Allgemeine Hinweise zur Klausur

- **Bearbeitungszeit**: 110 Minuten.
- **Hilfsmittel**:
  - **Ein** DIN-A4 Blatt, beidseitig **handschriftlich** beschrieben (keine Kopie!).
  - ggf. Fremdsprachenwörterbuch (Deutsch-.../...-Deutsch) ohne handschriftliche Eintragungen!
- **Punkteverteilung**:
  - Für die 5 Klausuraufgaben werden insgesamt 42 Punkte vergeben.
  - Die ungefähre Punkteverteilung innerhalb einer Aufgabe ist als Orientierungshilfe jeweils zu Beginn der Aufgabe angegeben.
  - Die einzelnen Teilaufgaben sind bis auf wenige Ausnahmen unabhängig voneinander lösbar. Sollten Sie zu einer Teilaufgabe keine Lösung finden, so können Sie diese Teilaufgabe also einfach überspringen und mit der nächsten Teilaufgabe fortfahren.
  - Trennen Sie unter keinen Umständen die Heftung der Blätter auf!
  - Falls der Platz zur Bearbeitung einer Teilaufgabe nicht ausreicht, markieren Sie dies bitte und benutzen die Rückseite des vorhergehenden Blattes.
  - Beschriften Sie den Kopf **jeden** Blattes mit Ihrem Namen!
  - Die **letzte** Seite stellt ein leeres Zusatzblatt dar.

Viel Erfolg!

1	2	3	4	5	$\sum$
/6	/3	/12	/11	/10	/42

1 Multiple Choice (ca. 2 + 2 + 2 = 6 Punkte)

Welche Aussagen sind richtig, welche falsch?

Hinweis: *Kreuzen Sie nur Aussagen an, bei denen Sie sich sicher in Ihrer Antwort sind. Für jede richtige Antwort erhalten Sie $\frac{1}{2}$ Punkt, für jede falsche Antwort wird Ihnen $\frac{1}{2}$ Punkt abgezogen. Sie können aus einer Teilaufgabe jedoch nicht mit negativen Punkten herausgehen. D.h. im Fall einer negativen Gesamtpunktzahl, wird die Teilaufgabe mit 0 Punkten bewertet.*

Markieren Sie Ihre Antwort eindeutig mit einem Kreuz ($\times$) in der entsprechenden Spalte. Sollten Sie Ihre Aussage noch einmal abändern, so streichen Sie das alte Kreuz deutlich aus ($\times \rightarrow \blacksquare$), so dass die endgültige Antwort eindeutig als Kreuz erkennbar ist.

a) **Kondition und Rundungsfehler:** Welche Aussagen treffen zu?

Hinweis: Die Kondition einer Funktion ist definiert durch $cond(f) = \dfrac{x \cdot f'(x)}{f(x)}$.

	ja	nein
Die Funktion $f(x) = e^x - 1$ ist bei $x = 0$ schlecht konditioniert.		
Die Funktion $f(x) = e^x - 1$ ist bei $x = 1$ schlecht konditioniert.		
Die Auswertung der Funktion $f(x) = e^x - 1$ ist bei der Benutzung einer Library-exp-Funktion zur Berechnung von e^x bei $x \approx 0$ numerisch stabil.		
Die Auswertung der Funktion $g(x) = 1/\sin(x)$ an der Stelle $x \approx \pi$ ist numerisch stabil.		

Platz für kurze Nebenrechnungen:

b) **Komplexität:** Welche Verfahren benötigen höchstens $O(n^2)$ Operationen?

	ja	nein
Matrix-Vektor-Multiplikation		
Matrix-Matrix-Multiplikation		
Lösen eines linearen Gleichungssystems mittels LR- bzw. LU-Zerlegung		
Diskrete Fouriertransformation		

c) **Newton-Verfahren:** Welche Aussagen sind korrekt?

	ja	nein
Das Newton-Verfahren ist stets global konvergent.		
Wenn das Newton-Verfahren konvergent ist, dann ist es stets linear konvergent.		
Wenn das Newton-Verfahren konvergent ist, dann ist es stets quadratisch konvergent.		
Die Iterationsvorschrift des Newton-Verfahrens ist stets wohldefiniert.		

