WS 2016/17

Diskrete Strukturen

Kapitel 4: Graphentheorie (Grundlagen)

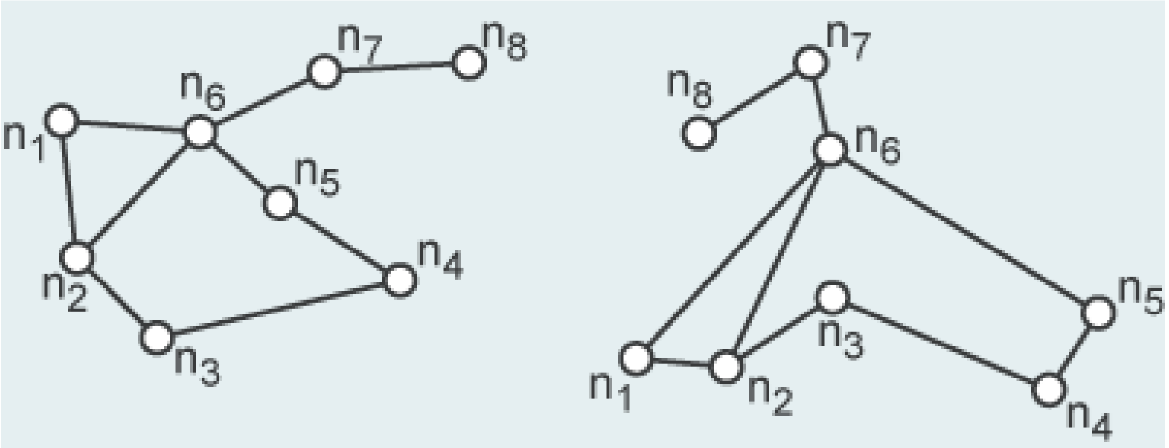
Hans-Joachim Bungartz

Lehrstuhl für wissenschaftliches Rechnen
Fakultät für Informatik
Technische Universität München

http://www5.in.tum.de/wiki/index.php/Diskrete_Strukturen_-_Winter_16

- Graphentheorie
  - Grundlagen
  - Bäume
  - Euler- und Hamiltonkreise
  - Planarität und Färbungen
  - Matchings

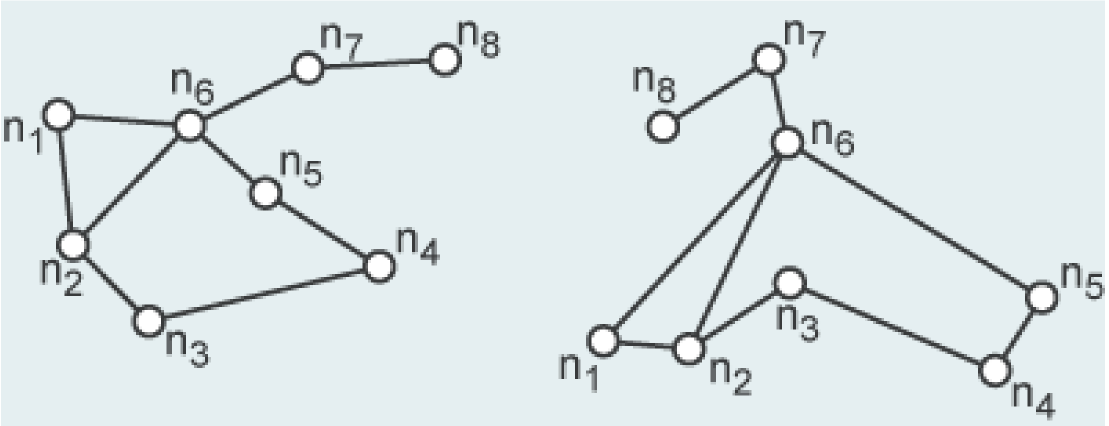
- Was sind Graphen?
  - Graphen sind Diagramme, in denen Knoten (Punkte) durch Kanten (Linien) verbunden werden.



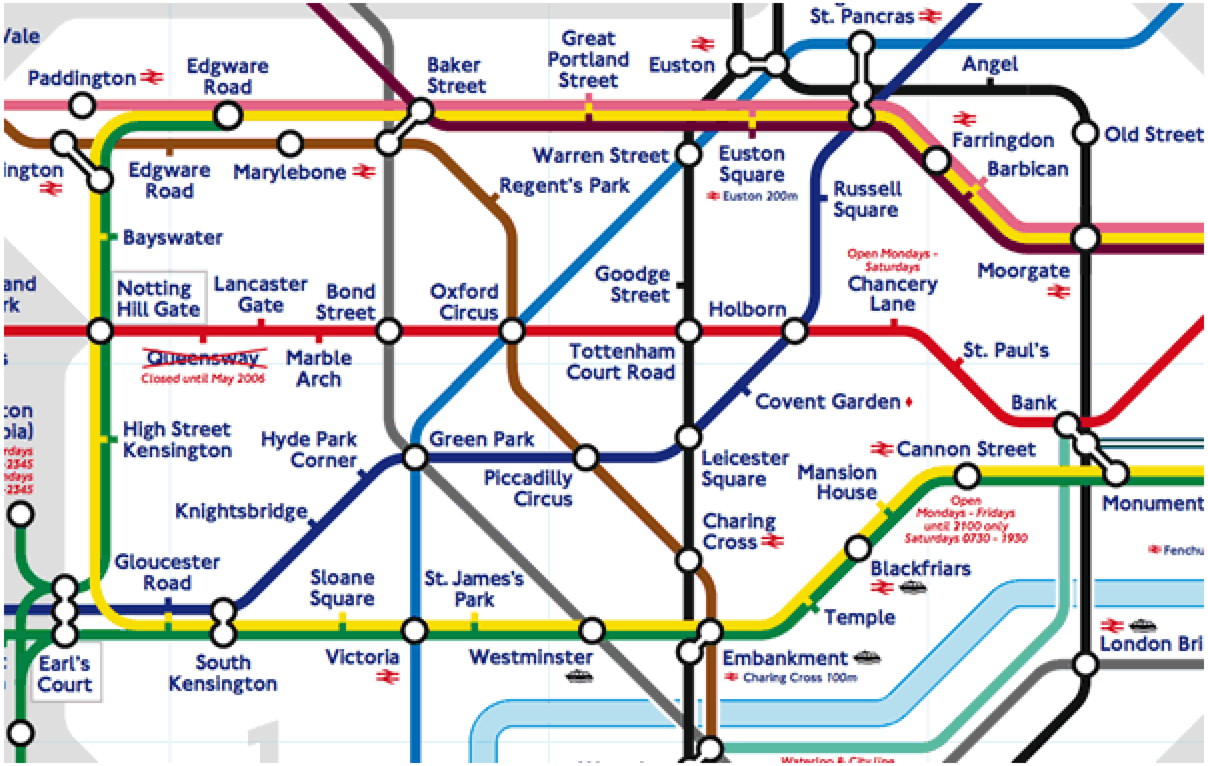
  - Hilfreich zur Darstellung von Relationen.

