Technische Universität München SS 2010
Institut für Informatik
Prof. Dr. Thomas Huckle
Dipl.-Tech. Math. Stefanie Schraufstetter
Michael Lieb, M. Sc.

Numerisches Programmieren, Übungen

7. Übungsblatt: Numerische Quadratur

1) Trapezregel und Trapezsumme

In dieser Aufgabe wollen wir zwei einfache Funktionen (Polynome) per Hand und mit den Formeln der Trapezregel und Trapezsumme aus der Vorlesung integrieren. Ziel der Berechnungen ist also der exakte Wert $I(f)$,

$$I(f) = \int_a^b f(x)\,dx, \tag{1}$$

sowie die approximativen Werte $Q_T(f)$ und $Q_{TS}(f;h)$,

$$Q_T(f) = H \cdot \frac{f(a)+f(b)}{2} \tag{2}$$

$$Q_{TS}(f;h) = h \cdot \left(\frac{f_0}{2} + f_1 + \ldots + f_{n-1} + \frac{f_n}{2}\right), \tag{3}$$

wobei gilt: $H = b-a$, $h = \frac{b-a}{n}$, $f_i = f(x_i)$, $x_i = a + ih$, für $i = 0, \ldots, n$ bei n Teilintervallen.

i) Gegeben sei die Funktion $f(x) = -x^2 + 4$. Berechnen Sie $I(f)$ und $Q_T(f)$ nach den Formeln (1) - (2) für $a = -2,\ b = 2$.

ii) Gegeben sei die Funktion $g(x) = x^4$. Berechnen Sie $I(g)$ und $Q_T(g)$ nach den Formeln (1) - (2) für $a = 0,\ b = 4$.

iii) Berechnen Sie $Q_{TS}(f;h)$ für $f(x) = -x^2 + 4$ nach der Formel (3) für $a = -2,\ b = 2$ und $n = 8$. Tip: Nützen Sie die Symmetrie von $f(x)$!
Geben Sie dann das Restglied $R_{TS}(f;h)$ an nach der Formel

$$R_{TS}(f;h) = h^2 \cdot H \cdot \frac{f^{(2)}(\xi)}{12}\ . \tag{4}$$

iv) Berechnen Sie $Q_{TS}(g;h)$ für $g(x) = x^4$ mit der Formel (3) für $a = 0,\ b = 4$ und $n = 4$.
Schätzen Sie dann das Restglied $R_{TS}(g;h)$ mit der Formel (4) ab!

2) Keplersche Fassregel und Simpson-Summe

Analog zur Aufgabe 1) wollen wir jetzt Integrationsformeln nutzen, die aus Interpolationspolynomen mit einer Ordnung mehr (quadratisch) entstehen. Ziel der Berechnungen sind nun die approximativen Werte $Q_F(g)$ und $Q_{SS}(g;h)$ der Fassregel und der Simpson-Summe:

$$Q_F(g) = H \cdot \frac{g(a) + 4g\left(\frac{a+b}{2}\right) + g(b)}{6} \tag{5}$$

$$Q_{SS}(g;h) = \frac{h}{3} \cdot \left(f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + \ldots + 2f_{n-2} + 4f_{n-1} + f_n\right), \tag{6}$$

wobei wieder gilt: $H = b - a$, $h = \frac{b-a}{n}$, $f_i = f(x_i)$, $x_i = a + ih$, für $i = 0, \ldots, n$ bei n Teilintervallen.

i) Gegeben sei die Funktion $g(x) = x^4$. Berechnen Sie $Q_F(g)$ nach der Formel (5) für $a = 0,\ b = 4$.

