Vorteile:

Gesamtkosten der Transformation O(n)
Differenz-Anteile meist klein → gut komprimierbar

Differenzanteil auf Level k enthält Information über das Verhalten von v auf diesem Level, bzw. in dieser Auflösung
→

Multiskalenanalyse, Zerlegung des Vektors in verschiedene Frequenzbereiche = Skalen
Entspricht in etwa der Fourier-Analyse

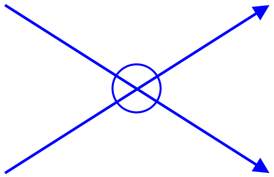
Filter muss leicht umkehrbar (invertierbar) sein!
Rekonstruktionsbedingung! (vgl. DFT und IDFT)

Algorithmische Ähnlichkeit zur Fourier-Transformation am Beispiel des Haar-Filters mit den Masken

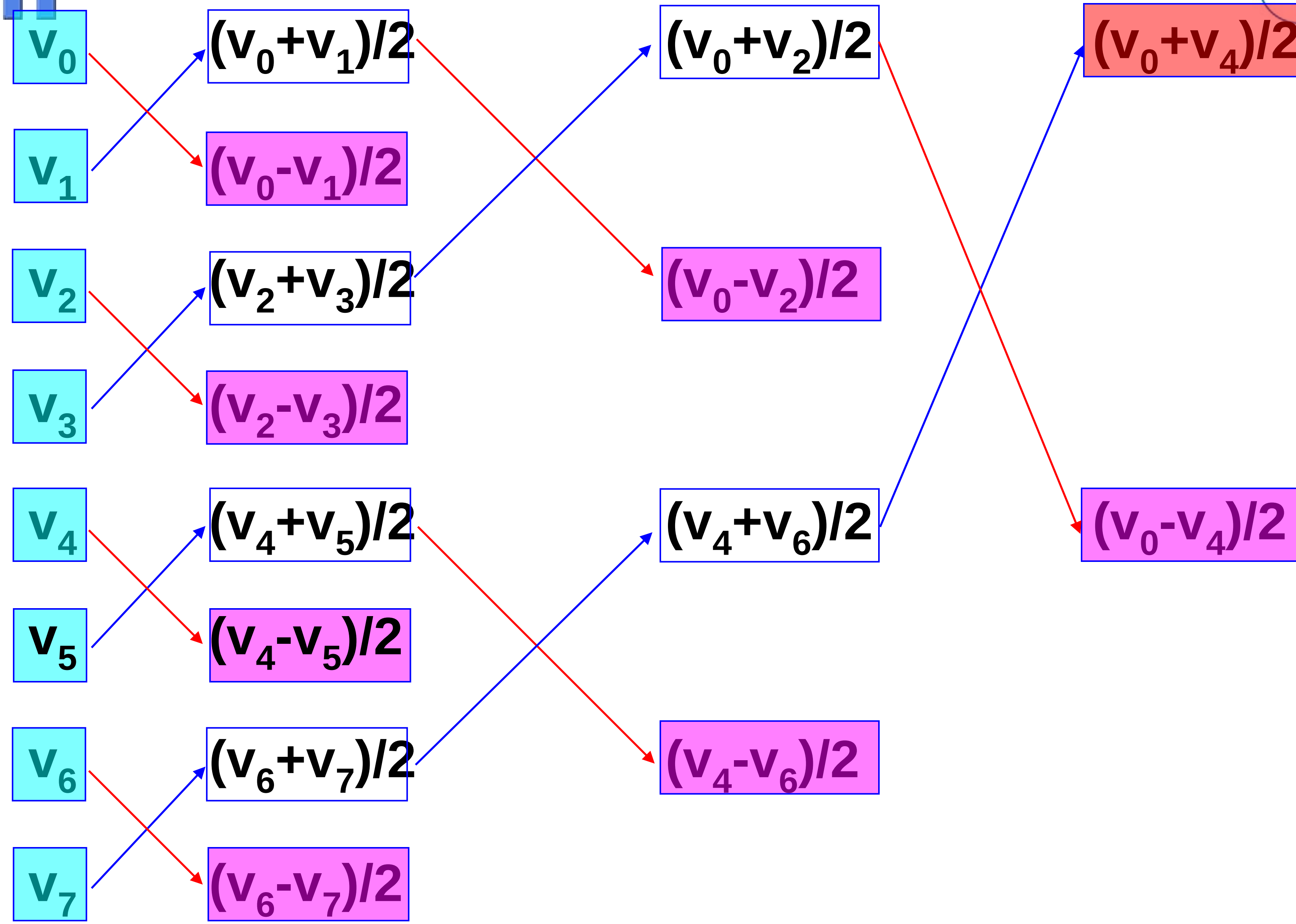
$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & -1\end{bmatrix} \quad :$$