- Anwendung von Graphen:
  - Viele reale Probleme lassen sich durch Graphen darstellen und somit auf graphentheoretische Fragestellungen zurückführen:
    - Verkehrswege zwischen Städten – kürzeste Wege,
    - Transportwege mit Kapazitäten – maximale Flüsse,
    - Zugmöglichkeiten in Spielen – Gewinnstrategien.

- Anwendung von Graphen:
  - In der Graphentheorie interessieren uns ausschließlich die Nachbarschaftsbeziehungen zwischen den Knoten (deren Topologie), nicht deren Positionen im Raum, oder die Längen von Kanten.
  - Zwei topologisch äquivalente Graphen:



- U-Bahn Karte: Nachbarschaftsbeziehungen zwischen Stationen, Entfernungen verzerrt:



- Anwendung von Graphen:
  - In der Graphentheorie interessiert uns:
    - Welcher Knoten ist mit welchen anderen verbunden?
    - Komme ich über gegebene Verbindungen von einem Knoten zu einem anderen?
    - Wie viele Verbindungen muss ich überqueren, um von einem Knoten zu einem anderen zu kommen?
    - Gibt es einen Weg, der alle Knoten/Kanten genau einmal besucht?

- (Ungerichtete) Graphen:

  Definition: Ein (ungerichteter) Graph ist ein Paar $G = (V, E)$, wobei
  - V eine Menge von Knoten oder Ecken und
  - E eine Menge von 2-elementigen Untermengen aus V, genannt Kanten,

  sind.

  Englische Bezeichnungen:

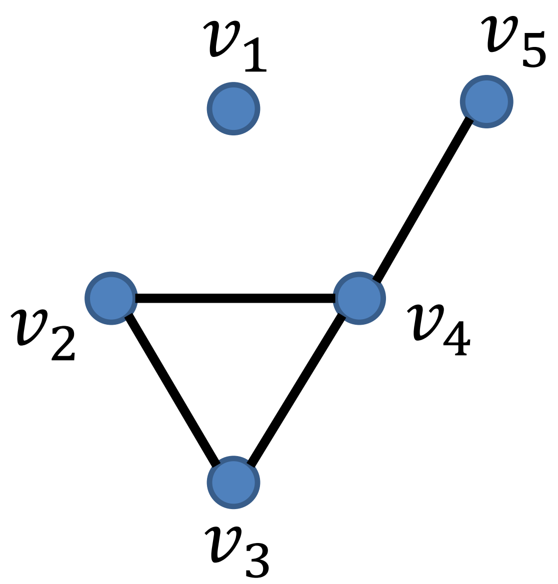
  Knoten → vertex (vertices), Kante → edge.

  Definition: Ein (ungerichteter) Graph heißt markiert, falls seine Knoten Markierungen (z.B. $1, \ldots, |V|$) haben.

- (Ungerichtete) Graphen:

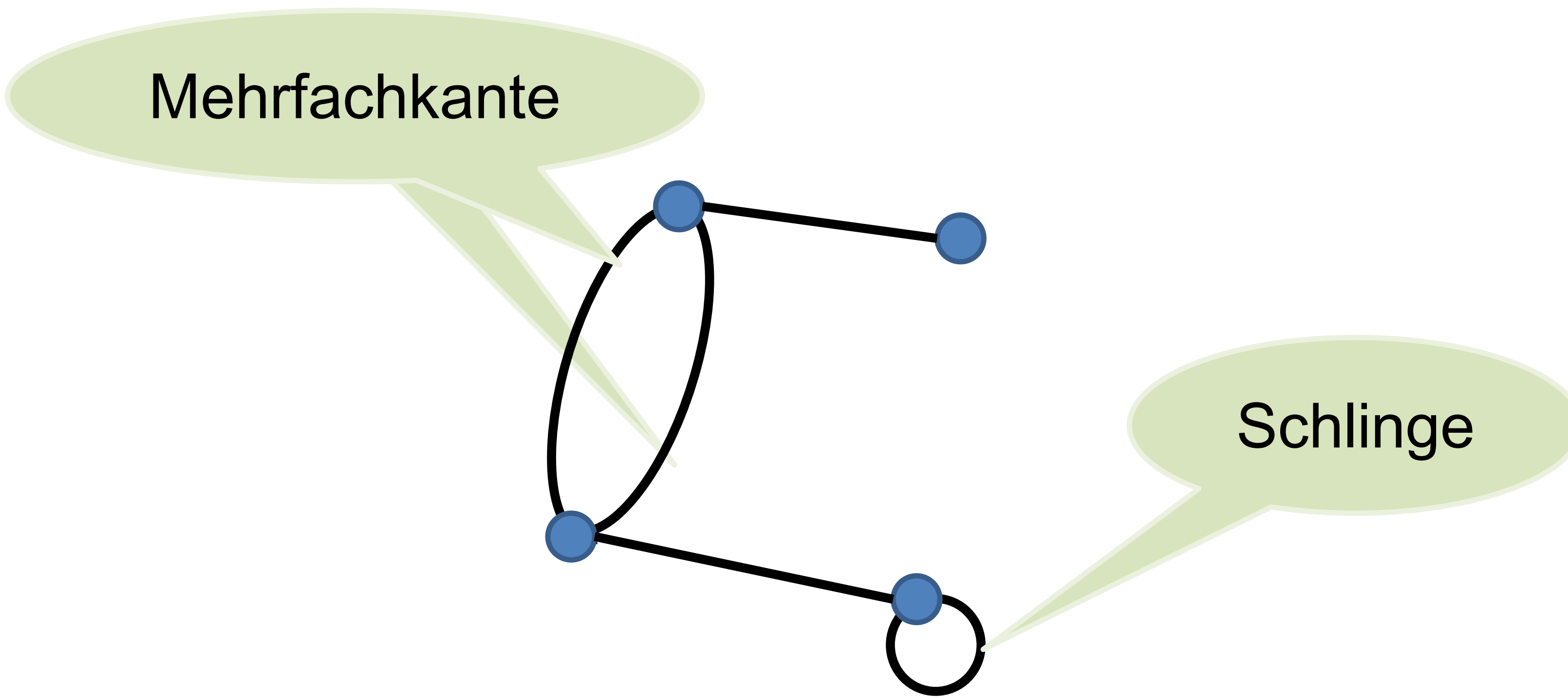
$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$$

$$E = \{ \{v_2, v_3\}, \{v_2, v_4\}, \{v_3, v_4\}, \{v_4, v_5\} \}$$



- Mehrfachkanten und Schlingen:

  Nach dieser Definition dürfen Graphen weder Mehrfachkanten noch Schlingen haben.



