WS 2016/17

Diskrete Strukturen

Kapitel 4: Graphentheorie (Bäume)

Hans-Joachim Bungartz

Lehrstuhl für wissenschaftliches Rechnen
Fakultät für Informatik
Technische Universität München

http://www5.in.tum.de/wiki/index.php/Diskrete_Strukturen_-_Winter_16

- Graphentheorie
  - Grundlagen
  - Bäume
  - Euler- und Hamiltonkreise
  - Planarität und Färbungen
  - Matchings

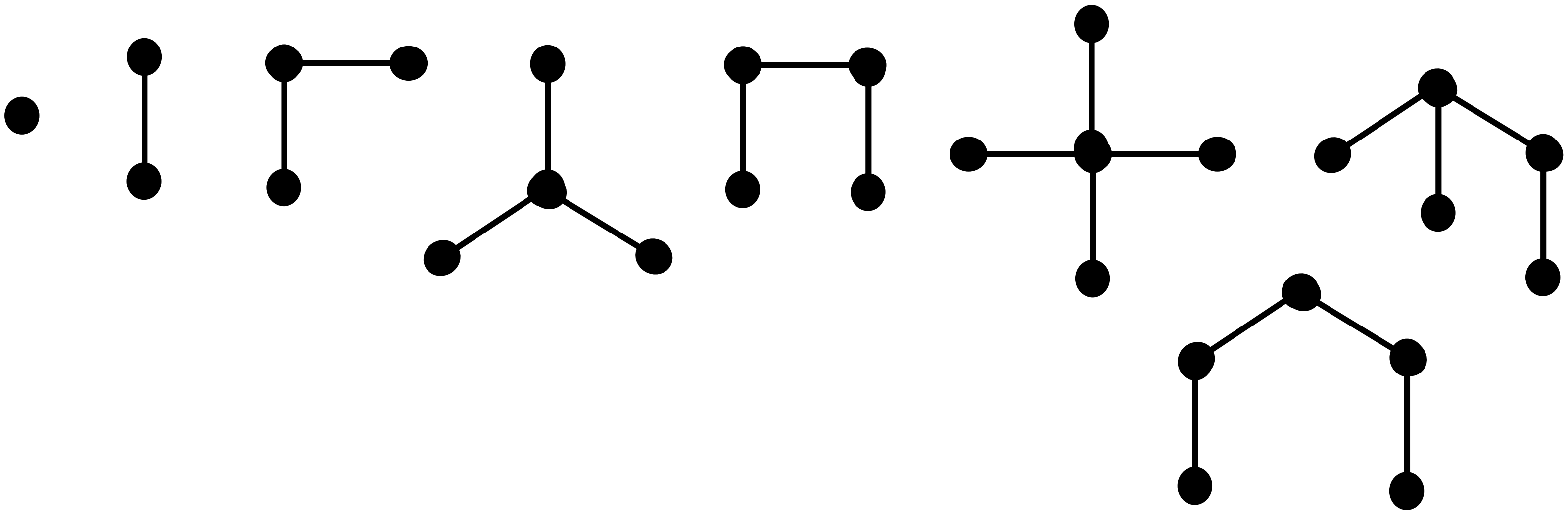
- Bäume:

  Definition: Ein ungerichteter Graph G heißt Baum, falls G zusammenhängend und kreisfrei ist.

  Die Knoten von G mit Grad 1 heißen Blätter (leaves).