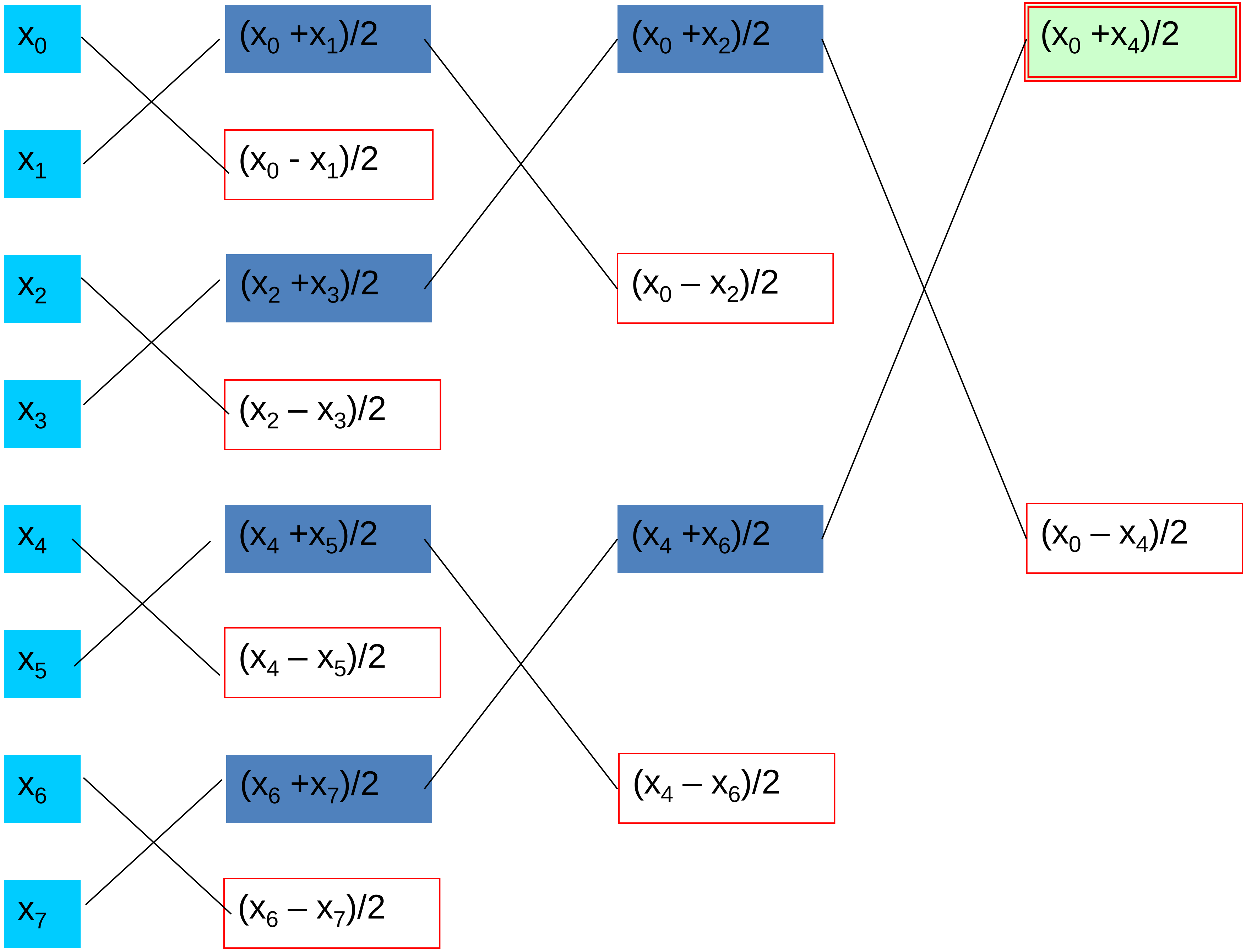
u **(u+v)/2**

Butterfly



v **(u-v)/2**


v_0
v_1
v_2
v_3
v_4
v_5
v_6
v_7
$(v_0+v_1)/2$
$(v_0-v_1)/2$
$(v_2+v_3)/2$
$(v_2-v_3)/2$
$(v_4+v_5)/2$
$(v_4-v_5)/2$
$(v_6+v_7)/2$
$(v_6-v_7)/2$
$(v_0+v_2)/2$
$(v_0-v_2)/2$
$(v_4+v_6)/2$
$(v_4-v_6)/2$
$(v_0+v_4)/2$
$(v_0-v_4)/2$


x0
x1
x2
x3
x4
x5
x6
x7
(x0 +x1)/2
(x0 - x1)/2
(x2 +x3)/2