- Mehrfachkanten und Schlingen:

  Definition: Ein verallgemeinerter (ungerichteter) Graph ist ein Paar $G = (V, E)$, wobei

  – V eine Menge von Knoten und

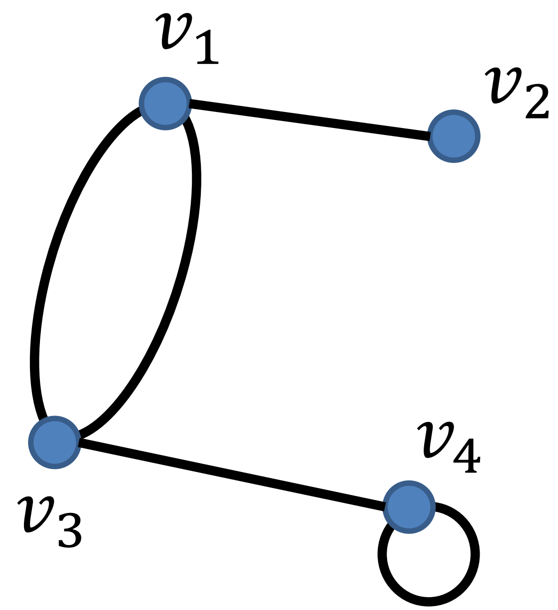
  – E eine Multimenge von 2-elementigen Multimengen aus V

  sind.

- (Ungerichtete) Graphen:

$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$$

$$E = \{ \{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_1, v_3\}, \{v_3, v_4\}, \{v_4, v_4\} \}$$

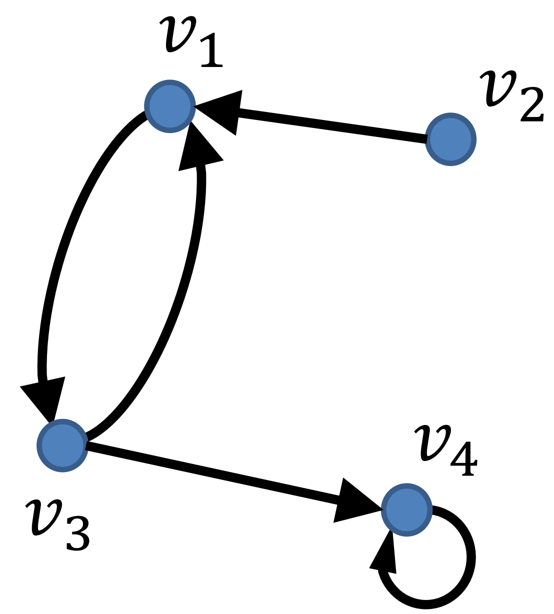


- Gerichtete Graphen:

  Definition: Ein gerichteter Graph ist ein Paar $G = (V, E)$, wobei $E \subseteq V \times V$.

$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$$

$$\begin{aligned} E = \{ & (v_2, v_1), \\ & (v_1, v_3), (v_3, v_1), \\ & (v_3, v_4) \\ & (v_4, v_4) \ \} \end{aligned}$$



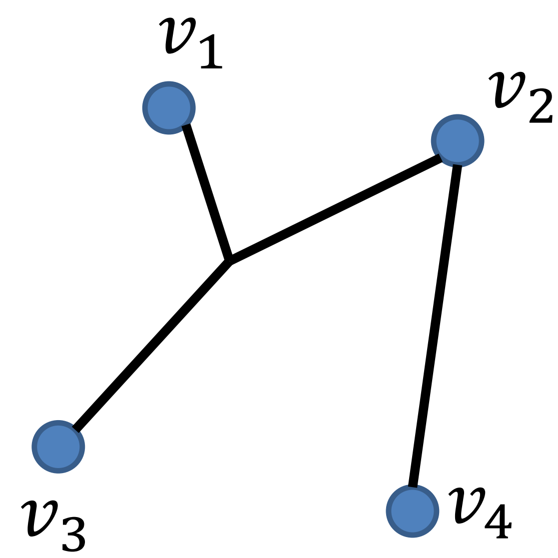
- Hypergraphen:

  Definition: Ein Hypergraph ist ein Paar $G = (V, E)$, wobei $E \subseteq 2^V$.

  Die Elementen von E werden Hyperkanten genannt.

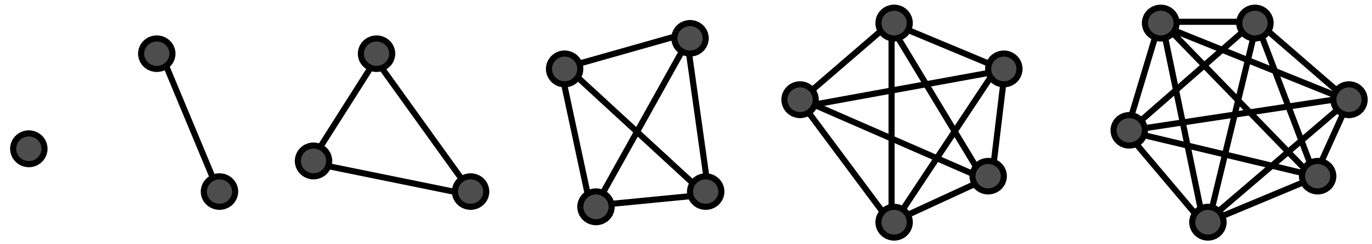
$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\},$$

$$E = \{\ \{v_1, v_2, v_3\},\ \{v_2, v_4\}\ \}.$$



Ungerichtete Graphen

- Vollständige Graphen:
  - In vollständigen Graphen K_n sind alle n Knoten miteinander verbunden.