ii) Berechnen Sie $Q_{SS}(g;h)$ für $g(x) = x^4$ mit der Formel (6) für $a = 0,\ b = 4$ und $n = 4$.
Schätzen Sie dann das Restglied $R_{SS}(g;h)$ mit folgender Formel ab:

$$R_{SS}(g;h) = h^4 \cdot H \cdot \frac{g^{(4)}(\xi)}{180}\ . \tag{7}$$

3) Quadratur nach Archimedes

Wir betrachten den divide-et-impera-Algorithmus zur Integration nach Archimedes. Die Grundidee ist dabei eine hierarchische Sichtweise, so dass in jedem neuen Schritt des Algorithmus jeweils ein zusätzlicher Anteil zum Gesamtergebnis hinzukommt. Das hat zur Folge, dass bei eventueller adaptiver Rechnung nie die vorigen Ergebnisse weggeworfen sondern mitgenutzt werden.

Konkret berechnet dieser Algorithmus immer Dreiecksflächen, die dann aufsummiert werden und so eine Approximation der gesamten Fläche unter dem Funktionsgraphen ergeben (vgl. Abb. 1). Die Fläche eines Dreiecks ist nach der Formel $A = g \cdot h/2$ bestimmt, wobei g die Grundseite (in Abb. 1 vertikal) und h die Höhe (horizontal) beschreibt.

