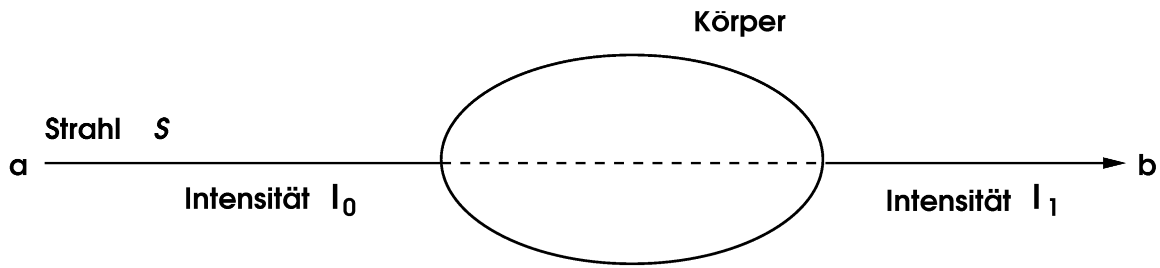
Computertomographie



Intensitätsverlust durch Dichte ρ im Körper entlang Strahl S.

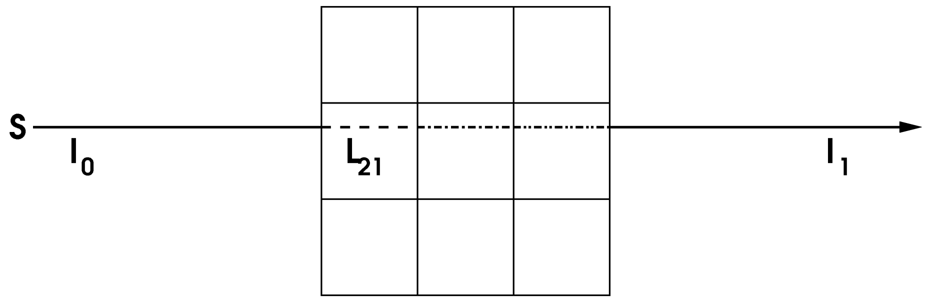
$$dI = -\rho(s) \cdot I(s) \cdot ds$$

$$\int_{I_0}^{I_1} \frac{dI}{I} = \ln\left(\frac{I_1}{I_0}\right) = -\int_a^b \rho(s)ds$$

gesucht: $\int_a^b \rho(s)ds = \ln\left(\frac{I_1}{I_0}\right)$: gemessen

Für „alle möglichen“ Strahlen bestimme I_1 und daraus die Dichteverteilung ρ im Körper!

Einfaches Beispiel:

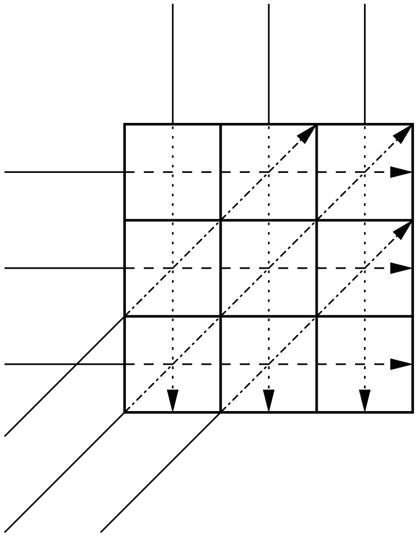


Einfacher Körper, unterteilt in Zellen konstanter Dichte $\rho_{i,j}$, $i,j=1,2,3$

$$\begin{bmatrix} \rho_{1,1}=r_1 & \rho_{1,2}=r_2 & \rho_{1,3}=r_3 \\ \rho_{2,1}=r_4 & \rho_{2,2}=r_5 & \rho_{2,3}=r_6 \\ \rho_{3,1}=r_7 & \rho_{3,2}=r_8 & \rho_{3,3}=r_9 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} Q_{1,1} & Q_{1,2} & Q_{1,3} \\ Q_{2,1} & Q_{2,2} & Q_{2,3} \\ Q_{3,1} & Q_{3,2} & Q_{3,3} \end{matrix}$$

Gesucht: Vektor $(r_1,\ldots,r_9)$

Strahlen



Betrachte Auswahl von 9 Strahlen $S_1,\ldots,S_9$ mit dazugehörigen Messwerten von Intensitätsverlusten $I_1,\ldots,I_9$:
Ergibt Vektor v mit $v_k := \ln(I_k/I_0)$, k=1,…,9.

$$v_k = \ln\left(\frac{I_k}{I_0}\right) = \sum_{i,j=1}^{3} \int_{Q_{i,j}} \rho_{i,j}\, ds = \sum_{i,j=1}^{3} \rho_{i,j} \cdot L_{k;i,j}$$

Dabei ist $L_{k;i,j}$ die Weglänge von Strahl S_k in Zelle $Q_{i,j}$.