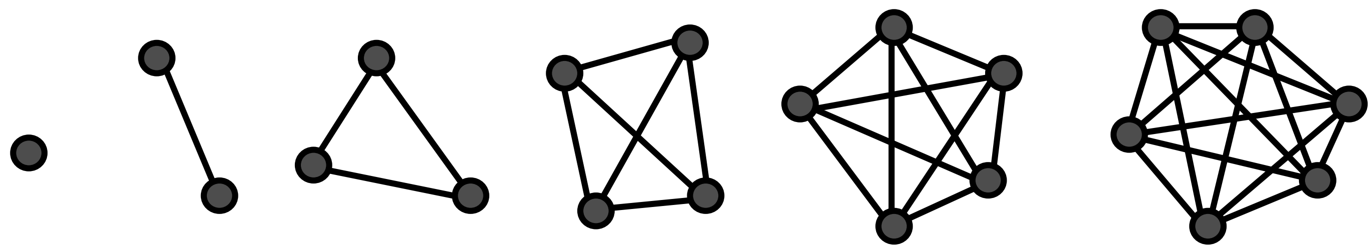


K_1 K_2 K_3 K_4 K_5 K_6

  - Frage:

    Wie viele Kanten gibt es in einem vollständigen Graphen mit n Knoten?

- Vollständige Graphen:
  - In vollständigen Graphen K_n sind alle n Knoten miteinander verbunden.

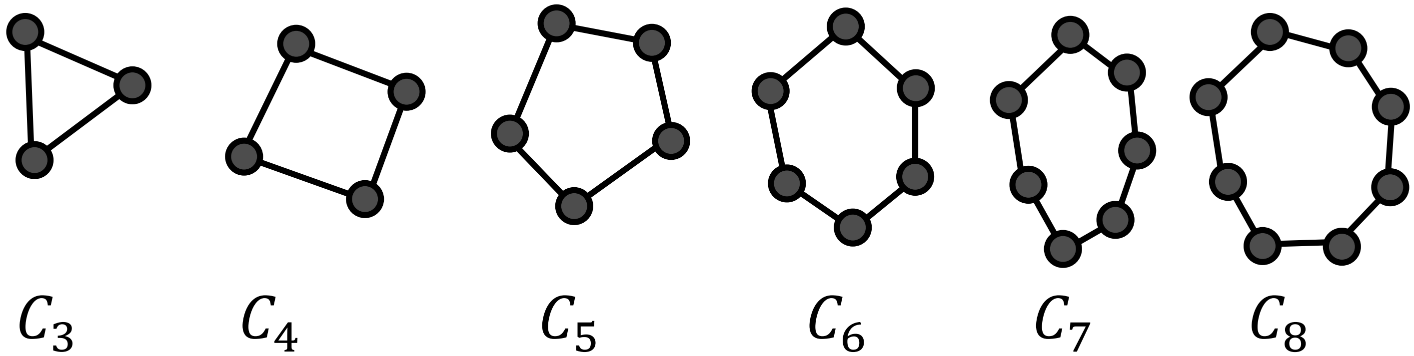


K_1 K_2 K_3 K_4 K_5 K_6

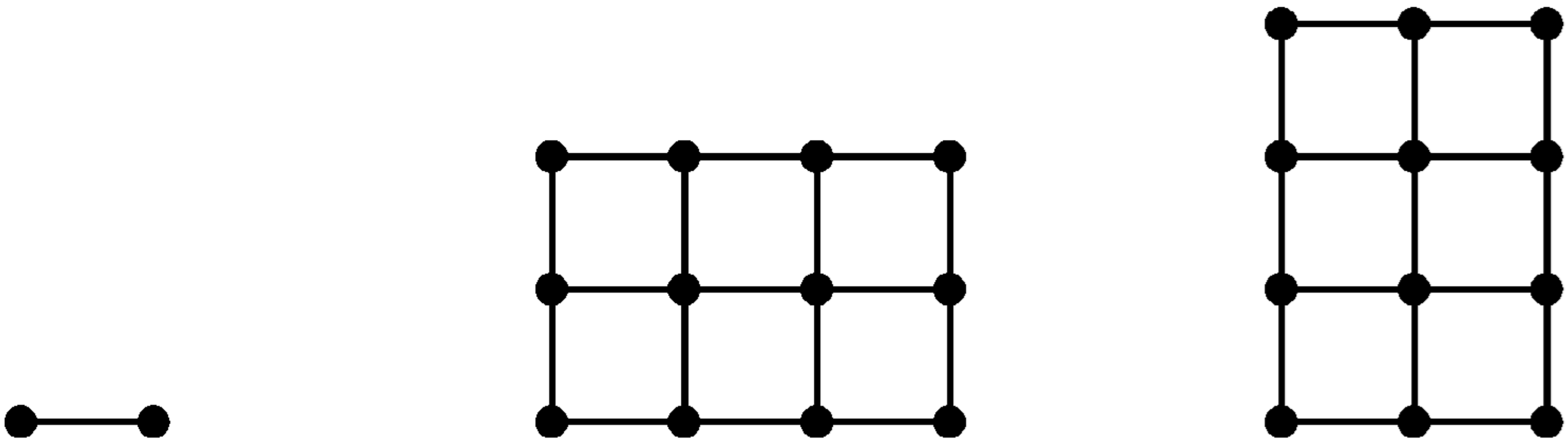
  - Antwort:

$$|E| = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

- Kreise:
  - In Kreisen C_n sind alle n ($n \geq 3$) Knoten zyklisch miteinander verbunden.



- Gittergraphen:
  - Im Gittergraph $M_{n,m}$ bilden die Knoten und Kanten ein rechteckiges $n \times m$ Gitter.



$M_{1,2}$ $M_{3,4}$ $M_{4,3}$

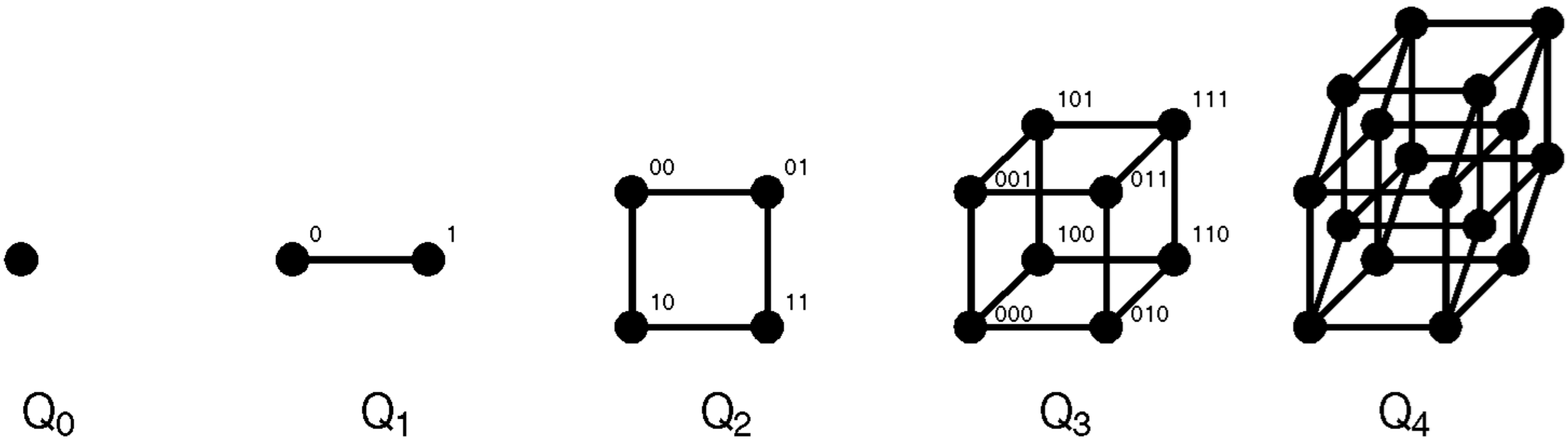
- (Binärer) Hyperwürfel:

  Definition: Ein Graph $G = (V, E)$ heißt d-dimensionaler binärer Hyperwürfel (Q_d), falls $V = \{0,1\}^d$ und $\{v, w\} \in E$ gdw. der Hamming-Abstand zwischen v und w gleich 1 ist.

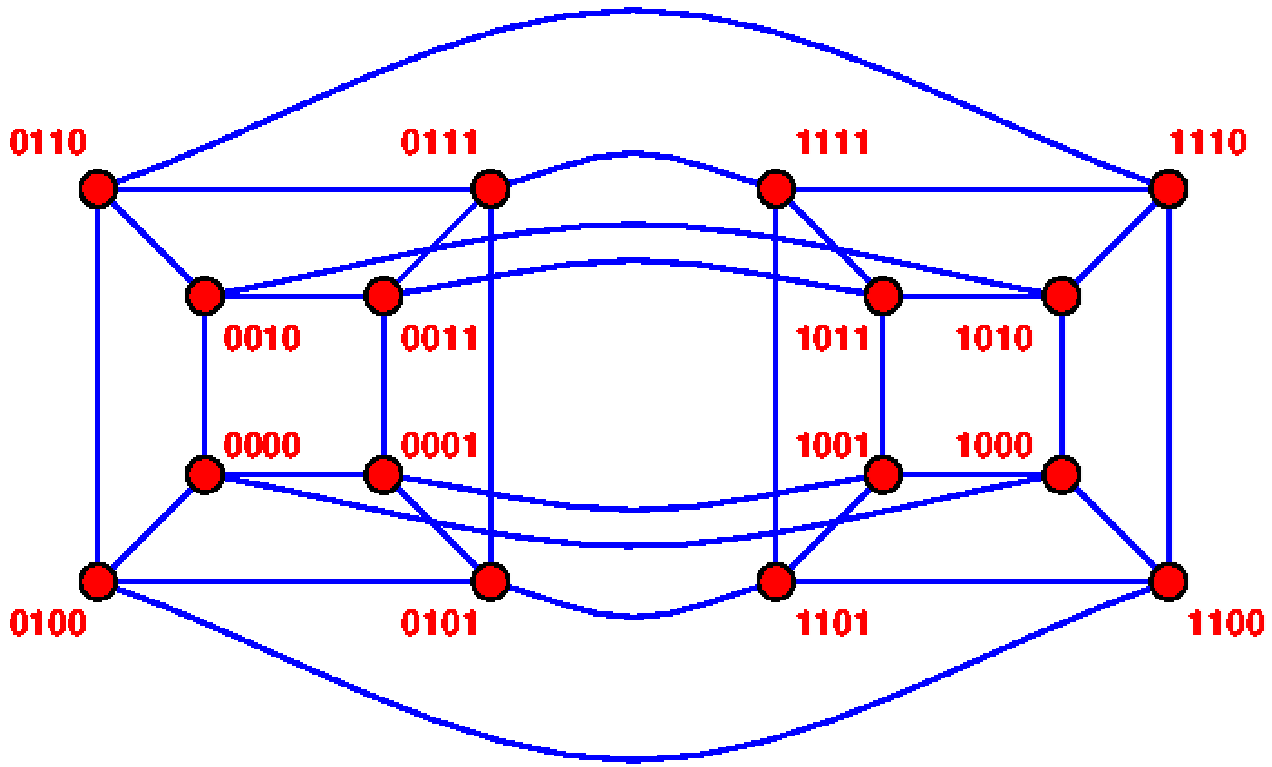
  – Der Hamming-Abstand zwischen zwei Zeichenketten mit fester Länge ist die Anzahl der unterschiedlichen Stellen.

  – Beispiel: Der Hamming-Abstand zwischen 0010 und 1000 beträgt 2.

- (Binäre) Hyperwürfel:



- Q_4: 4-dimensionaler Hyperwürfel:



- Hyperwürfel:

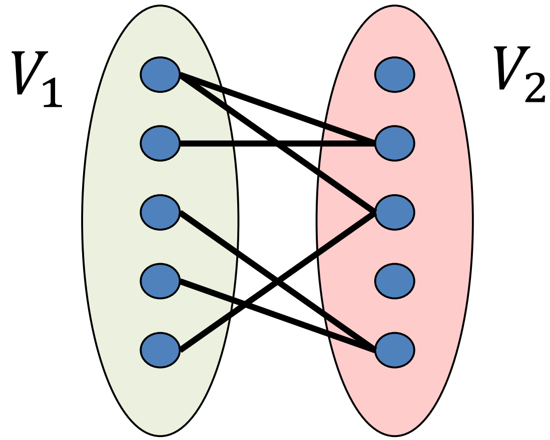
  Fakt: Der d-dimensionale Hyperwürfel Q_d hat 2^d Knoten und $\mathrm{d} \cdot 2^{d-1}$ Kanten.

  Anzahl der Kanten:

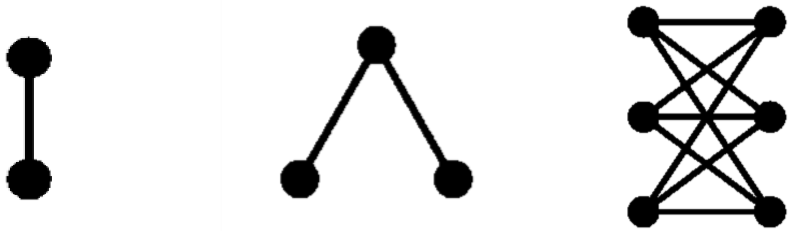
  - Es gibt $n = 2^d$ Knoten.
  - Jeder Knoten ist Endknoten von d Kanten.
  - Das Produkt $\mathrm{d} \cdot 2^d$ zählt jede Kante zweimal.