$\pm$ 0,5 Pkt. pro richtiger/falscher Antwort, pro Teilaufgabe jedoch keine neg. Punktzahl

2 Gewöhnliche Differentialgleichungen (ca. 1,5 + 1,5 = 3 Punkte)

Gegeben sei das folgende Anfangswertproblem:

$$y'(x) = e^{1-y}, \qquad y_0 = y(0) = 1, \qquad \forall x \geq 0.$$

a) Berechnen Sie die analytische Lösung $y(t)$ des Anfangswertproblems mit Hilfe der Separation der Variablen!

1,5 Pkt. (1 Pkt. für Integration inkl. Berücksichtigung der Aanfangswerte, 0,5 Pkt. fürAuflösen)

b) Wenden Sie nun das Verfahren von Heun an, um eine numerische Lösung zu ermitteln. Berechnen Sie einen numerischen Lösungswert y_1 für den ersten Zeitschritt ausgehend vom Anfangswert $y_0 = y(0)$, welcher die Lösung $y(x_1)$ approximiert. Rechnen Sie mit Schrittweite $\Delta x = 1$. Das Verfahren von Heun ist durch die folgende Vorschrift definiert:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k + \Delta x; \\ y_{k+1} &= y_k + \frac{\Delta x}{2} \cdot \left(f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_k + \Delta x \cdot f(x_k, y_k)) \right); \end{aligned}$$

1,5 Pkt. (1 Pkt. für Formel mit Einsetzen, 0,5 Pkt. für Endergebnis)

3 Interpolation (ca. 4 + 4 + 3 + 1 = 12 Punkte)

Betrachten Sie die Funktion

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{(x+2)^2} \tag{1}$$

a) Stellen Sie den Interpolanten $p(x)$ der Funktion $f(x)$ mit den Stützstellen $P_0 = (x_0, y_0)$, $P_1 = (x_1, y_1)$, and $P_2 = (x_2, y_2)$ und

$$x_0 = -1, \qquad x_1 = 0, \qquad x_2 = 1.$$

auf! Bestimmen Sie eine explizite Darstellung des Interpolanten in der Form

$$p(x) = [x_0]f + [x_0, x_1]f \cdot (x - x_0) + \ldots + [x_0, \ldots, x_n]f \cdot \prod_{k=0}^{n-1}(x - x_k). \tag{2}$$

3Pkt. = 0.5 Pkt. je Wert

1 Pkt.

b) Zeigen Sie, dass für den Interpolanten aus Teilaufgabe a) die folgende Fehlerabschätzung gilt:

$$|f(x) - p(x)| \leq \frac{8}{3\sqrt{3}} \quad \forall\, x \in [-1, 1]. \tag{3}$$

Nutzen Sie dazu die Fehlerformel für polynomielle Interpolation und zeigen Sie zunächst folgende Aussage:

$$\exists\, \xi \in [-1, 1]: \quad |f(x) - p(x)| = \frac{4\,|x^3 - x|}{|\xi + 2|^5}. \tag{4}$$

Schätzen Sie anschließend die beiden Terme $g_1(x) := |x^3 - x|$ und $g_2(\xi) := |\xi + 2|$ ab, um die Fehlerabschätzung (3) zu zeigen.

1,5Pkt.

0,5Pkt.

1,5Pkt.

0,5 Pkt.

c) Das Schema von Aitken und Neville soll zur Interpolation der folgenden Stützstellen, wie in Abbildung 1 dargestellt, verwendet werden:

$$(x_1, y_1) = (\frac{1}{5}, 1), \quad (x_2, y_2) = (\frac{2}{5}, 2), \quad (x_3, y_3) = (\frac{3}{5}, 1), \quad (x_4, y_4) = (\frac{4}{5}, 2).$$