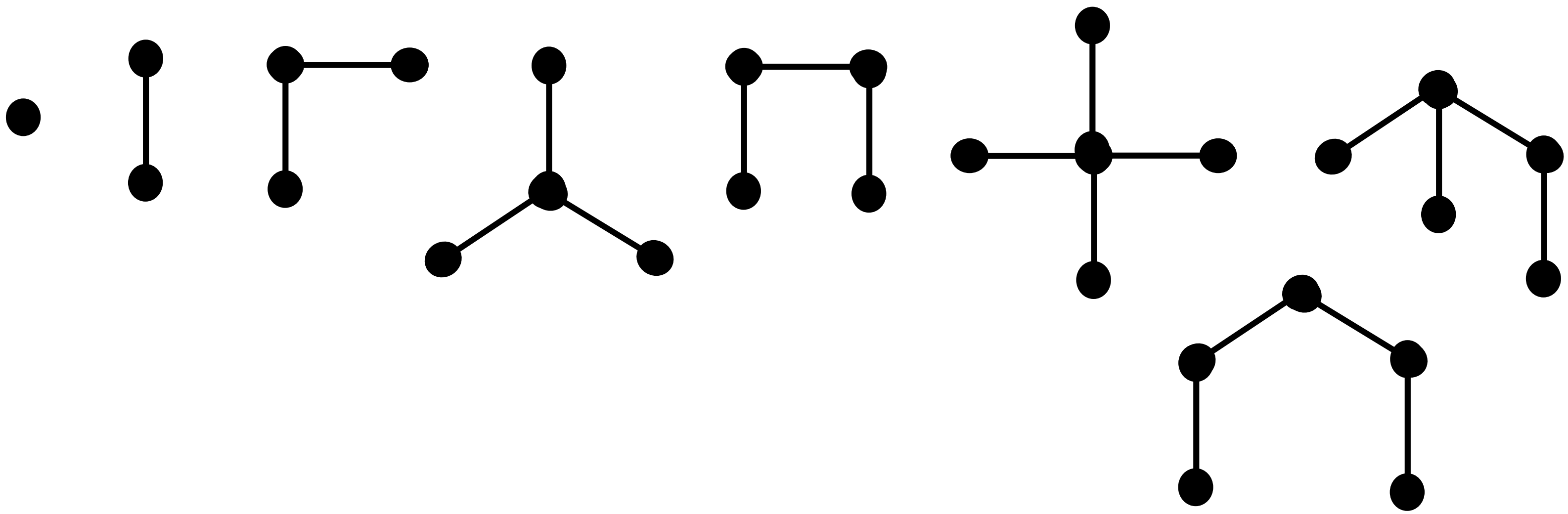
  Alle anderen Knoten heißen innere Knoten.

- Bäume mit höchstens 5 Knoten (bis auf Isomorphie):



- Wälder:

  Definition: Ein Graph, dessen (Zusammenhangs-) Komponenten jeweils Bäume sind, heißt Wald.



- Eigenschaften von Bäumen:

  Satz: Jeder Baum $T = (V, E)$ mit $|V| \geq 2$ enthält mindestens zwei Blätter.

  Beweis (informell): Man nehme eine beliebige Kante und laufe nach „links“ und „rechts“ so weit wie möglich. Da man nicht in einen Kreis geraten kann endet man irgendwann in zwei verschiedenen Blättern. □

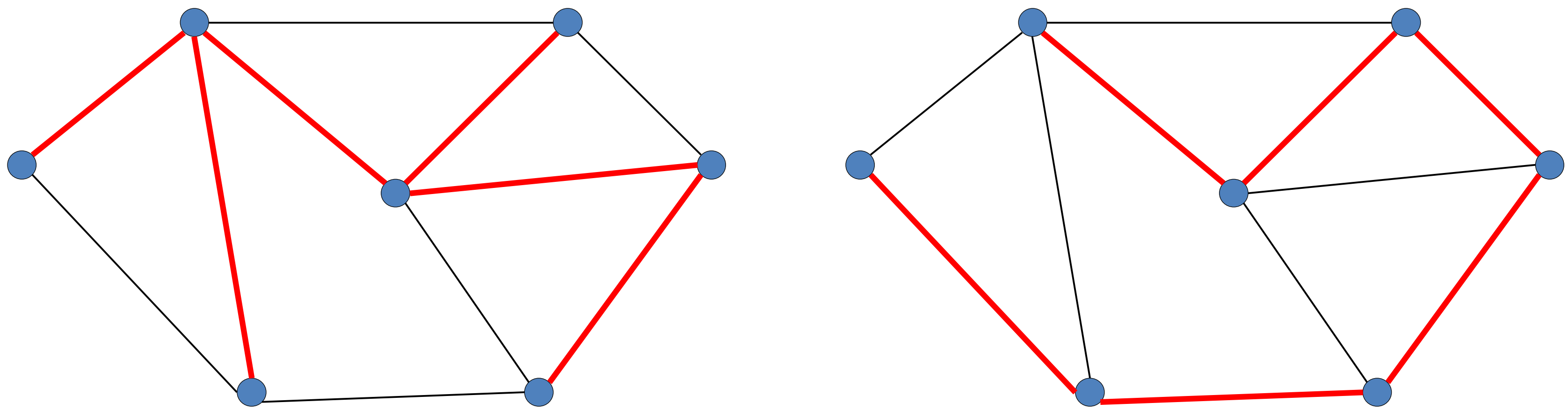
- Eigenschaften von Bäumen:

  Satz: Ist $T = (V, E)$ ein Baum mit $|V| \geq 2$ Knoten und $v \in V$ ein Blatt, so ist der Graph $T[V \setminus \{v\}]$ ebenfalls ein Baum.