- Bipartite Graphen:

  Definition: Ein Graph $G = (V, E)$ heißt bipartit, wenn es eine Partitionierung V_1, V_2 von V gibt ($V = V_1 \cup V_2$, $V_1, V_2 \neq \emptyset$ und $V_1 \cap V_2 = \emptyset$), sodass für alle $\{v_1, v_2\} \in E$ gilt: $v_1 \in V_1$ und $v_2 \in V_2$ oder $v_1 \in V_2$ und $v_2 \in V_1$.



- Bipartite Graphen:
  - Bipartite Graphen werden auch in der Form $G = (V_1, V_2, E)$ geschrieben.
  - Ein bipartiter Graph $G = (V_1, V_2, E)$ heißt vollständig, falls $E = \{ \{u, v\} \mid u \in V_1 \land v \in V_2\}$.
  - Notation: $K_{m,n}$ mit $m = |V_1|, n = |V_2|$.

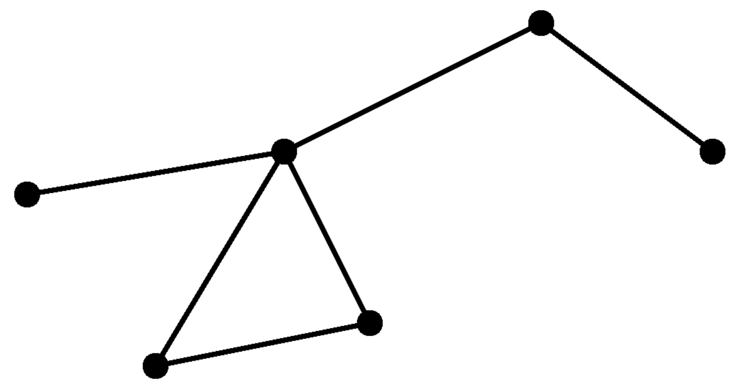


$K_{1,1}$ $K_{1,2}$ $K_{3,3}$

- Wege, Pfade, Kreise:
  - Ein Weg der Länge k in einem Graphen $G = (V, E)$ ist eine nichtleere Folge $(v_0, \dots, v_k)$ von Knoten aus V, sodass $\{v_i, v_{i+1}\} \in E$ für alle $i = 0, \dots, k-1$.
    (Beachte: (v_0) ist ein Weg der Länge 0.)
  - Ein (einfacher) Pfad in G ist ein Weg in G, in dem alle Knoten paarweise verschieden sind.
  - Ein (einfacher) Kreis der Länge k $(k \geq 3)$ in G ist ein Weg $(v_0, \dots, v_k)$, in dem $v_0, \dots, v_{k-1}$ paarweise verschieden sind und $v_0 = v_k$.

- Wege, Pfade, Kreise:

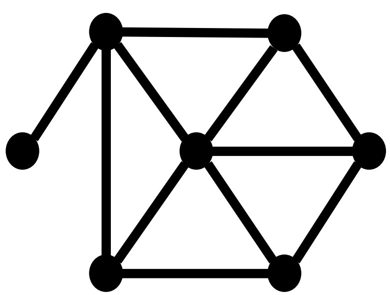
  Beispiel: Graph mit einem Weg der Länge 6, der aber kein Pfad ist.



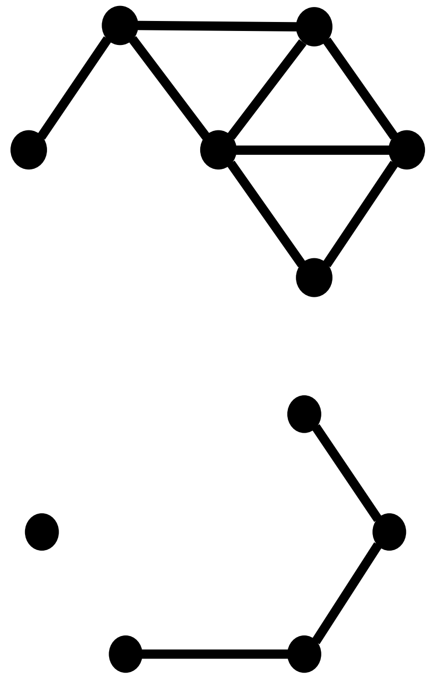
- (Induzierte) Teilgraphen:
  - Ein Graph $H = (V_H, E_H)$ heißt Teilgraph eines Graphen $G = (V_G, E_G)$, falls $V_H \subseteq V_G$, $E_H \subseteq E_G$.
  - Gilt $E_H = E_G \cap \{ \{u, v\} \mid u \in V_H \land v \in V_H \}$, so nennt man H einen induzierten Teilgraphen von G und schreibt $H = G[V_H]$.

    Konstruktion von induzierten Teilgraphen: Entferne Knoten zusammen mit allen dazugehörigen Kanten.

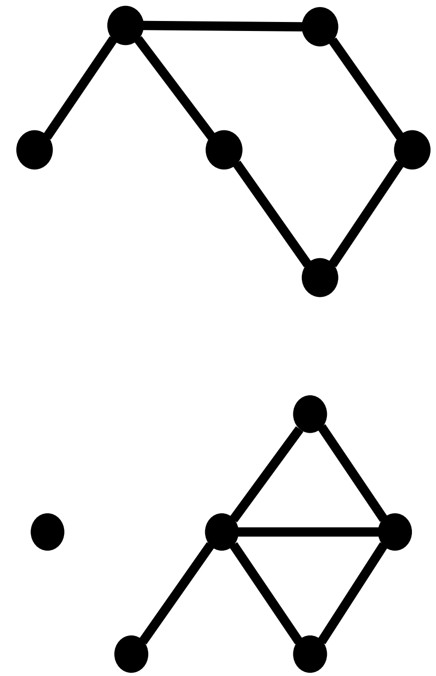
- (Induzierte) Teilgraphen:



Ind. Teilgraphen



Nur Teilgraphen



- Nachbarschaft und Grad:

  Sei $G = (V, E)$ ein Graph und sei $v \in V$.

  – Die Nachbarschaft $\Gamma(v)$ von v ist die Menge der Knoten $u \in V$ mit $\{v, u\} \in E$.

  – Der Grad $\deg(v)$ von v bezeichnet die Anzahl von Nachbarn von v, d.h. $\deg(v) = |\Gamma(v)|$.