Gleichungssystem

Ergibt lineares Gleichungssystem zur Bestimmung von r:

$$\left.\begin{array}{c}\sum_{n=1}^{9} L_{1,n} \cdot r_n = v_1 \\ \vdots \\ \sum_{n=1}^{9} L_{9,n} \cdot r_n = v_9\end{array}\right. \Rightarrow L \cdot r = v$$

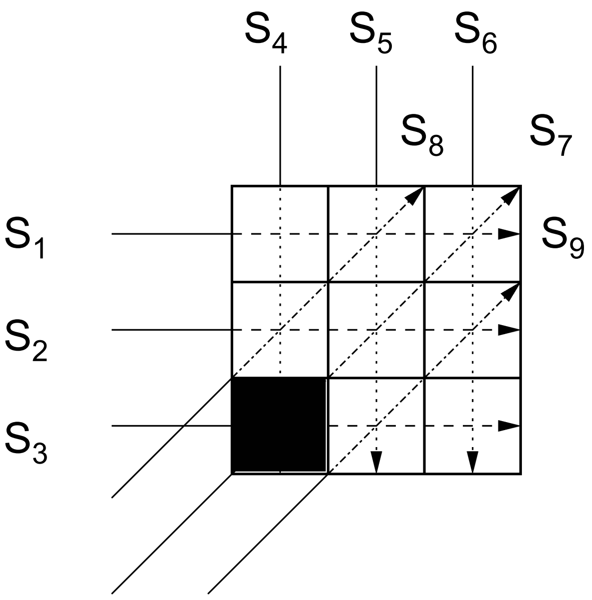
Im Allgemeinen mehr Strahlen als Zellen:
Überbestimmtes Gleichungssystem → Normalgleichung

$$L^T L \cdot r = L^T \cdot v$$

Im Allgemeinen singulär oder extrem schlecht konditioniert:
Verwende Regularisierung

$$\left(L^T L + \mu I\right) \cdot r = L^T \cdot v$$

Beispiel-Körper



Alles leer, nur Zelle $Q_{3,1}$ „schwarz“, entspricht alle r_n Null, nur r_7=1.

Dadurch ergeben sich folgende Intensitätsverluste (Messwerte) längs der Strahlen:

$$v_1 = v_2 = v_5 = v_6 = v_8 = v_9 = 0;$$

$$v_3 = v_4 = 1;$$

$$v_7 = \sqrt{2};$$

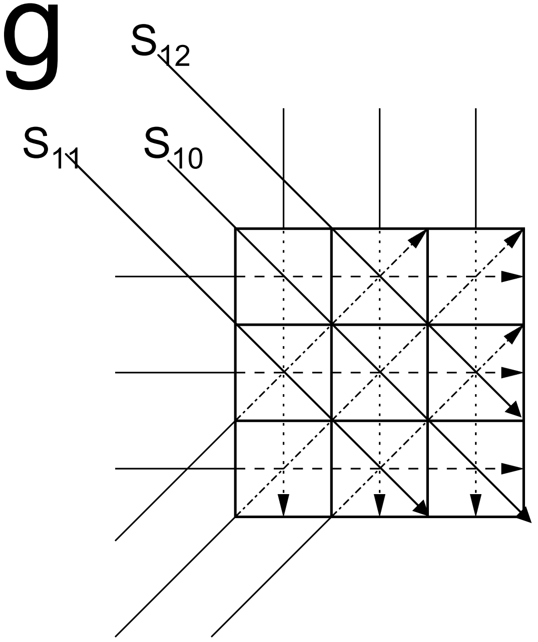
Geometrie→Matrix L

$$
\begin{array}{l}
S_1: \\ S_2: \\ S_3: \\ S_4: \\ S_5: \\ S_6: \\ S_7: \\ S_8: \\ S_9:
\end{array}
\quad
\begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 & & & & & & \\
 & & & 1 & 1 & 1 & & & \\
 & & & & & & 1 & 1 & 1 \\
1 & & & 1 & & & 1 & & \\
 & 1 & & & 1 & & & 1 & \\
 & & 1 & & & 1 & & & 1 \\
 & & \sqrt{2} & & \sqrt{2} & & \sqrt{2} & & \\
 & \sqrt{2} & & \sqrt{2} & & & & & \\
 & & & & & \sqrt{2} & & \sqrt{2} &
\end{pmatrix}
\cdot
\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \\ r_5 \\ r_6 \\ r_7 \\ r_8 \\ r_9 \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
$$

Ungünstige Auswahl der Strahlen: Matrix ist singulär!

Verbesserung

Hinzunahme von drei neuen Strahlen:



$$\begin{array}{l} S_{10}: \\ S_{11}: \\ S_{12}: \end{array} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & & & & \sqrt{2} & & & & \sqrt{2} \\ & & & \sqrt{2} & & & & \sqrt{2} & \\ & \sqrt{2} & & & & \sqrt{2} & & & \end{pmatrix} \cdot r = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Matlab-Beispiel ct.m