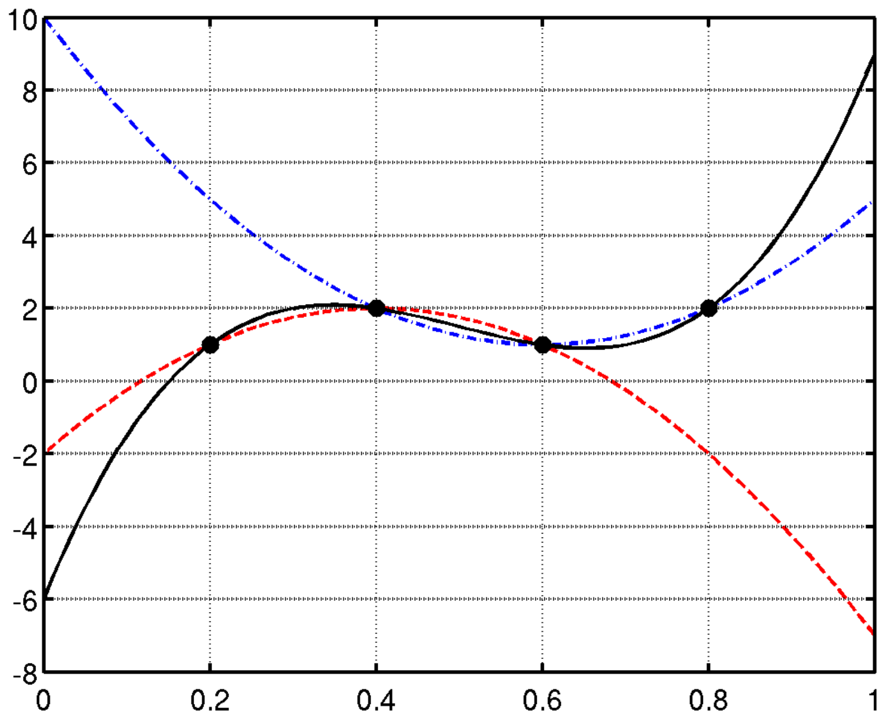


Abbildung 1: Polynominterpolation

Welche Werte ergeben sich im Dreiecksschema, wenn die Polynome an der Stelle $\bar{x} = 0$ ausgewertet werden? Tragen Sie die Werte in das Schema auf Seite 8 ein.

Es ist nicht notwendig, alle Werte mit Hilfe der Formel von Aitken und Neville zu berechnen, sondern Sie können zur Bestimmung der Werte Abbildung 1 nutzen und die Aufgabe graphisch lösen. Alle Werte sind in $\mathbb{Z}$ enthalten. Abbildung 1 zeigt die vier Stützstellen sowie die Interpolanten zu den Stützpunkten $\{x_1, x_2, x_3\}$, $\{x_2, x_3, x_4\}$ bzw. $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$.

$$
\begin{array}{c|ccccccc}
 & & & & & & & \\
\hline
x_1 = \frac{1}{5} & \boxed{} & \rightarrow & \boxed{} & \rightarrow & \boxed{} & \rightarrow & \boxed{} \\
 & & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & \\
x_2 = \frac{2}{5} & \boxed{} & \rightarrow & \boxed{} & \rightarrow & \boxed{} & & \\
 & & \nearrow & & \nearrow & & & \\
x_3 = \frac{3}{5} & \boxed{} & \rightarrow & \boxed{} & & & & \\
 & & \nearrow & & & & & \\
x_4 = \frac{4}{5} & \boxed{} & & & & & &
\end{array}
$$

d) Auf der nachfolgenden Seite 9 finden Sie zwei Plots. Beide Plots zeigen jeweils die Funktion $\sin x$ sowie einen zugehörigen Interpolaten, der aus einer Interpolation mit 5 Stützstellen resultiert. Ordnen Sie jedem Graphen **A** und **B** eine der beiden Interpolationsarten