  Beweis: Durch Wegnahme eines Blattes bleibt der Baum kreisfrei. Da Pfade zwischen beliebigen Knoten u und w mit $u \neq v \neq w$ erhalten bleiben, ist $T[V \setminus \{v\}]$ auch zusammenhängend. $\square$

- Eigenschaften von Bäumen:

  Definition: Ein Teilgraph $T = (V', E')$ von $G = (V, E)$ heißt Spannbaum von G, falls T ein Baum ist und $V' = V$.



- Eigenschaften von Bäumen:

  Satz: Jeder zusammenhängende Graph $G = (V, E)$ enthält mindestens einen Spannbaum.

  Beweis: Durch Induktion über $|E|$.

  Basis: $|E| = 0$. Dann ist G ein Baum und auch ein Spannbaum.

- Eigenschaften von Bäumen:

  Schritt: $|E| \geq 1$. Wir betrachten zwei Fälle.

  Fall 1: G ist ein Baum. Dann ist G auch Spannbaum.

  Fall 2: G ist kein Baum. Dann enthält G einen Kreis. Entferne eine beliebige Kante des Kreises. Das Ergebnis G' ist noch zusammenhängend und enthält einen Spannbaum T (Induktionsannahme). T ist auch Spannbaum von G. □

- Eigenschaften von Bäumen:

  Satz: Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

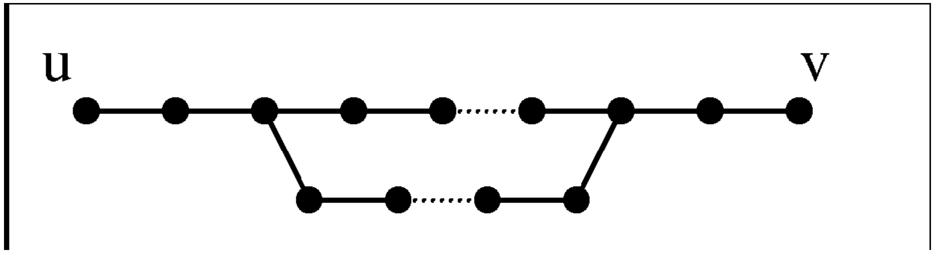
  (1) $G = (V, E)$ ist ein Baum.

  (2) Je zwei Knoten $u, v \in V$ sind durch genau einen Pfad verbunden.

  (3) G ist zusammenhängend und $|V| = |E| + 1$.

- Eigenschaften von Bäumen:

  (1) ⇔ (2): G hat keinen Kreis gdw. keine zwei Knoten durch zwei verschiedene Pfade verbunden sind.



  G ist zusammenhängend gdw. je zwei Knoten durch mindestens einen Pfad verbunden sind.

- Eigenschaften von Bäumen:

  (1) $\Rightarrow$ (3): Sei $G = (V, E)$ ein Baum. Wir zeigen $|V| = |E| + 1$ durch Induktion über $|V|$:

  Basis: $|V| = 1$. Dann ist $|E| = 0$ und wir sind fertig.

  Schritt: $|V| \geq 2$. Sei u ein Blatt von G (G hat mindestens zwei Blätter).

  Entferne u sowie die Kante, die u mit dem Rest von G verbindet. Sei $G' = (V', E')$ der resultierende Baum.

  Mit $|V'| < |V|$ gilt $|V'| = |E'| + 1$ (Ind.Vor.). Mit $|V| = |V'| + 1$ und $|E| = |E'| + 1$ gilt $|V| = |E| + 1$.

- Eigenschaften von Bäumen:

  (3) $\Rightarrow$ (1): Sei $G = (V, E)$ zusammenhängend mit $|V| = |E| + 1$.

  G enthält einen Spannbaum $T = (V, E')$.

  Nach dem eben Bewiesenen gilt $|V| = |E'| + 1$.

  Aus $|V| = |E| + 1$ und $|V| = |E'| + 1$ folgt $|E| = |E'|$.

  Da E' eine Teilmenge von E ist, gilt $E = E'$.