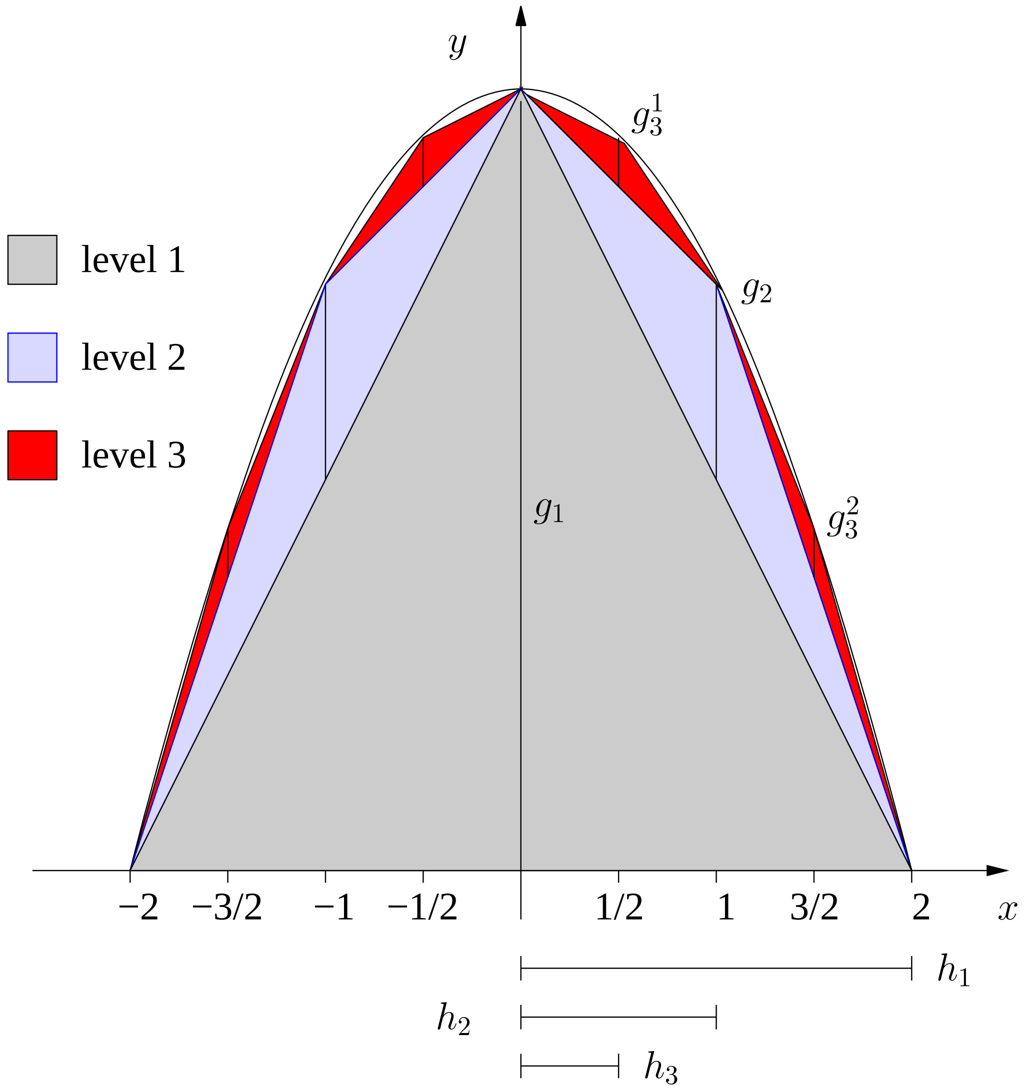

Abbildung 1: Visualisierung des Algorithmus nach Archimedes.

Berechnen Sie nach Archimedes eine Approximation des Integrals

$$I(f) \;=\; \int_{-2}^{2} f(x)\, dx,$$

für die Funktion $f(x) = -x^2 + 4$, indem Sie ausgehend vom Startdreieck zwei gleichmäßige Verfeinerungsstufen ansetzen (vgl. Abb. 1). Tip: Nützen Sie die Achsensymmetrie der Funktion $f(x)$ aus!
Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem aus Aufgabe 1) iii). Was stellen Sie fest?

Zum Abschluss des Kapitels über Quadratur ist nachfolgend wieder eine kurze Aufgabe aus einer Semestralklausur aufgeführt. Diese ist dazu gedacht, den Stoff noch einmal selbst üben zu können. Sie wird deshalb nicht in der Übung behandelt.

Wiederholung: Quadratur

a) Der folgende Pseudocode soll die gegebene zweidimensionale Funktion f auf dem gegebenen Gebiet mit Hilfe einer zweidimensionalen Rechtecksumme integrieren. Es wird also das folgende Integral approximiert:

$$\int_{ay}^{by} \int_{ax}^{bx} f(x, y) dx dy$$

Die Anzahl an Unterteilungen fr die Rechtecksumme in die beiden Richtungen wird durch nx und ny bestimmt. Von jedem Teilgebiet wird der Funktionswert im Mittelpunkt als Beitrag zum Integral aufaddiert.

```
01 rechtecksumme2D(f, ax, bx, ay, by, nx, ny)
02   summe = 0
03   hx = (ax-bx)/nx
04   hy = (ay-by)/ny
05   for(i=1; i<=nx; i++) {
06     for(j=0; j<ny; j++) {
07       x = ax + i*hx;
08       y = ay + j*hy;
09       summe += hx*hy*f(x, y);
10     end
11   end
12   return summe
13 end
```

Allerdings ist das Programmstck fehlerhaft. Durch Korrekturen in vier Zeilen lassen sich die Fehler beheben. Nennen Sie die entsprechenden Zeilen und korrigieren Sie die Fehler!

b) Die Fläche unter einer Funktion soll mit Hilfe der Simpsonsumme abgeschtzt werden. Allerdings ist die Funktion selbst nicht bekannt, sondern nur die Messwerte für folgende x-Koordinaten: $(1, 3, 5, 7, 9)$. Die zugehörigen y-Werte lauten: $(2, 1, 3, 3, 0)$. Verwenden Sie die Simpsonsumme unter Einbeziehung aller fünf Punkte, um die Fläche abzuschätzen.

c) Die Quadratur mit Hilfe der Simpsonsumme liefert normalerweise nicht die exakte Fläche unter einer Kurve, sondern nur eine Näherung. Nennen Sie eine Methode, mit der eine obere Schranke für den verbleibenden Fehler der Simpsonsumme berechnet werden kann. Ist diese Methode auch für die Quadratur aus Teilaufgabe b) anwendbar (Begründung!)?