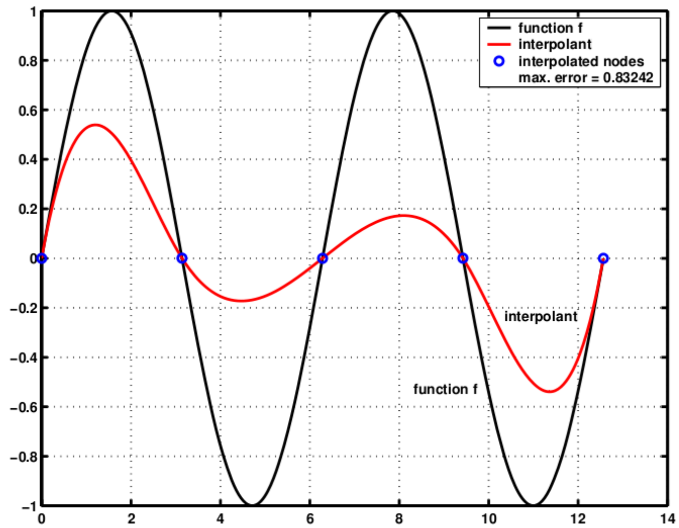
(1) kubische Spline-Interpolation

(2) stückweise Hermite-Interpolation

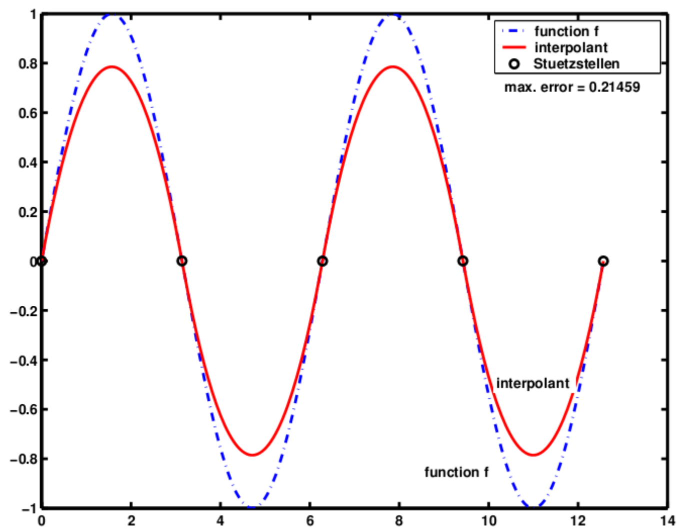
zu und begründen Sie **kurz** Ihre Entscheidung!

0,5 Pkt.

0,5 Pkt.



Plot A



Plot B

Abbildung 2: stückweise Polynominterpolation

4 Fixpunktiteration (ca. 1 + 2 + 3 + 2 + 3 = 11 Punkte)

Gegeben sei die Funktion

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{1+x}{2+x}. \tag{5}$$

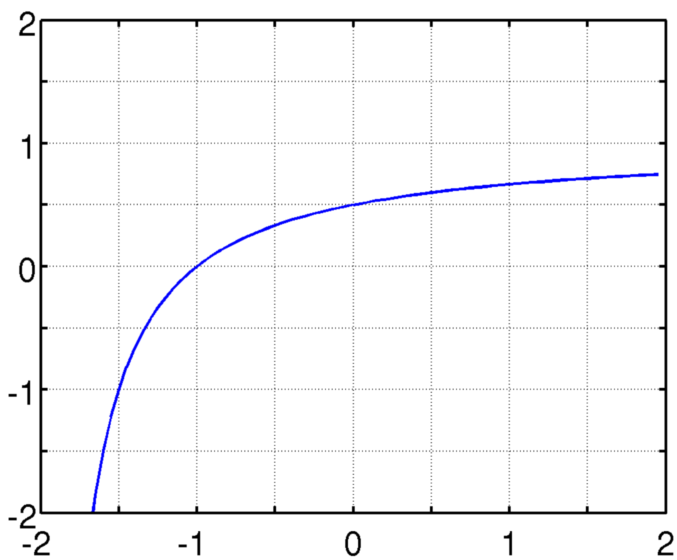
a) Zeigen Sie, dass gilt:

$$g'(x) = \frac{1}{(2+x)^2}.$$

Sie können dieses Ergebnis in den nachfolgenden Teilaufgaben verwenden.