  Es folgt $G = T$. $\square$

- Eigenschaften von Bäumen:

  Korollar: Sei $T = (V, E)$ ein Baum mit $|V| = n$ und für alle i ∈ $[n]$ sei $d_i = \deg(v_i)$ der Grad des Knotens $v_i \in V$. Dann gilt:

$$\sum_{i=1}^{n} d_i = 2|E| = 2|V| - 2 = 2n - 2.$$

- Mehr zu Spannbäumen:

  Satz: Die Anzahl aufspannender Bäume des vollständigen Graphen mit $V = \{1, \ldots, n\}$ beträgt

$$t(n) = n^{n-2}.$$

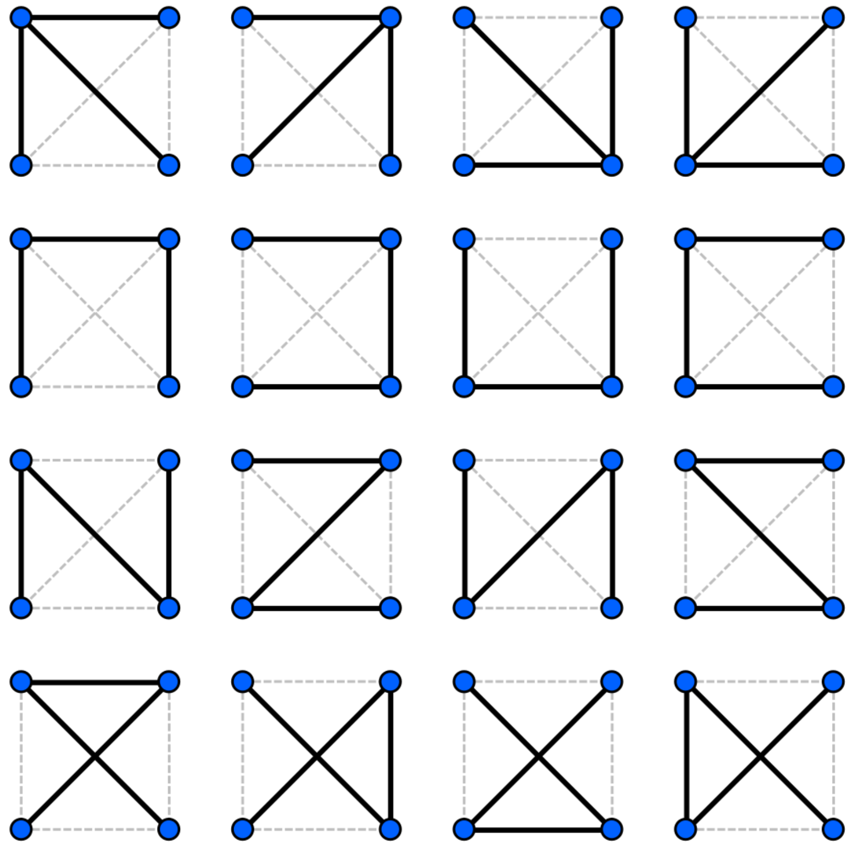
(Achtung: die Knoten sind unterscheidbar!)

$t(2) = 1$ $\quad$ $t(5) = 125$ $\quad$ $t(8) = 262144$

$t(3) = 3$ $\quad$ $t(6) = 1296$ $\quad$ $t(9) = 4782969$

$t(4) = 16$ $\quad$ $t(7) = 16807$ $\quad$ $t(10) = 10^8$

- Die 16 Spannbäume des K_4 (Wikipedia):



- Spannbäume:

  Satz (Cayley): Es gibt n^{n-2} markierte Bäume mit n Knoten.

  Beweisskizze: Wir definieren eine Abbildung (Prüfer-Codes) von der Menge der markierten Bäume mit n Knoten in die Menge $\{1, \ldots, n\}^{n-2}$ (siehe die nächsten Folien).

  Wir zeigen, dass diese Abbildung eine Bijektion ist (siehe Lemma).

  Es folgt, dass die Anzahl der markierten Bäume gleich $|\{1, \ldots, n\}^{n-2}| = n^{n-2}$ ist. □

- Prüfer-Codes (Heinz Prüfer 1896-1934):

Eingabe: Baum $T = (V, E)$ mit $V = \{1, 2, \dots, n\}$, $n \geq 2$.

Wiederhole bis $|V| = 2$:

Sei $v \in V$ das kleinste Blatt von V.

Sei $u \in V$ der einzige Nachbar von v in V.

