IV. Interpolation und Quadratur

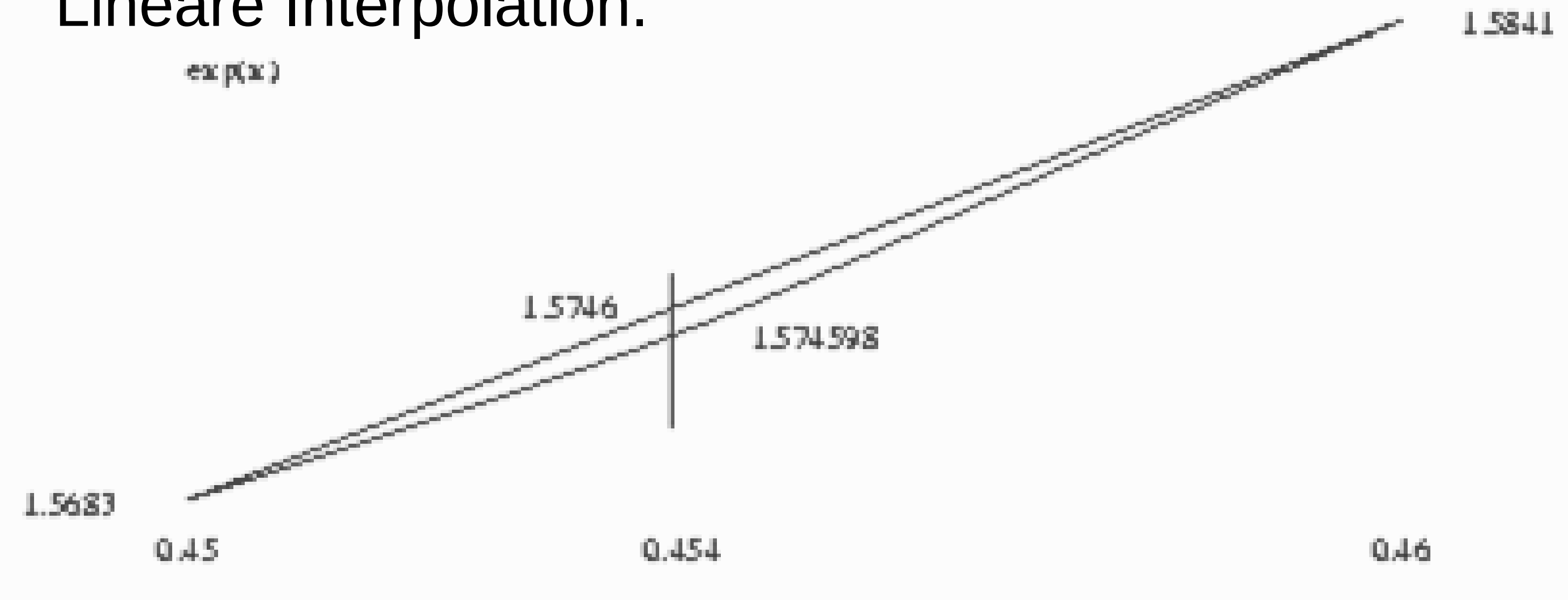
4.1. Interpolation

4.1.1. Beispiel: Interpolation mit Tafelwerken für exp, sin, cos, log

Gesucht: exp(0.454) ;

Tabelliert: exp(0.45) und exp(0.46)

Lineare Interpolation.



x:	0.42	0.43	0.44	0.45	0.46
exp(x):	...	...	...	1.5683	1.5841

4.1.2. Allgemeine Problemstellung:

Gegeben:

Punktepaare (x_j, y_j), $j=0,1,\dots,n$, paarweise verschieden und linear unabhängige Funktionen $g_k(x)$, $k=0,1,\dots,n$

Gesucht: Koeffizienten c_k , $k=0,1,\dots,n$ mit

$$G(x_j)=\sum_{k=0}^{n} c_k g_k(x_j) \overset{!}{=} y_j \qquad \text{für } j=0,1,\dots,n$$

$$\begin{pmatrix} g_0(x_0) & \cdots & g_n(x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ g_0(x_n) & \cdots & g_n(x_n) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_0 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

(n+1)×(n+1) lineares Gleichungssystem

Interpolation führt auf quadratisches Gleichungssystem

Man unterscheide Interpolation und Approximation!