(x2 – x3)/2
(x4 +x5)/2
(x4 – x5)/2
(x6 +x7)/2
(x6 – x7)/2
(x0 +x2)/2
(x0 – x2)/2
(x4 +x6)/2
(x4 – x6)/2
(x0 +x4)/2
(x0 – x4)/2

v wird dabei transformiert in
alle Differenzanteile und
den letzten Mittelwert.

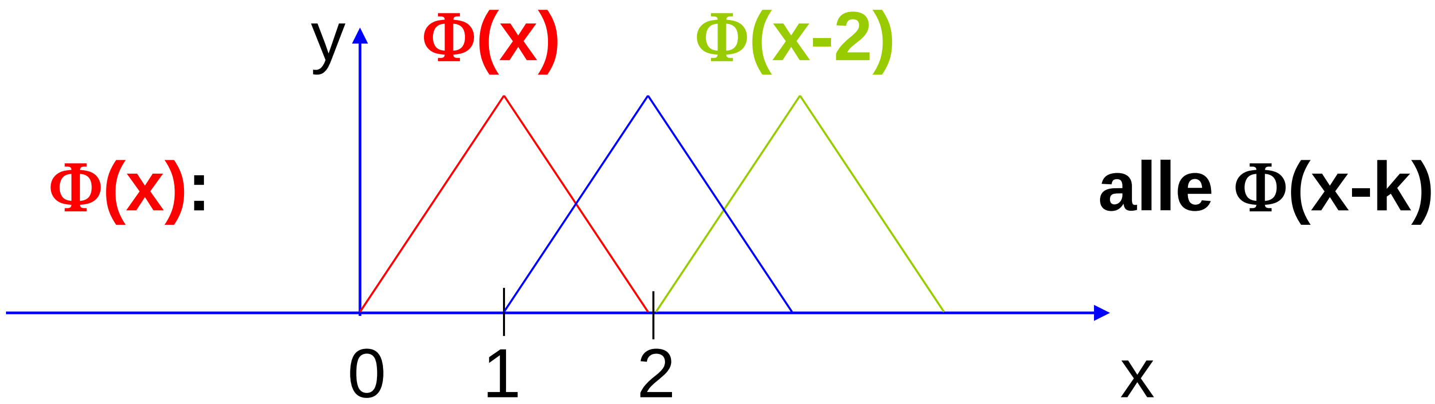
Unterschied zur DFT:

keine Sortierphase,
einfacher Butterfly,
nur die Mittelwertanteile werden weiter bearbeitet