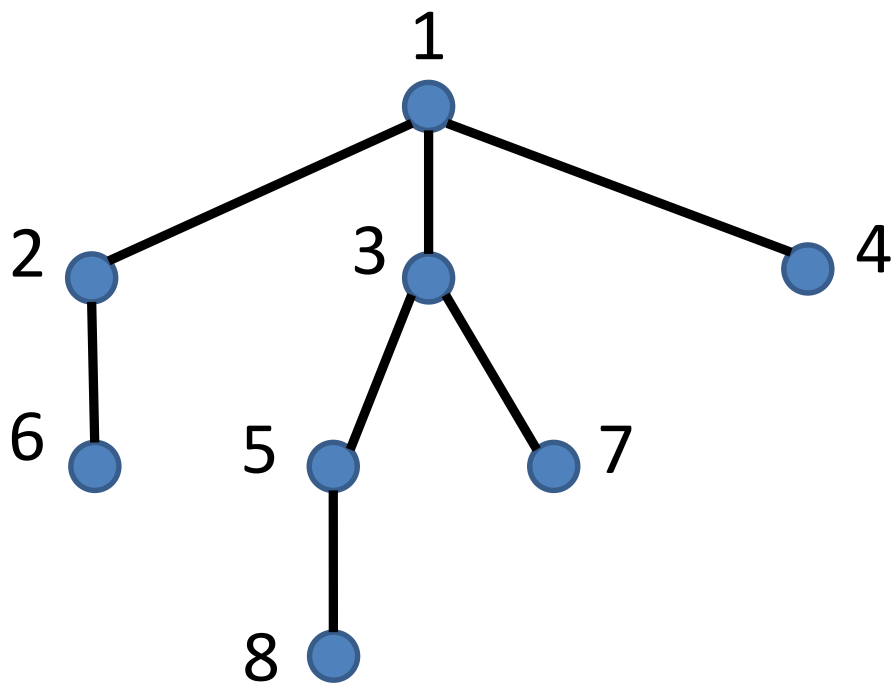
Setze $V \coloneqq V \setminus \{v\}$ und $E \coloneqq E \setminus \{\{u, v\}\}$.

Gebe u aus. (Achtung: u, nicht v!)

Ausgabe: Folge $(u_1, \dots, u_{n-2})$, genannt Prüfer-Code von T.

- Prüfer-Codes: (http://mathworld.wolfram.com/PrueferCode.html)

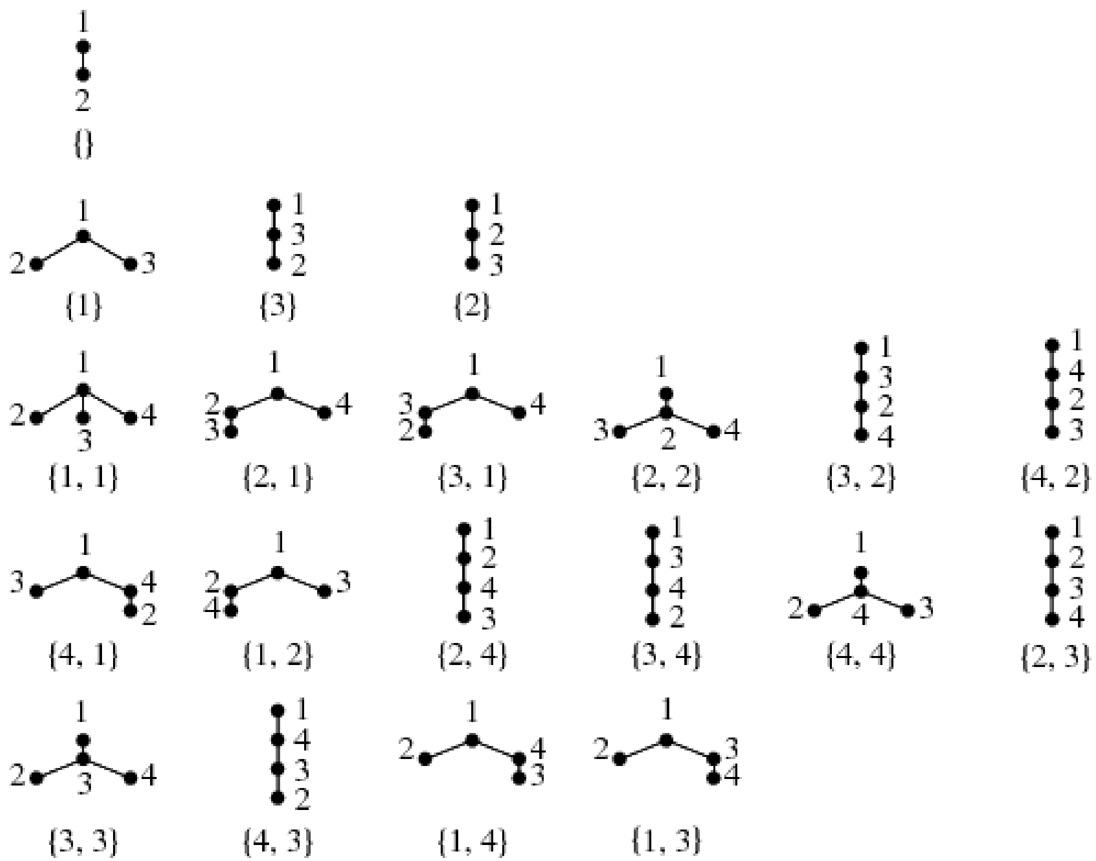
  Beispiel:



$(1,2,1,3,3,5)$

- Prüfer-Codes: (http://mathworld.wolfram.com/PrueferCode.html)

  Beispiel:



- Prüfer-Codes:

  Lemma: Zu einem gegebenen Prüfer-Code $\gamma = (p_1, \dots, p_{n-2})$ mit Elementen aus $[\mathrm{n}] = \{1, \dots, n\}$ gibt es einen eindeutigen markierten Baum T_γ mit Knotenmenge $[n]$.

  Beweis: Durch Induktion über die Länge des Codes.

  Basis: $n = 2$. Es gibt genau einen Baum mit Knotenmenge $\{1,2\}$.

  Schritt: $n > 2$. Das erste Blatt b_1, das gepflückt wurde, ist der kleinste Knoten in $[n] \setminus \{p_1, \dots, p_{n-2}\}$. Mit der Ind.Vor. gibt es einen eindeutigen Baum $T_{\gamma'} = (V', E')$ für $\gamma' = (p_2, \dots, p_{n-2})$.

  Es gilt $T_\gamma = \left(V' \cup \{b_1\}, E' \cup \{\{b_1, p_1\}\}\right)$. $\square$

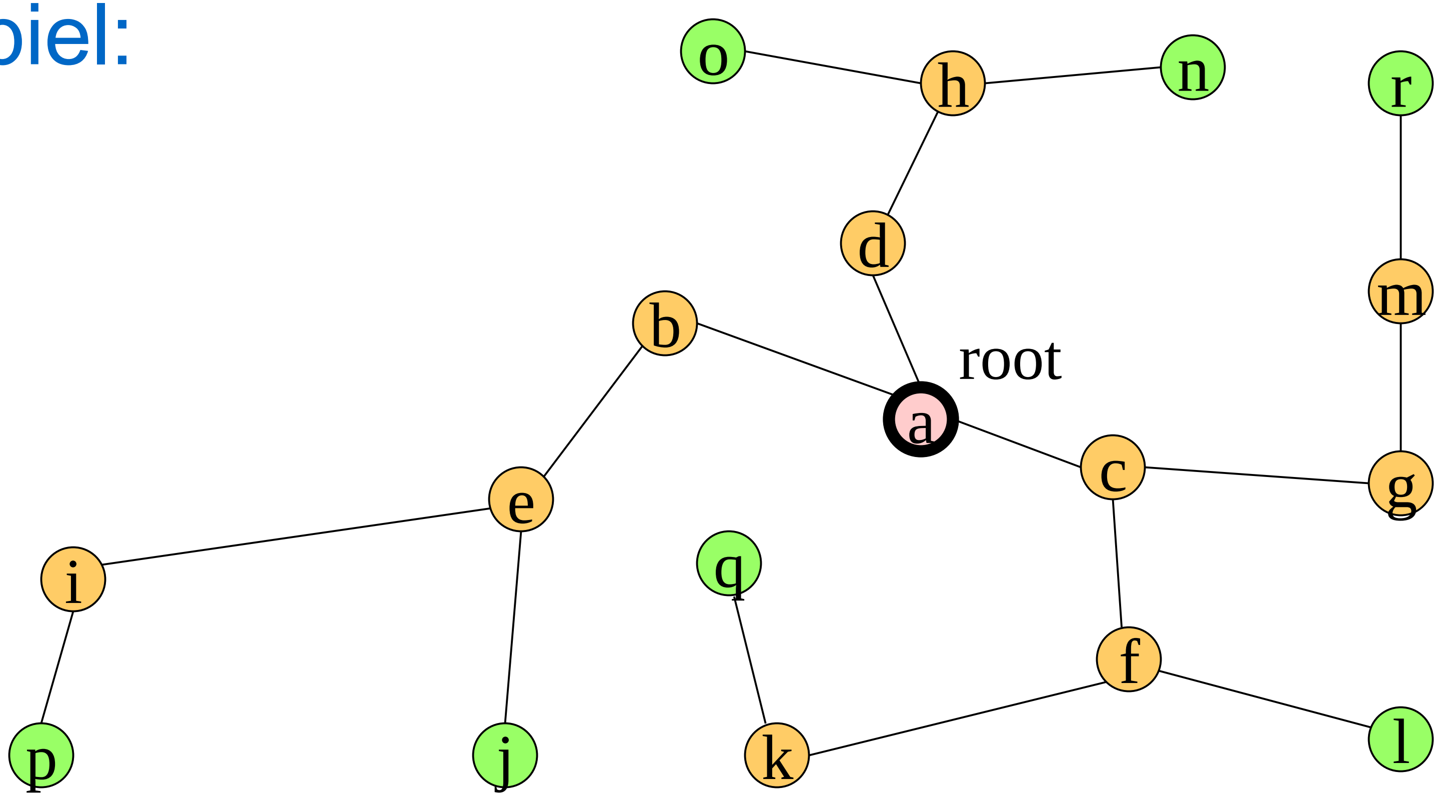
- Wurzelbäume:

  Definition: Ein Wurzelbaum (rooted tree) ist ein Tupel (T, v), wobei $T = (V, E)$ ein Baum ist und $v \in V$ ein Knoten, den man auch als Wurzel des Baumes bezeichnet.

  – Da es in einem Baum zwischen je zwei Knoten genau einen Pfad gibt, gibt es in einem Wurzelbaum von jedem Knoten genau einen Pfad zur Wurzel.

- Wurzelbäume:

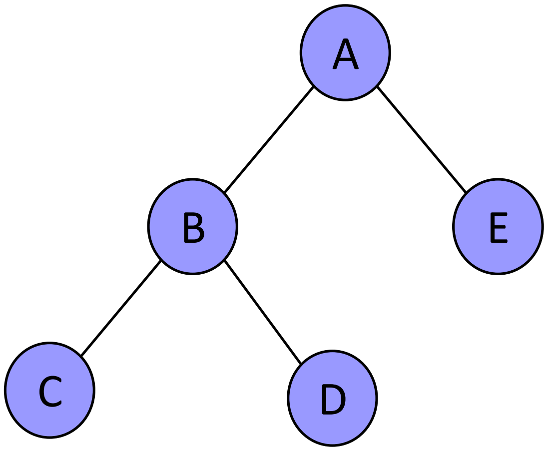
  Beispiel:



- Wurzelbäume:

  Im Bild eines Wurzelbaumes wird die Wurzel in der Regel oben angeordnet und die Wege werden von der Wurzel weggerichtet betrachtet.

  - Wurzelbäume dienen zur graphischen Darstellung hierarchischer Strukturen, z.B. Vererbungen, Stammbäume, grammatikalische Strukturen, usw.



