Technische Universität München
Institut für Informatik
Prof. Dr. Thomas Huckle
Dipl.-Tech. Math. Stefanie Schraufstetter
Michael Lieb, M. Sc.

SS 2010

Numerisches Programmieren, Übungen

8. Übungsblatt: Extrapolation, Diskrete Fourier-Transformation

1) Extrapolation: Numerische Quadratur hoher Ordnung

In dieser Aufgabe wollen wir uns mit der Romberg-Quadratur beschäftigen. Dieses Verfahren benutzt Trapezsummen $T(h_1)$, $T(h_2)$, $T(h_3)$, ... zu feiner werdenden Schrittweiten h_1, h_2, h_3, ..., um daraus ein Interpolationspolynom $p(x)$ in $x = h^2$ durch die Stützpunkte $(h_1^2, T(h_1))$, $(h_2^2, T(h_2))$, $(h_3^2, T(h_3))$, ... zu konstruieren und dieses bei $x = h^2 = 0$ auszuwerten. Da dieser Wert außerhalb des Bereichs der Stützstellen liegt, wird es auch als *Extrapolationsverfahren* bezeichnet. Der Fehler der Romberg-Quadratur ist von der Größenordnung $O(h_1^2 \cdot h_2^2 \cdot h_3^2 \cdot \ldots)$.

Das Interpolationspolynom lässt sich an der Stelle $x = 0$ mit Hilfe des Aitken-Neville-Algorithmus auswerten. Modifziert man das Aitken-Neville-Verfahren entsprechend, so erhält man den Romberg-Algorithmus:

```
for i=1:n
    waehle n[i];
    h[i]:=(b-a)/n[i];
    T[i]:=Trapezsumme zur Schrittweite h[i]
    for k:=i-1:-1:1
        T[k] := T[k+1] + 1/(h[k]^2/h[i]^2-1)*(T[k+1]-T[k])
    end
end
```

Dabei bezeichnet n_i die Anzahl der Teilintervalle von $[a, b]$, die zur Berechnung der Trapezsumme T_i mit Schrittweite $h_i = \frac{b-a}{n_i}$ verwendet wird. Häufig wählt man hierfür die Folge $(n_i)_{i \in \mathrm{N}}$ mit $n_i = 2^i$.

i) Leiten Sie einen Extrapolationsschritt zur Berechnung eines Integrals $I(f)$ her. Betrachten Sie dazu die Entwicklungen (in h^2) zweier Trapezsummen mit den Schrittweiten h_1 und h_2

$$\begin{aligned} T(h_1) &= I(f) + \tau_1 h_1^2 + \tau_2 h_1^4 + \dots \\ T(h_2) &= I(f) + \tau_1 h_2^2 + \tau_2 h_2^4 + \dots \end{aligned}$$

und ermitteln Sie daraus eine Approximation für den Wert des Integrals $I(f)$ abhängig von den Trapezsummen $T(h_1)$ und $T(h_2)$. Von welcher Größenordnung ist der Fehler?

ii) Berechnen Sie den Extrapolationswert $p(0)$ für die Funktion $f(x) = -x^2 + 4$ auf dem Intervall $[a; b]$, $a = -2,\ b = 2$, mit den drei Schrittweiten $h_1 = b - a$, $h_2 = (b - a)/2$, $h_3 = (b - a)/4$.
Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem Wert der nächst feineren Trapezsumme ($h_4 = (b - a)/8$) aus Aufgabe 1 iii) von Blatt 7 und bestimmen Sie den Aufwand an jeweils nötigen f-Auswertungen. Was stellen Sie fest?

2) Eigenschaften der diskreten Fourier-Transformation (DFT)

Wie in der Vorlesung ist die diskrete Fourier-Transformation von komplexen Eingabedaten $v = (v_0, v_1, \dots, v_{n-1})^T$ definiert als

$$c_k = \big(DFT(v)\big)_k := \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} v_j \cdot \overline{\omega}^{jk} \qquad k = 0, 1, \dots, n-1 \tag{1}$$

mit $\omega = \exp(i\,\frac{2\pi}{n})$.

Analog ist die inverse diskrete Fourier-Transformation als Auswertung des trigonometrischen Interpolationspolynoms an den Interpolationspunkten definiert:

$$v_l = \big(IDFT(c)\big)_l := \sum_{k=0}^{n-1} c_k \cdot \omega^{kl} \qquad l = 0, 1, \dots, n-1. \tag{2}$$

i) Zeigen Sie, dass gilt: $DFT(v) = \frac{1}{n}\,\overline{IDFT(\overline{v})}$.

ii) Zeigen Sie, dass gilt: $DFT(v + u) = DFT(v) + DFT(u)$.

iii) Zeigen Sie, dass folgende Beziehungen in Bezug auf ω gelten:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \overline{\omega}^{kl} = \begin{cases} n, & \text{für } l = 0 \\ 0, & \text{für } l = 1, \dots, n-1 \end{cases}$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{kl}\,\overline{\omega}^{kj} = \begin{cases} n, & \text{für } l = j \\ 0, & \text{für } l \neq j \end{cases} \quad .$$

iv) Zeigen Sie, dass DFT und $IDFT$ tatsächlich Umkehroperationen sind, indem Sie mit Hilfe der Definitionen (1) und (2) nachweisen:

$$IDFT(DFT(v))_l = v_l$$

v) Berechnen Sie die diskrete Fouriertransformation DFT für folgende drei Vektoren $a, b, c \in \mathbb{C}^n$!
$a = (a_0, a_1, \dots, a_{n-1})^T = (1, 0, 0, \dots, 0, 0)^T$,
$b = (b_0, b_1, \dots, b_{n-1})^T = (i, i, i, \dots, i, i)^T$,
$c = (c_0, c_1, \dots, c_{n-1})^T = (1, -1, 1, -1, \dots)^T$ für gerades n!