  – Wenn alle Knoten von G denselben Grad k haben, dann ist G k-regulär.

- Nachbarschaft und Grad:

  Satz (Handshaking Theorem): Für jeden Graphen $G = (V, E)$ gilt:

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|\,.$$

  Beweis: Auf der linken Seite der Gleichung wird jede Kante genau zweimal gezählt, nämlich für die beiden Endknoten der Kante. Auf der rechten Seite wird jede Kante auch zweimal gezählt.

- Nachbarschaft und Grad:

  Korollar: Für jeden Graphen $G = (V, E)$ ist die Anzahl der Knoten mit ungeradem Grad gerade.

  Beweis: Sonst wäre $\sum_{v \in V} \deg(v)$ ungerade und damit $\sum_{v \in V} \deg(v) \neq 2|E|$, im Widerspruch zum vorigen Satz.

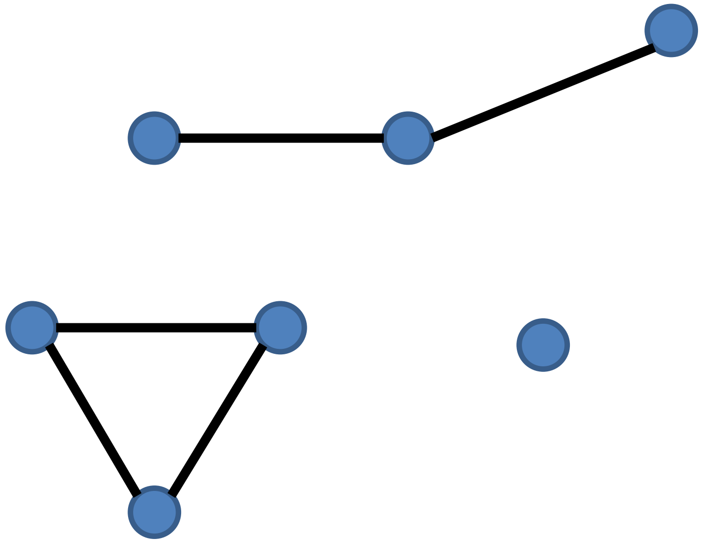
- Adjazenz und Inzidenz:
  - Sei $G = (V, E)$. Wenn $e = \{u, v\} \in E$, dann sagen wir:
    - u und v sind adjazent.
    - u und v sind die Endknoten von e.
    - e ist inzident zu u (und zu v).

- Erreichbarkeit und Zusammenhang:
  - Sei $G = (V, E)$. Ein Knoten $u \in V$ ist erreichbar von $v \in V$, falls G einen Pfad $(u, \dots, v)$ hat.
  - Die Erreichbarkeitsrelation $R_G \subseteq V \times V$ ist definiert durch: $(u, v) \in R$ gdw. v ist erreichbar von u.
  - Erreichbarkeit ist eine Äquivalenzrelation auf V.
  - Bemerkung: Wenn E als symmetrische Relation aufgefasst wird, dann gilt $R_G = E^*$.

- Erreichbarkeit und Zusammenhang:
  - Die von den Äquivalenzklassen induzierten Teilgraphen heißen die (Zusammenhangs-)Komponenten von G.
  - G heißt zusammenhängend, wenn er nur eine Komponente hat (jeder Knoten ist von jedem anderen Knoten erreichbar).

- Erreichbarkeit und Zusammenhang:

Beispiel: Dieser Graph besteht aus drei Zusammenhangskomponenten:



- Zusammenhangskomponenten:

  Satz: Jeder Graph $G = (V, E)$ enthält mindestens $|V| - |E|$ viele Zusammenhangskomponenten.

  Beweis: Durch Induktion über $|E|$.

  Basis: $|E| = 0$. Dann gibt es $|V| = |V| - |E|$ Komponenten.

  Schritt: $|E| > 0$. Man nehme eine Kante e weg. Der resultierende Graph hat mindestens $|V| - (|E| - 1)$ Komponenten (Ind.Vor.). Füge nun e erneut hinzu. Das reduziert die Anzahl der Komponenten um höchstens eins. G hat also mindestens

  $|V| - (|E| - 1) - 1 = |V| - |E|$ Komponenten. □

- Zusammenhangskomponenten:

  Korollar: Für jeden zusammenhängenden Graph $G = (V, E)$ gilt: $|E| \geq |V| - 1$.

  Beweis: Da ein zusammenhängender Graph aus genau einer Komponente besteht, folgt aus dem vorherigen Satz, dass $|V| - |E| \leq 1$. $\square$

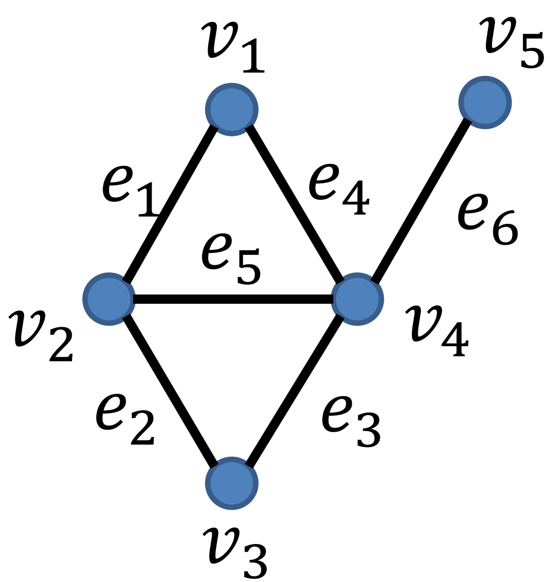
- Adjazenz- und Inzidenzmatrix:
  - Neben den bisherigen Darstellungen können Graphen in Form von Adjazenzmatrizen und Inzidenzmatrizen dargestellt werden.
  - Bei Nummerierung der Knoten $V = \{u_1, \dots, u_n\}$ ist die Adjazenzmatrix von $G = (V, E)$ die symmetrische $n \times n$-Matrix A mit Einträgen

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{falls } \{u_i, u_j\} \in E; \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

- Adjazenz- und Inzidenzmatrix:
  - Bei Nummerierung der Knoten $\mathrm{V} = \{u_1, \dots, u_n\}$ und Kanten $E = \{e_1, \dots, e_m\}$ ist die Inzidenzmatrix von $G = (V, E)$ die $n \times m$-Matrix B mit Einträgen

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{falls } u_i \text{ Endknoten von } e_j; \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

- Adjazenz- und Inzidenzmatrix:



$$A = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$B = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