1 Pkt.

b) Bestimmen Sie alle Fixpunkte von g graphisch und tragen Sie die ersten 3 Schritte der Fixpunkt-Iteration für den Startwert $x_0 = -1$ in die nachfolgende Abbildung ein, welche die Funktion g im Intervall $[-2, 2]$ zeigt. Es sind keine Berechnungen notwendig. Lösen Sie diese Aufgabe graphisch!



Diagonale einzeichnen + Fixpunkte 1 Pkt., Iterationssequenz $-1 \to 0 \to \frac{1}{2} \to \frac{3}{5} = 0.6$ 1 Pkt.

c) Ermitteln Sie nun alle Fixpunkte von g analytisch und bestimmen Sie jeweils, ob sie anziehend oder abstoßend sind!

1,5 Pkt.

1,5 Pkt.

d) Zeigen Sie die folgenden Eigenschaften der Funktion g:

(i) $x \in [0,1] \;\Rightarrow\; g(x) \in [0,1]$

(ii) $\forall x \in [0,1] : \; |g'(x)| < 1$

Es ist nicht ausreichend, anhand der Abbildung von Teilaufgabe b) zu argumentieren!

1 Pkt.

Fortzsetzung siehe nächste Seite!

zu d)

1 Pkt.

e) Wenden Sie den Banach'schen Fixpunktsatz im Intervall $I = [0, 1]$ an: Prüfen Sie zunächst alle Voraussetzungen. Was lässt sich dann folgern?

Hinweis: Nutzen Sie Ergebnisse vorheriger Teilaufgaben!

0,5 Pkt.

0,5 Pkt.

1 Pkt.

1 Pkt. (0,5 Pkt. für Konvergenz + 0,5 Pkt. für Fixpunkt $\frac{1}{2}(-1+\sqrt{5}) \in I$

5 Numerische Quadratur (ca. 1,5 + 2,5 + 6 = 10 Punkte)

a) Betrachten Sie das Integral

$$\int_{-1}^{1} 7x^6 - x^2 \, dx. \tag{6}$$

Abildung 3 zeigt die Fehlerkurve für den Fehler von vier verschiedenen Quadraturmethoden, mit denen das Integral (6) numerisch berechnet wurde, abhängig von der Anzahl an Stützstellen n bzw. Teilintervallen $n-1$.

Weisen Sie jeder der drei unten angegebenen Quadraturmethoden die zugehörige Fehlerkurve **A**, **B**, **C** oder **D** zu. Eine Fehlerkurve gehört zu keiner der aufgeführten Quadraturmethoden.

(1) Gaußquadratur	
(2) Trapezsumme	
(3) Simpsonsumme	

1,5 Pkt.

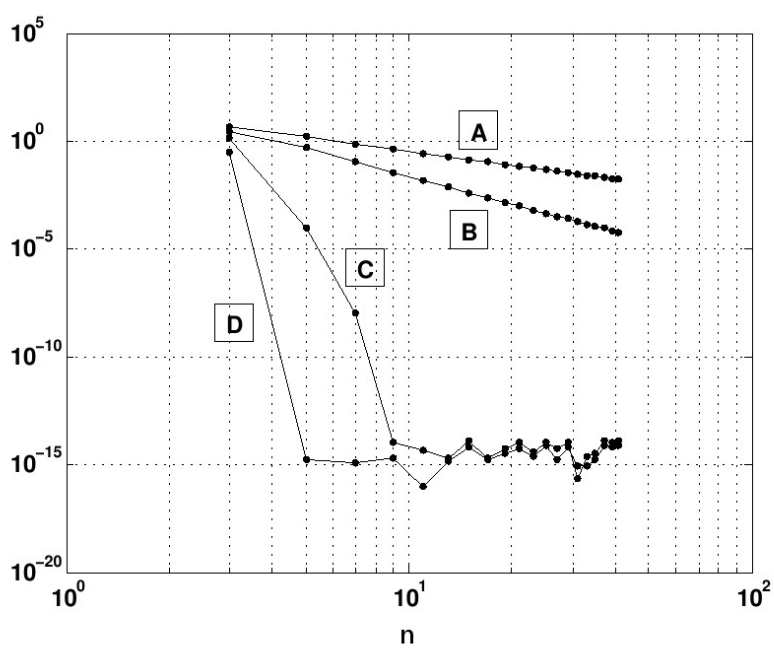


Abbildung 3: Fehler der verschiedenen Quadraturmethoden abhängig von der Anzahl an Stützstellen n (bzw. im Fall von Summenformeln abhängig von der Anzahl an Teilintervallen $n-1$)