Beispiel zu *<u>Approximation:</u>*

Ausgleichsgerade führt auf überbestimmtes Gleichungs-system

(Normalgleichung, QR)

4.1.3. Spezialfall Polynom-Interpolation:

Ansatzfunktionen $g_k(x)$ sind Polynome x^k

Gesucht: Koeffizienten c_k , k=0,1,...,n mit

$$p(x_j) = \sum_{k=0}^{n} c_k x_j^k \overset{!}{=} y_j \quad \text{für } j=0,1,\ldots,n$$

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_0 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

n+1 Gleichungen für n+1 Unbekannte: Teuer! $O(n^3)$

4.1.4. Lösung mit Lagrange-Polynomen

Definiere geschickt Basis-Polynome:

$$L_j(x) := \prod_{i=0, i\neq j}^{n} \frac{x - x_i}{x_j - x_i} = \frac{(x-x_0)\ldots(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})\ldots(x-x_n)}{(x_j-x_0)\ldots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\ldots(x_j-x_n)}$$

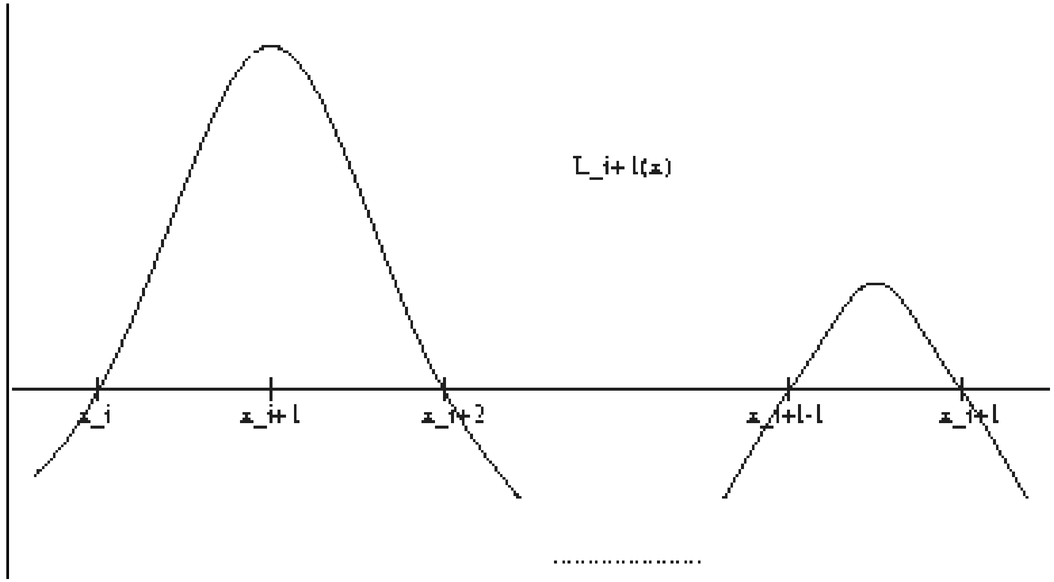
n+1 Polynome vom Grad n, besser als 1, x, x^2, .., x^n

Eigenschaften der Lagrange-Polynome: Grad n mit

$$L_j(x_i) = \begin{cases} 1 & falls \quad i = j \\ 0 & falls \quad i \neq j \end{cases}$$

Gesucht $p(x) = \sum_{j=0}^{n} c_j L_j(x)$

das die Interpolationsbedingungen erfüllt.



Aus diesen Eigenschaften ergibt sich zur Lösung des Interpolationsproblems ein lineares Gleichungssystem für die Koeffizienten:

$$\begin{pmatrix} L_0(x_0) & \cdots & L_n(x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ L_0(x_n) & \cdots & L_n(x_n) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_0 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_0 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Die Lösung ist $c_j = y_j$; daher ist das Interpolationspolynom:

$$p(x) = \sum_{j=0}^{n} y_j L_j(x)$$

denn es ist $p(x_i) = \sum_{j=0}^{n} y_j L_j(x_i) = y_i L_i(x_i) = y_i$

Damit ist die Existenz eines interpolierenden Polynoms gezeigt!

Eindeutigkeit?

Hauptsatz der Algebra:

Jedes Polynom p(x) vom Grad n kann als Produkt von n linearen Faktoren (den ev. komplexen Nullstellen z_k) geschrieben werden in der Form

$$p(x) = \alpha (x - z_1)(x - z_2)\ldots(x - z_n)$$

Annahme: Es gibt zwei Polynome p und q vom Grad <= n,

die beide die Interpolationsbedingungen erfüllen.

