\pi(a_{i_j}) = a_{i_{(j+1)\,mod\,t}} \quad \forall j \in [t]$
  - Zyklenschreibweise: $(a_{i_1}, \dots, a_{i_t})$
  - Die Zyklenschreibweise ist nicht eindeutig, denn es gilt z.B. $(4\ 6\ 7) = (7\ 4\ 6) = (6\ 7\ 4)$

Beispiel:

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 5 & 8 & 3 & 6 & 2 & 7 & 4 & 1 & 9 & 11 & 10 \end{pmatrix}.$$

Zyklen: $(1\ 5\ 2\ 8), (3), (4\ 6\ 7)\ ,(9)\ ,(10\ 11)$.

Fakt: Eine Permutation ist durch ihre Zyklen charakterisiert (d.h. Permutationen mit denselben Zyklen sind gleich).

- Die Stirlingzahlen der ersten Art:
  - Die Anzahl der Permutationen von n Elementen mit genau k Zyklen wird durch die sogenannten Stirlingzahlen erster Art angegeben und mit $s_{n,k}$ oder $\left[{n \atop k}\right]$ bezeichnet.
  - Beispiel für $n = 4$ und $k = 3$:

$$\{(1),(2\ 3),(4)\} \qquad \{(1\ 4),(2),(3)\}$$
$$\{(1\ 2),(3),(4)\} \qquad \{(1),(2\ 4),(3)\}$$
$$\{(1\ 3),(2),(4)\} \qquad \{(1),(2),(3\ 4)\}$$

Es gilt also: $s_{4,3} = 6$.

- Die Stirlingzahlen der ersten Art:

  Da jede Permutation mindestens einen und höchstens n Zyklen hat, gilt:

  - $s_{n,k} = 0$ für $k > n$,
  - $s_{n,0} = 0$ für $n > 0$.

  Darüber hinaus gilt (warum?):

  - $s_{n,n} = 1$ für $n > 0$,
  - $\sum_{k=1}^{n} s_{n,k} = n!$.

  Dazu definieren wir: $s_{0,0} = 1$.

- Die Stirlingzahlen der ersten Art:
  Eine Permutation von n Elementen mit k Zyklen kann auf zwei Arten entstehen:
  1. Aus einer Permutation von $n-1$ Elementen mit $k-1$ Zyklen, indem das n-te Element einen neuen Zyklus der Länge 1 bildet.
  2. Indem das n-te Element in einen der Zyklen einer Permutation von $n-1$ Elementen mit k Zyklen hinzugefügt wird. Dafür gibt es aber genau $n-1$ Möglichkeiten.

Permutationen mit
$n = 3$ und $k = 3$:

$$\{(1),(2),(3)\}$$

Permutationen mit
$n = 3$ und $k = 2$:

$$\{(1),(2\ 3)\}$$

$$\{(1\ 2),(3)\}$$

$$\{(1\ 3),(2)\}$$

Permutationen mit
$n = 4$ und $k = 3$:

$$\{(1\ 4),(2),(3)\}$$

$$\{(1),(2\ 4),(3)\}$$

$$\{(1),(2),(3\ 4)\}$$

$$\{(1),(2\ 3),(4)\}$$

$$\{(1\ 2),(3),(4)\}$$

$$\{(1\ 3),(2),(4)\}$$

- Die Stirlingzahlen der ersten Art:

  Satz: Die Stirlingzahlen $s_{n,k}$ der ersten Art erfüllen die folgende Rekursionsgleichung:

$$s_{n,k} = \begin{cases} 1, & \text{falls } k = 0, n = 0; \\ 0, & \text{falls } k = 0, n > 0; \\ 0, & \text{falls } k > 0, k > n; \\ s_{n-1,k-1} + (n-1) \cdot s_{n-1,k}, & \text{falls } k > 0, k \leq n. \end{cases}$$