b) In dieser Teilaufgabe sollen mit den Methoden `quantile` und `calcArea` die Integrationsgrenzen $[-c, c]$ berechnet werden, über die eine Funktion f integriert werden muss, bis eine vorgegebene Fläche α erreicht ist, d.h. es gilt $\alpha = \int_{-c}^{c} f$. Als Funktion f betrachten wir die Gauß'sche Normalverteilung, welche symmertrisch ist und stets größer als 0 ist. Folgendes Bild illustriert die Problemstellung:

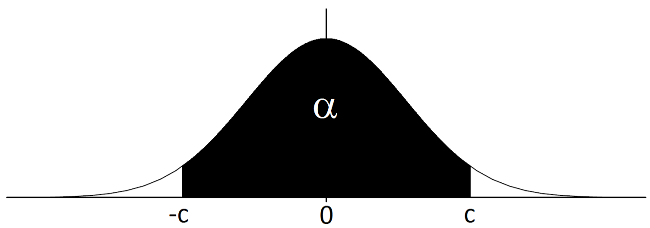


Abbildung 4: Integral der Gauß'schen Normalverteilung im Intervall $[-c, c]$.

Wegen der Symmetrie von f halbieren wir den Rechenaufwand, indem wir die Zielfläche halbieren und die Integration auf das Intervall $[0, c]$ beschränken:

$$\alpha = \int_{-c}^{c} f = 2 \cdot \int_{0}^{c} f \quad \text{oder auch:} \quad \frac{\alpha}{2} = \int_{0}^{c} f$$

Die Quadratur erfolgt mittels adaptiver Trapezsumme, die in der Funktion `calcArea` implementiert ist und in Teilaufgabe ii) behandelt wird. Da die Integrationsgrenze c unsere gesuchte Größe ist, brauchen wir ein Anfangsintervall auf dem unsere Suche begonnen wird. Dieses Intervall ist mit $[0, L]$ gegeben. Auf diesem Intervall wird nun in `calcArea` integriert. Die berechnete Fläche wird von der noch zu betrachtenden Fläche abgezogen:

$$\alpha = |\alpha - \texttt{calcArea}(f, \alpha, \ldots)|$$

Falls für das derzeit betrachtete Intervall eine Restfläche $\alpha_{rest} > \frac{tol}{2}$ verbleibt, wird jeweils auf dem nächsten Intervall $[L, 2L], [2L, 3L], \ldots$ rekursiv fortgefahren. Diese Funktionalität wird in der Methode `quantile` realisiert.

i) Ergänzen Sie die auf der nächsten Seite gegebene Methode `quantile` so, dass sie die oben beschriebene Funktionalität erfüllt. Pseudocode ist ausreichend.

Die Eingabedaten der Methode `quantil` sind:

`f`	die zu integrierende Funktion,
`alpha`	die zu ermittelnde Fläche,
`tol`	die Fehlertoleranz,
`L`	die Länge der Integrationsintervalle, auf denen wir c suchen.

Achtung! Der Rückgabewert von der Methode `quantile` ist das gesuchte Intervalende c. **c ist globale Variable** in der Klasse, in welcher unsere Methoden implementiert sind. Sie kann überall modifiziert werden und wird in `calcArea` entsprechend gesetzt. In Quantil werden lediglich die groben Schritte (Integrationsintervalle) kontrolliert.

```
public static double quantile(Function f, double alpha, double tol, double L) {
// Anpassung von alpha wegen Achsensymmetrie und
// Anpassung des Toleranzwerts tol zur Reduktion der Rechenoperationen
  alpha = alpha/2.0;  tol = tol/4.0;
  double a = 0, b = L,
         fa = f.eval(0), fb;
// Initialisierung der globalen Variable c, die in calcArea(...) modifiziert werden muss
  c=0;
// Iterationsschleife
  while([                    ]) {
      fb = [                    ];
      alpha = alpha - calcArea(f, alpha, tol, a, b, fa, fb);
      fa = [                    ];
      a  = [                    ];
      b += [                    ];
      }
return c; // Globale Variable - wird in calcArea(...) modifiziert
}
```