Definiere neues Polynom h(x) := p(x) - q(x) . Dann gilt

$$h(x) = \alpha(x - z_1)(x - z_2)\ldots(x - z_n)$$

und $h(x_j) := p(x_j) - q(x_j) = 0$ für j=0,1,...,n

Daher hat das Polynom h(x) den Grad n und n+1 Nullstellen.
Aus dem Hauptsatz der Algebra folgt daher, dass

$\alpha = 0$ sein muss, und daher ist $h(x) \equiv 0$, oder

$p(x) \equiv q(x)$.

Also es existiert <u>genau ein</u> Interpolationspolynom!

Lagrange zur Lösung der Interpolation nicht geeignet,
da numerisch problematisch und teuer.

4.1.5. Berechnung des Interpolationspolynoms

Löse nicht das lineare Gleichungssystem, da dies zu teuer ist! Außerdem wird oft nur der Wert des Polynoms an einer einzigen Stelle gesucht!

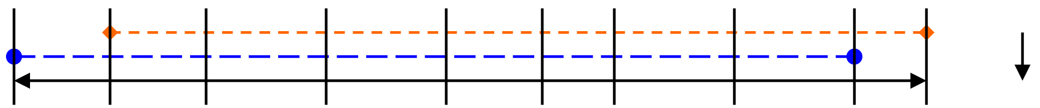
Idee: Berechne induktiv interpolierende Polynome für immer mehr Stützstellen.

Setze dazu $p_{i,\cdots,i+l}(x)$ als das interpolierende Polynom vom Grade l, das genau an den Stellen $x_i, x_{i+1}, \cdots, x_{i+l}$ die Interpolations-Bedingungen erfüllt.

Zur Bestimmung von $p_{i,\cdots,i+l}(x)$ verwende die interpolierenden Polynome vom Grade l-1 $p_{i+1,\cdots,i+l}(x)$ und $p_{i,\cdots,i+l-1}(x)$, die zu den Stützstellen $x_{i+1}, \cdots, x_{i+l}$, bzw. $x_i, \cdots, x_{i+l-1}$, gehören.

Wesentliche Formel :

$$p_{i,\cdots,i+l}(x) = \frac{(x - x_i)\, p_{i+1,\cdots,i+l}(x) - (x - x_{i+l})\, p_{i,\cdots,i+l-1}(x)}{x_{i+l} - x_i} \qquad (*)$$



Beweis: Nachprüfen der Interpolationsbedingung.

$$p_{i,\cdots,i+l}(x_i) = \frac{0 - (x_i - x_{i+l})\, y_i}{x_{i+l} - x_i} = y_i$$

$$p_{i,\cdots,i+l}(x_{i+l}) = \frac{(x_{i+l} - x_i)\, y_{i+l} - 0}{x_{i+l} - x_i} = y_{i+l}$$

und für alle anderen j mit i < j < i+l :

$$p_{i,\cdots,i+l}(x_j) = \frac{(x_j - x_i)\, y_j - (x_j - x_{i+l})\, y_j}{x_{i+l} - x_i} = y_j$$

Wegen der Eindeutigkeit des interpolierenden Polynoms ist jedes der so definierten Polynome genau die eindeutige Lösung des jeweiligen Interpolationsproblems!

