

WS 2016/17

Diskrete Strukturen

Kapitel 3: Kombinatorik (4)

Hans-Joachim Bungartz

Lehrstuhl für wissenschaftliches Rechnen

Fakultät für Informatik

Technische Universität München

[http://www5.in.tum.de/wiki/index.php/Diskrete Strukturen - Winter 16](http://www5.in.tum.de/wiki/index.php/Diskrete_Strukturen_-_Winter_16)

- Kombinatorische Strukturen und Algorithmen
 - Ziehen von Elementen aus einer Menge
 - Kombinatorische Beweisprinzipien
 - Fundamentale Zählkoeffizienten
 - **Bälle und Urnen**



- Die bisher betrachteten Zählprobleme sind Spezialfälle von Abzählproblemen der Gestalt:
„Bestimme die Anzahl der Möglichkeiten,
 n Bälle auf k Urnen zu verteilen“.
- Bei der Verteilung kommt es darauf an, ob die Bälle und Urnen als unterscheidbar angesehen werden.
- Zusätzlich können Forderungen an die maximale/minimale Menge von Bällen pro Urne gestellt werden:
 - Höchstens/mindestens/genau ein Ball pro Urne.
 - Äquivalent: Die Abbildung Bälle \rightarrow Urne ist injektiv, surjektiv, bijektiv.



- Unterscheidbar oder ununterscheidbar?
Wie viele Möglichkeiten gibt es
 - zehn Filme auf drei DVD-Disks zu verteilen?
 - zehn Fußball-WM Spiele auf vier Austragungsorte zu verteilen?
 - zehn Murmeln in fünf Päckchen aufzuteilen?
 - zehn Euro unter sechs Kinder zu verteilen?



$ B = n,$ $ U = m$	beliebig	injektiv	surjektiv	bijektiv
B untersch. U untersch.	m^n	$\begin{cases} m^n, m \geq n \\ 0, \text{sonst} \end{cases}$	$m! S_{n,m}$	$\begin{cases} n!, m = n \\ 0, \text{sonst} \end{cases}$
B gleich U untersch.	$\binom{m+n-1}{n}$	$\binom{m}{n}$	$\binom{n-1}{m-1}$	$\begin{cases} 1, m = n \\ 0, \text{sonst} \end{cases}$
B untersch. U gleich	$\sum_{k=1}^m S_{n,k}$	$\begin{cases} 1, m \geq n \\ 0, \text{sonst} \end{cases}$	$S_{n,m}$	$\begin{cases} 1, m = n \\ 0, \text{sonst} \end{cases}$
B gleich U gleich	$\sum_{k=1}^m P_{n,k}$	$\begin{cases} 1, m \geq n \\ 0, \text{sonst} \end{cases}$	$P_{n,m}$	$\begin{cases} 1, m = n \\ 0, \text{sonst} \end{cases}$



$ B = n,$ $ U = m$	beliebig	injektiv
B untersch. U untersch.	m^n	$\begin{cases} m^n, m \geq n \\ 0, \text{sonst} \end{cases}$

- **Beliebig:** Für jeden Ball kommen alle m Urnen in Frage. Die Produktregel ergibt m^n .
- **Injektiv:** Für den ersten Ball kommen m Urnen in Frage, für den zweiten $m - 1$ (Injektivität), für den dritten $m - 2$, etc. Die Produktregel ergibt $m(m - 1)(m - 2) \cdots (m - n + 1) = m^n$.



$ B = n,$ $ U = m$	surjektiv
B untersch. U untersch.	$m! S_{n,m}$

- Eine Verteilung kann in zwei Schritten erzeugt werden:
 - Berechne eine geordnete m -Partition von B .
 - Ordne jede Zahl der Partition einer Urne zu.

Es gibt $S_{n,m}$ Partitionen. Für jede Partition gibt es $m!$ Zuordnungen. Die Produktregel ergibt $m! S_{n,m}$.



$ B = n,$ $ U = m$	beliebig
B untersch. U gleich	$\sum_{k=1}^m S_{n,k}$

- Da die Bälle unterscheidbar sind, entspricht jede Zuordnung der Bälle auf k Urnen einer geordneten k -Partition der Bälle.



$ B = n,$ $ U = m$	beliebig
B gleich U gleich	$\sum_{k=1}^m P_{n,k}$

- Jede Belegung der Urnen wird **eindeutig** durch die **Anzahl der Bälle in den Urnen** bestimmt.
Die Anzahl der Möglichkeiten ist damit die Anzahl der ungeordneten Partitionen der Zahl n .



- **Anwendungsbeispiel:** Zufällige Speicherung von Dateien auf Servern.

n Dateien werden zufällig auf n Servern gespeichert. Wir suchen eine Zahl k , sodass mit großer Wahrscheinlichkeit kein Server mehr als k Dateien bekommt.

Modellierung: n unterscheidbare Bälle (Dateien) und n unterscheidbare Urnen (Server).

Gesamtzahl aller Möglichkeiten: n^n



- Wie viele Verteilungen gibt es, in denen mindestens eine Urne mindestens k Bälle enthält?

Die Anzahl der Möglichkeiten, in denen die i -te Urne mindestens k Bälle enthält, ist höchstens:

$$\binom{n}{k} n^{n-k}.$$

(Wir wählen k Bälle für die i -te Urne, die anderen werden beliebig verteilt.)



Sei M die Anzahl der Möglichkeiten, in denen mindestens eine Urne mindestens k Bälle enthält. Es gilt:

$$M \leq n \binom{n}{k} n^{n-k}$$

(einige Möglichkeiten werden mehrmals gezählt).

Mit der Abschätzung $\binom{n}{k} \leq \left(\frac{en}{k}\right)^k$ erhalten wir

$$M \leq n \left(\frac{en}{k}\right)^k n^{n-k} \leq \left(\frac{e}{k}\right)^k n^{n+1}.$$



- Die Wahrscheinlichkeit p_k , in mindestens einer Urne mindestens k Bälle zu finden, erfüllt

$$p_k = \frac{M}{n^n} \leq \left(\frac{e}{k}\right)^k n.$$

- Mit $k = e \ln n$ haben wir:

$$p_{e \ln n} \leq \left(\frac{1}{\ln n}\right)^{e \ln n} n = n^{1 - e \ln(\ln n)}.$$



- Tabelle für p_k :

n	100	1000	10^4	10^5	10^6
$k = 7$	13.0%				
$k = 8$	1.8%	18%			
$k = 9$	0.2%	2%	21%		
$k = 10$	0.02%	0.2%	2%	22%	
$k = 11$	0.002%	0.02%	0.2%	2%	21%
$k = 12$	0.0002%	0.002%	0.02%	0.2%	2%



- Zusammenfassung Kombinatorik:
 - Ziehen von Elementen aus Mengen:
mit/ohne Zurücklegen, mit/ohne Berücksichtigung der Reihenfolge der gezogenen Elemente.
 - Kombinatorische Beweisprinzipien:
Summenregel, Produktregel, Gleichheitsregel, doppeltes Abzählen, Inklusion/Exklusion, Schubfachprinzip.
 - Zählkoeffizienten:
Binomialkoeffizienten, Pascalsche Identität, Vandermonde-Identität, k -Partitionen u. Permutationen (Stirlingzahlen).
 - Bälle und Urnen:
Anwendung der Zählprinzipien.