Nach der Initialisierung des Integrationsintervalls in der Funktion `quantile` betrachten wir nun in der Funktion `calcArea` die adaptive Flächenintegration und die damit verbundene Bestimmung des Intervallendes c. Zur Bewertung des lokalen relativen Integrationsfehlers e_{rel} wird das zu integrierende Intervall $[a, b]$, welches wir von der Funktion `quantile` erhalten, in zwei Teilintervalle aufgeteilt. Wie in Abbildung 5 skizziert, wird zur Flächenberechnung nun die Trapezregel auf das Gesamtintervall (Trapez $T_{groß}$) und die beiden Teilintervalle ($T_{klein,a}$ und $T_{klein,b}$) angewendet:

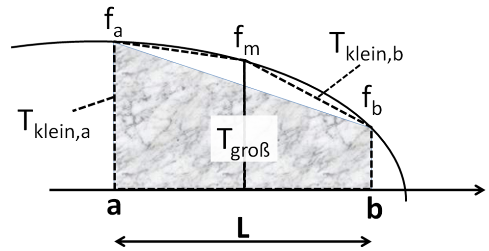


Abbildung 5: Prinzipskizze der adaptiven Trapezsumme. Dargestellt wird der erste Quadraturschritt bei dem $L = b - a$.

Folgende Fälle führen zu einer adaptiven Verfeinerung:

1. $e_{rel} = \left| \dfrac{T_{klein,a} + T_{klein,b} - T_{groß}}{T_{klein,a} + T_{klein,b}} \right| > TOL$
2. $A_{Intervall} > \alpha/2 + TOL/4$.

Die adaptive Quadratur wird beendet, sobald das Flächenintegral der ausgewerteten Teilintervalle im Bereich $[\alpha/2 - TOL/4, \alpha/2 + TOL/4]$ liegt. Deshalb müssen die Teilintervalle strikt von links nach rechts abgearbeitet werden. Der Rückgabewert der Integrationsfunktion `calcArea` ist der Integralwert bis zu dem integriert wurde. Der aktuelle Integrationsbereich $[0, c]$ muss vor jeder Rückgabe einer gültigen Fläche in `calcArea` aktualisiert werden!

Hinweis: c ist eine globale Variable in unserer Klasse und kann an jeder Stelle modifiziert werden! Zur Erinnerung: Sie wird in der vorhergehenden Funktion `quantile` mit 0 initialisiert. Beim letzten Update entspricht c dann der gesuchten Strecke, über der unsere Funktion integriert werden muss.

ii) Ergänzen Sie die auf der nächsten Seite gegebene Methode `calcArea` so, dass sie die oben beschriebene Funktionalität erfüllt. Pseudocode ist ausreichend.

Die Eingabedaten der Methode `calcArea` sind:

`f`	die zu integrierende Funktion,
`A`	die verbleibende Fläche,
`tol`	die Fehlertoleranz,
`a,b`	die linke/rechte Intervallgrenze,
`fa,fb`	der Funktionswert an der linken/rechten Intervallgrenze.

```
public static double calcArea(Function f, double A, double tol,
                              double a, double b, double fa, double fb) {
// Funktionswert in der Mitte des Intervalls
  double fm   = [                                        ],
// Flaeche des grob aufgeloesten Trapezes
         t_gr = [                                        ],
// Flaeche der BEIDEN "kleinen" Trapeze
         t_kl = [                                        ],
// left  = Flaeche des linken Subintegrationsgebiets
// right = Flaeche des rechten Subintegrationsgebiets
         left =0, right =0;
  if ([                                        ]) {
    [                                        ]
  } else {
    [                                        ]
  }
}
```

Leeres Zusatzblatt