3) Frequenzanalyse

Eine von vielen Anwendungen der DFT ist die Transformation eines diskreten Signals $s \in \mathbb{C}^n$ aus dem Wertebereich in den Spektralbereich. Mathematisch kann man das auch als Übergang von der normalen Basis B des $\mathbb{C}^n$ zu einer alternativen Basis $\widetilde{B} = \{b_0, \dots, b_{n-1}\}$ betrachten. Die neuen Basisvektoren von $\widetilde{B}$ sind

$$b_l = \begin{pmatrix} \exp(i\,\frac{0\pi l}{n}) \\ \exp(i\,\frac{2\pi l}{n}) \\ \vdots \\ \exp(i\,\frac{2(n-1)\pi l}{n}) \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n \qquad l = 0, \dots, n-1\ . \tag{3}$$

Die Basisvektoren b_l aus (3) sind diskrete Varianten von (komplexwertigen) Schwingungen mit Frequenz l. Man kann folgende Gleichheit herleiten:

$$\sum_{l=0}^{n-1} \big(DFT(s)\big)_l \cdot b_l = s\ .$$

Das bedeutet, dass die DFT die Koeffizienten des Vektors s bezüglich der Basis $\widetilde{B}$ liefert. Somit beschreibt die DFT, wie sich das Signal s durch Linearkombination der Schwingungen $b_0, \dots, b_{n-1}$ zusammensetzen lässt. Dabei geben die Beträge der Komponenten der DFT den Anteil der jeweiligen Schwingung an.
Ordnen Sie anhand dieser Information den Signalen s_1 bis s_3 (Abb. 1) die Frequenzspektren f_1 bis f_3 (Abb. 2) zu! Dabei sind die Signale zum besseren Verständnis kontinuierlich dargestellt (z.B. $s_1 = exp(3it),\ t \in [0; 2\pi]$), wohingegen die Frequenzspektren den Betrag der (komplexen) Koeffizienten der DFT mit $n = 21$ gesampelten Werten des jeweiligen Signals beschreiben.

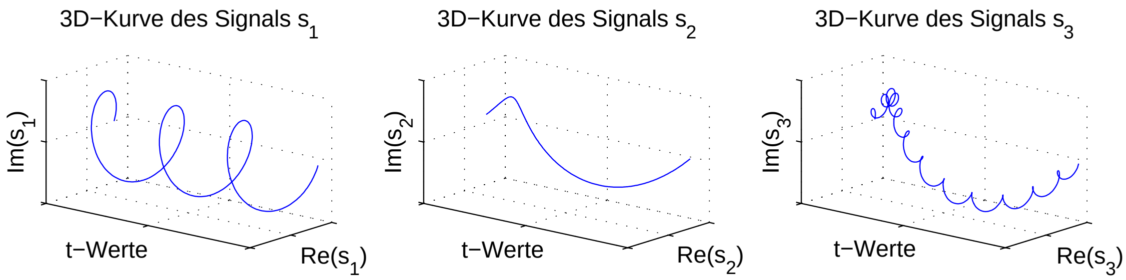

Abbildung 1: Komplexe Signale

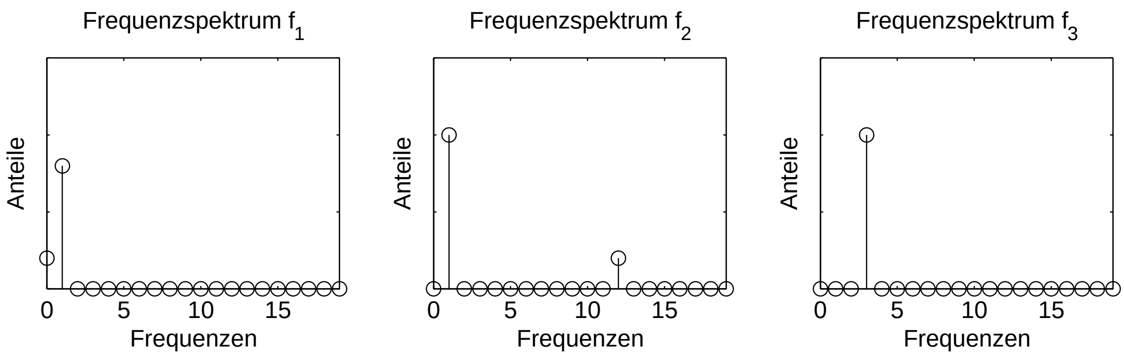

Abbildung 2: Frequenzspektren