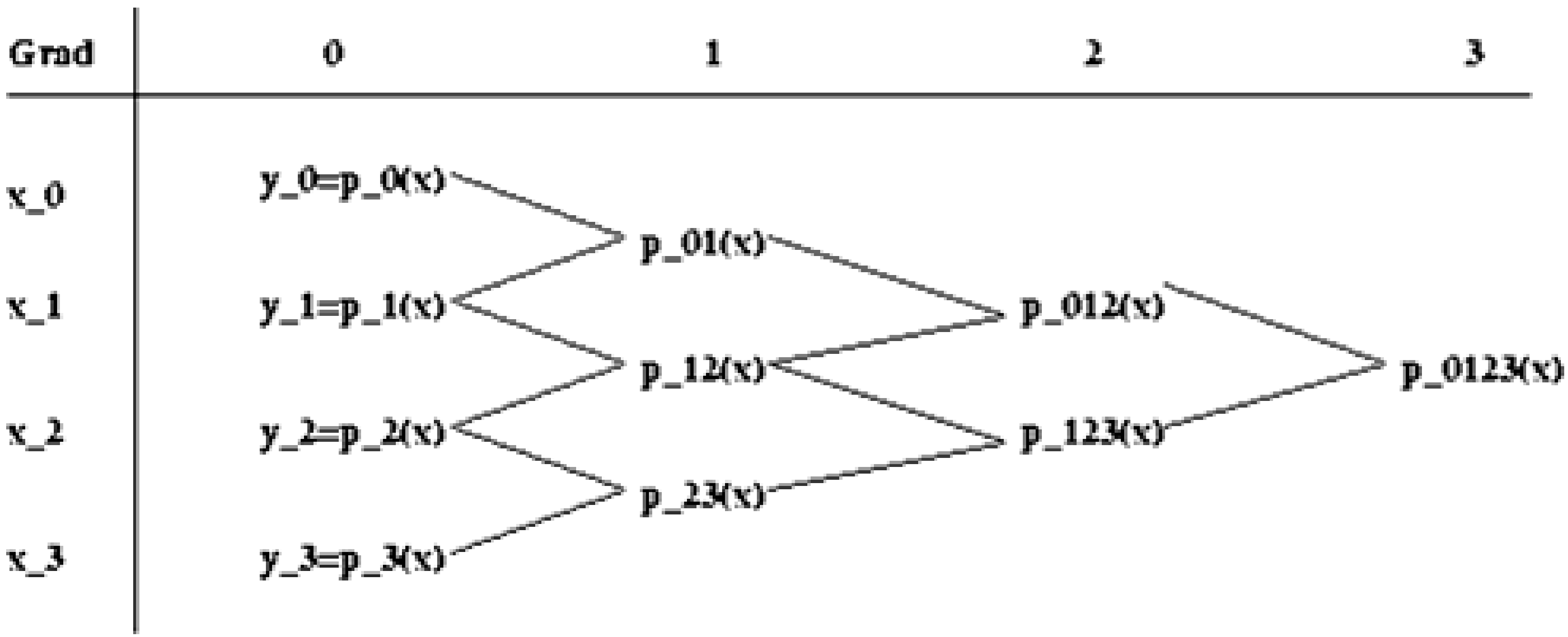
Daher ist $p_{i,\cdots,i+l}(x)$ die gesuchte Lösung!

Anwendung der Formel (*) zur punktweisen Auswertung des Interpolationspolynoms an einer Stelle $\bar{x}$: $p(\bar{x}) = ?$

Eingabe: Stützwerte (x_j , y_j), j=0,...,n und Stelle $\bar{x}$;
Ausgabe: $p_{i,\cdots,i+l}(\bar{x})$

Tableau-artige Berechnung der Interpolationspolynome aufsteigenden Grades, aber nur an der Stelle $\bar{x}$.

Neville-Tableau:



Erste Spalte sind konstante interpolierende Polynome, also genau die jeweils vorgegebenen Werte y_i .

Zweite Spalte sind interpolierende lineare Polynome zu jeweils zwei benachbarten Stützstellen.

Letzte Spalte enthält das interpolierende Polynom zu allen vorgegebenen Stützstellen.

Neue Stützstelle x_4 mit Wert y_4 kann in das Tableau eingefügt werden und führt zu einer neuen ‚Zeile' und einer neuen Endspalte p_01234(x).

Auswertung des Tableaus jeweils nur an einer festen Stelle x möglich.

Beispiel: $x_0 = 0, y_0 = 1$,

$x_1 = 1, y_1 = 3$, $x_2 = 3, y_2 = 2$

Auswertung des interpolierenden Polynoms an der Stelle x=2 mit Lagrange, bzw. Neville-Tableau:

Lagrange:

$$L_0(x) = \frac{(x-1)(x-3)}{(0-1)(0-3)} \quad , \quad L_1(x) = \frac{(x-0)(x-3)}{(1-0)(1-3)}$$

und

$$L_2(x) = \frac{(x-0)(x-1)}{(3-0)(3-1)}$$

→

$$p_{012}(2) = 1 \cdot L_0(2) + 3 \cdot L_1(2) + 2 \cdot L_2(2) = -\frac{1}{3} + 3 + 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{10}{3}$$

Neville-Tableau:

$x\_0=0$	$y\_0=p\_0(2)=1$		
		5	
$x\_1=1$	$y\_1=p\_1(2)=3$		10/3
		5/2	
$x\_2=3$	$y\_2=p\_2(2)=2$		