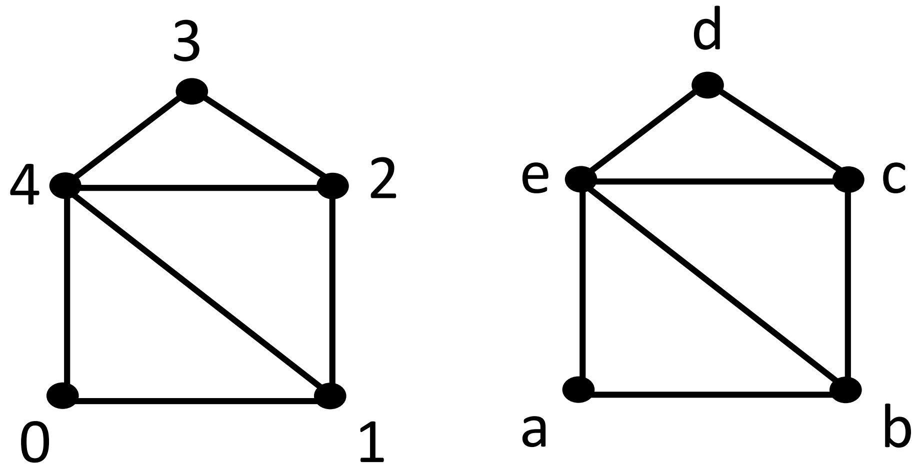
- Isomorphe (strukturgleiche) Graphen:

  Zwei Graphen $G = (V, E)$ und $G' = (V', E')$ heißen isomorph (in Zeichen $G \cong G'$), falls es eine Bijektion $h: V \to V'$ gibt mit der Eigenschaft:

  $$\forall u, v \in V: \{u, v\} \in E \leftrightarrow \{h(u), h(v)\} \in E'.$$

  Die Abbildung h ist dann ein Homomorphismus (technische Bezeichnung einer Umbenennung) der Knotenmenge V.

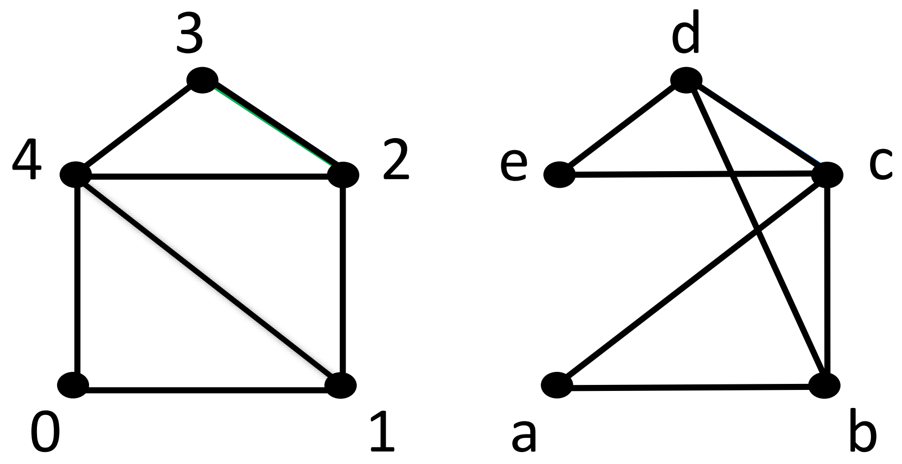
- Isomorphe (strukturgleiche) Graphen:



Die Abbildung ist: 0 1 2 3 4
a b c d e

Die Graphen sind offensichtlich isomorph.

- Isomorphe (strukturgleiche) Graphen:

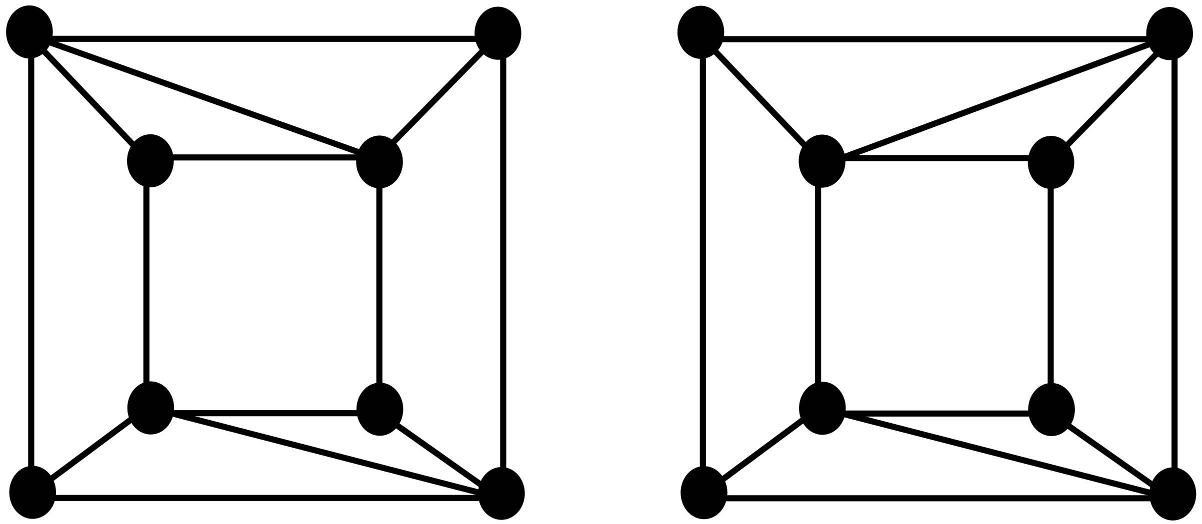


Die Abbildung 0 1 2 3 4
e d b a c

zeigt, dass auch diese zwei Graphen isomorph sind!

- Isomorphe Graphen:

  Sind die beiden folgenden Graphen isomorph?



- Isomorphe Graphen:
  - Das Graphenisomorphieproblem:
    - Gegeben: Zwei Graphen G_1, G_2 (dargestellt als Mengen von Knoten und Kanten).
    - Entscheide, ob G_1 und G_2 isomorph sind.
  - Berühmtes Problem. Liegt in der Klasse NP. Kein polynomieller Algorithmus bekannt. Auch unbekannt, ob das Problem NP-vollständig ist.

Praktische Anwendungen in der Informatik:

- Graphen zur Darstellung von Computernetzen, Web,…
- Beschreibung von Datenabhängigkeiten („dependency graph“)
- Viele Probleme der Logistik (z.B. Platzierung von DHL-Knoten, Drehkreuze im Flugverkehr) durch Graphen beschreibbar
- Kürzeste-Wege-Probleme, Routenplanung