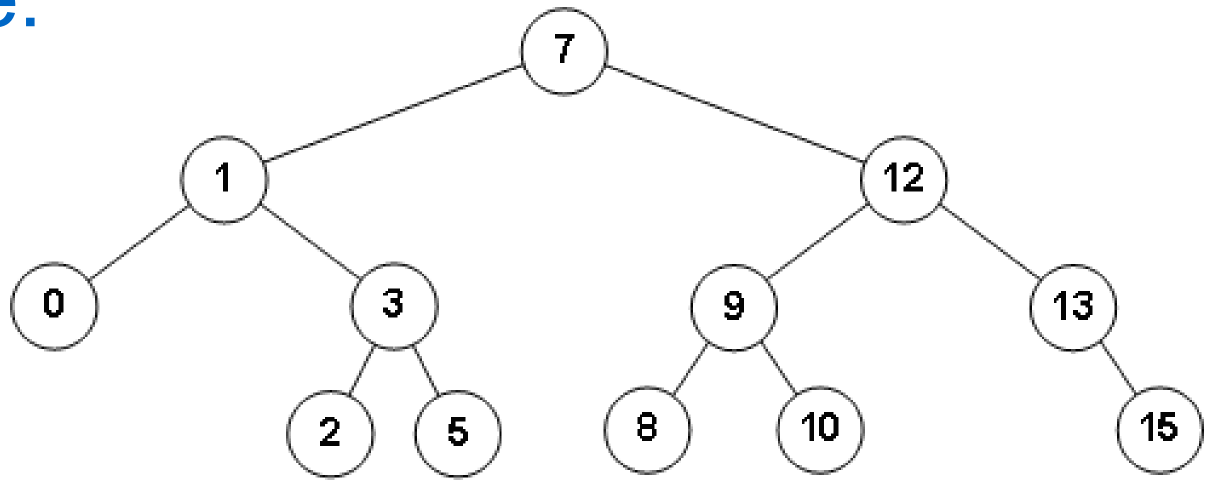
- Vorgänger, Nachfolger, Kind, Höhe:
  - Die Knoten entlang eines Pfades von $v \in V$ zur Wurzel heißen Vorgänger von v.
  - Der zu v benachbarte Vorgänger ist der Vater bzw. die Mutter von v.
  - Die Knoten $u \in V$, von denen der Pfad zur Wurzel den Knoten $v \in V$ enthält, heißen Nachfolger von v.
  - Die zu v benachbarten Nachfolger sind die Kinder von v.
  - Die Höhe $h(T)$ eines Baumes T ist die Länge des längsten Pfades von der Wurzel zu einem der Blätter plus 1.

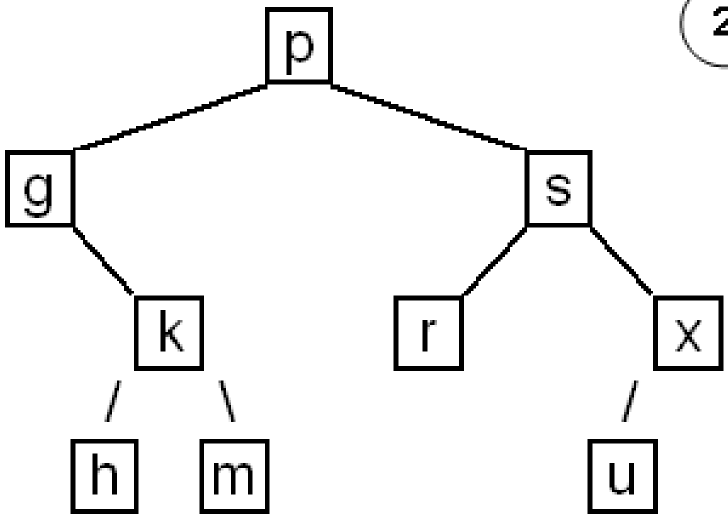
- Binäre Wurzelbäume:
  - Ein Binärbaum ist ein Wurzelbaum, in dem jeder Knoten höchstens 2 unmittelbare Nachfolger hat.
  - Ein vollständiger Binärbaum ist ein Binärbaum, in dem jeder innere Knoten genau zwei unmittelbare Nachfolger hat und alle Blätter denselben Abstand zur Wurzel haben.

  Satz: Ein binärer Wurzelbäum der Höhe k hat höchstens $2^k - 1$ Knoten und höchstens 2^{k-1} Blätter. Der vollständige Baum der Höhe k hat genau $2^k - 1$ Knoten und 2^{k-1} Blätter.

- Suchbäume:
  - Ein Suchbaum ist ein Binärbaum mit den folgenden drei Eigenschaften:
    - Die Knotenmenge ist linear geordnet.
    - Die Kinder eines inneren Knoten sind beschriftet mit: linkes Kind, rechtes Kind.
    - Für alle inneren Knoten v gilt:
      - Für alle Knoten u im linken Unterbaum von v gilt: $u < v$.
      - Für alle Knoten u im rechten Unterbaum von v gilt: $u > v$.

- Suchbäume:





Praktische Anwendungen in der Informatik:

- Sortierverfahren, die auf Bäumen operieren
- Bäume zur Repräsentation von hierarchischen Algorithmen und Datenstrukturen
- Spannbäume zur Konstruktion von kostengünstigen zusammenhängenden Netzwerken (z.B. Telefon- oder Computernetzwerke)