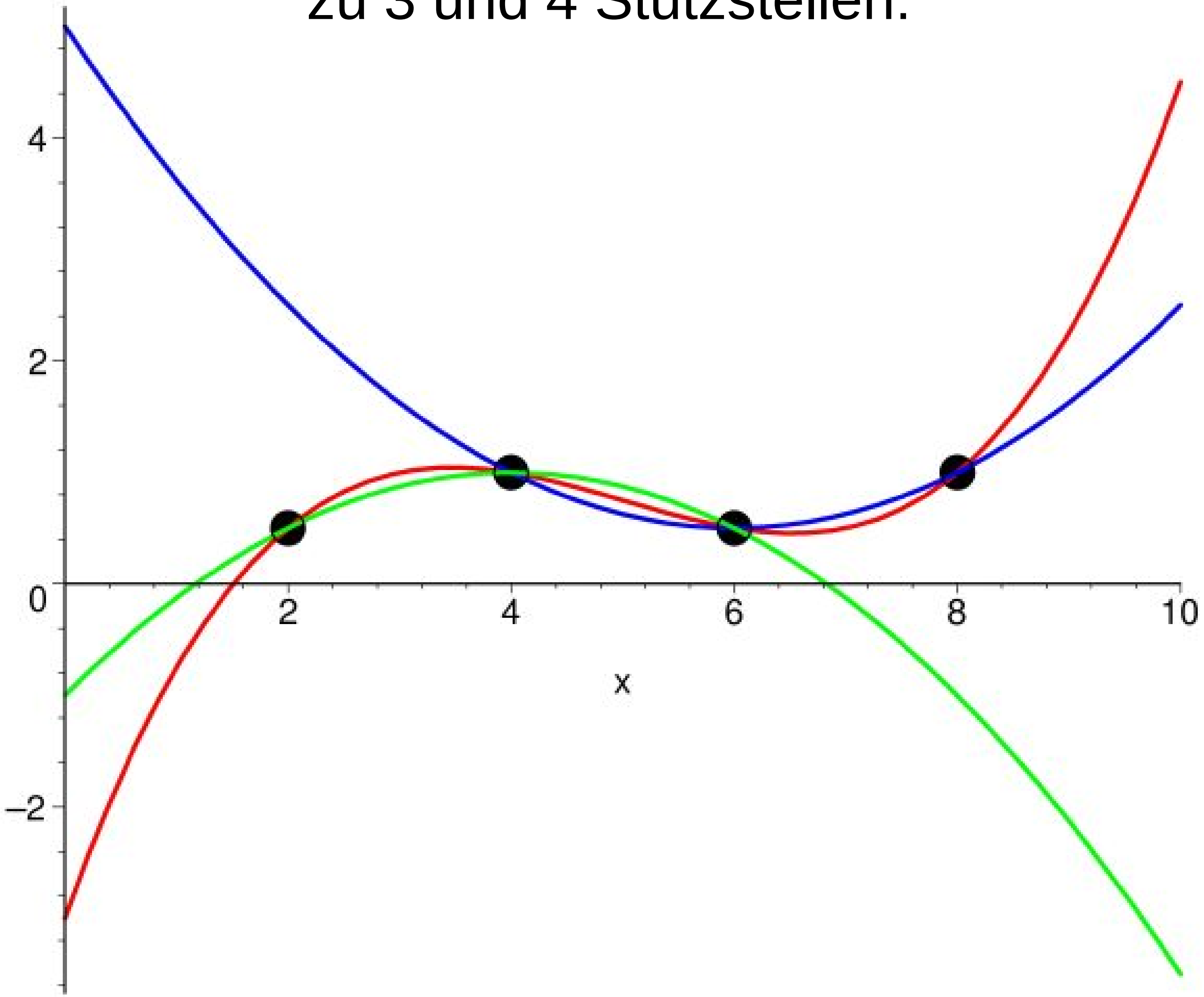
Da nach (*)

$$p_{01}(2)=\frac{(2-0)\cdot 3-(2-1)\cdot 1}{1-0}=5$$

$$p_{12}(2)=\frac{(2-1)\cdot 2-(2-3)\cdot 3}{3-1}=\frac{5}{2}$$

und daher auch $p_{012}(2)=\dfrac{(2-0)\cdot {}^{5}\!/\!_{2}-(2-3)\cdot 5}{3-0}=\dfrac{10}{3}$

Folge von Interpolationspolynomen zu 3 und 4 Stützstellen:



interpol.m