- Die Stirlingzahlen der ersten Art:

$$\begin{tikzcd}
n=1: & & & & 0 \arrow[dr] & & 1 \arrow[dl, "1\cdot"'] & & & \\
n=2: & & & 0 \arrow[dr] & & 1 \arrow[dl, "2\cdot"'] \arrow[dr] & & 1 \arrow[dl, "2\cdot"'] & & \\
n=3: & & 0 \arrow[dr] & & 2 \arrow[dl, "3\cdot"'] \arrow[dr] & & 3 \arrow[dl, "3\cdot"'] \arrow[dr] & & 1 \arrow[dl, "3\cdot"'] & \\
n=4: & 0 \arrow[dr] & & 6 \arrow[dl, "4\cdot"'] \arrow[dr] & & 11 \arrow[dl, "4\cdot"'] \arrow[dr] & & 6 \arrow[dl, "4\cdot"'] \arrow[dr] & & 1 \arrow[dl, "4\cdot"'] \\
 & & 24 & & 50 & & 35 & & 10 &
\end{tikzcd}$$

usw.

- Ungeordnete Zahlpartitionen:
  - Eine k-Zahlpartition einer natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}$ ist eine Multimenge $\{n_1, n_2, \ldots, n_k\}$ von positiven natürlichen Zahlen mit der Eigenschaft

    $$n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k.$$

    Beispiel: Die Zahl 5 hat folgende Zahlpartitionen:

    $\{1,1,1,1,1\}$ $\{2,1,1,1\}$ $\{2,2,1\}$ $\{3,1,1\}$

    $\{3,2\}$ $\{4,1\}$ $\{5\}$

    D.h.: 5 hat eine 5-Partition, eine 4-Partition, zwei 3-Partitionen, zwei 2-Partitionen und eine 1-Partition.

- Ungeordnete Zahlpartitionen:
  - Wird jedes Element aus einer k-Zahlpartition von n um Eins dekrementiert, erhält man eine m-Zahlpartition von $n-k$ mit $\mathrm{m} \leq k$.
  - Beispiel: Aus $\{3,2,2,1\}$ (4-Zahlpartition von 8) erhält man $\{2,1,1\}$ (3-Zahlpartition von 4).
  - Darüber hinaus:
    - Verschiedene k-Partitionen von n ergeben verschiedene Partitionen von $n-k$.
    - Jede Partition von $n-k$ wird „erreicht".

- Ungeordnete Zahlpartitionen:

  Satz: Die Anzahl $P_{n,k}$ der ungeordneten k-Partitionen einer Zahl n erfüllt folgende Rekursionsgleichung:

$$P_{n,k} = \begin{cases} 1, & \text{falls } k = 0, n = 0; \\ 0, & \text{falls } k = 0, n > 0; \\ 0, & \text{falls } k > 0, k > n; \\ \sum_{i=0}^{k} P_{n-k,i}\,, & \text{falls } k > 0, k \leq n; \end{cases}$$

- Geordnete Zahlpartitionen:
  - Wir nehmen nun an, dass die gesuchten k-Zahlpartitionen geordnet sein sollen, d.h.

    $$4 = 3+1 = 1+3 = 2+2$$

    lässt sich durch drei unterschiedliche 2-Partitionen darstellen.
  - Entspricht dem Problem: Wie viele Möglichkeiten gibt es, n Euro (nicht unterscheidbar) unter k Kinder (unterscheidbar) zu verteilen, wenn kein Kind leer ausgehen soll.

- Geordnete Zahlpartitionen:
  - Da jede Partition $n = x_1 + \cdots + x_k$ in der Form

$$n = \overbrace{\underbrace{1 + \cdots + 1}_{x_1} + \underbrace{1 + \cdots + 1}_{x_2} + \cdots + \underbrace{1 + \cdots + 1}_{x_k}}^{n}$$

    geschrieben werden kann, wird jede geordnete Zahlpartition eindeutig durch die „+" bestimmt, die die x_i trennen.
  - Die Anzahl der k-Partitionen ist damit gleich der Anzahl von Möglichkeiten, $k-1$ +-Zeichen aus den insgesamt $n-1$ +-Zeichen auszuwählen.

- Geordnete Zahlpartitionen:

  Satz: Die Anzahl der geordneten k-Partitionen von n ist gleich

$$\binom{n-1}{k-1}.$$

  Die Anzahl aller geordneten Partitionen von n ist gleich

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} = 2^{n-1}.$$