→ *O(n)*

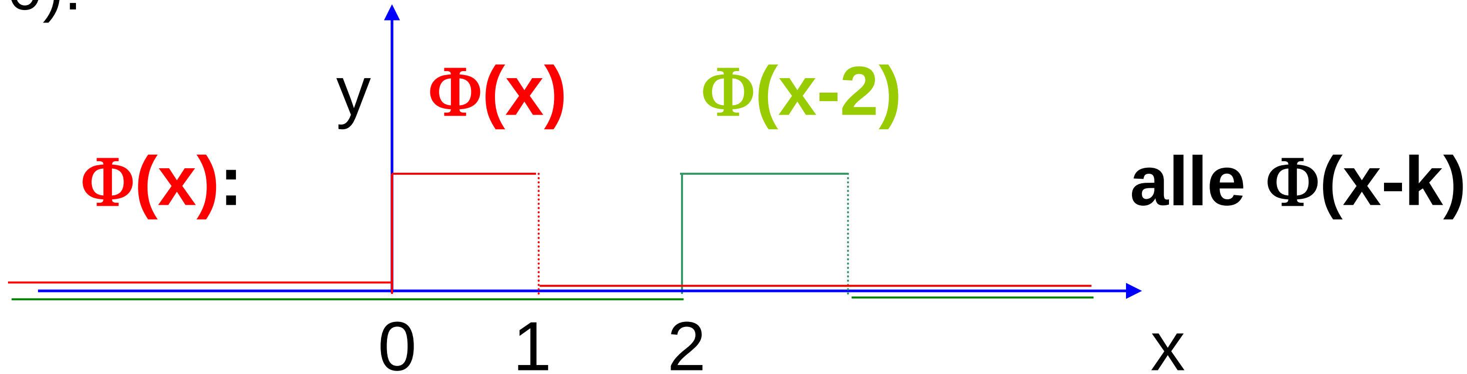
Funktionsansatz:

Erinnerung: lineare B-Splines (Hut-Funktion)



Äquidistante Stützstellen …,-1,0,1,2,…

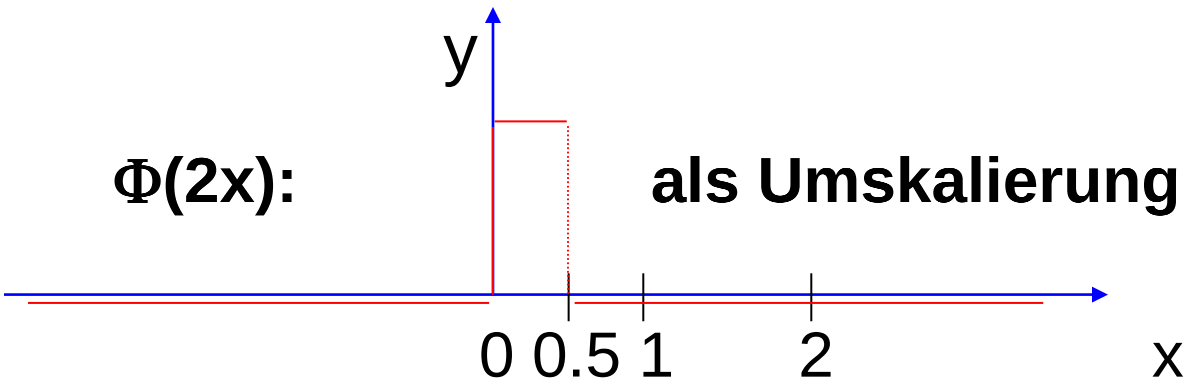
Zur Vereinfachung betrachten wir den konstanten B-Spline (k=0):



$\Phi(x)$ heißt Skalierungsfunktion und liefert Basis $\Phi(x-k)$, k
Weiterhin erfüllt $\Phi(x)$ die Gleichung

$$\mathbf{\Phi(x) = (\textcolor{red}{1} \cdot \Phi(2x) + \textcolor{red}{1} \cdot \Phi(2x-1))}$$

$\Phi(2x)$: **als Umskalierung von $\Phi(x)$**



Genauso liefern $\Phi(2x-k)$ (feinere) Ansatzfunktionen

z.B. 1= $\Phi(0.25)$ =

= ($\Phi(2*0.25)$ + $\Phi(2*0.25-1)$) = $\Phi(0.5)$ = 1

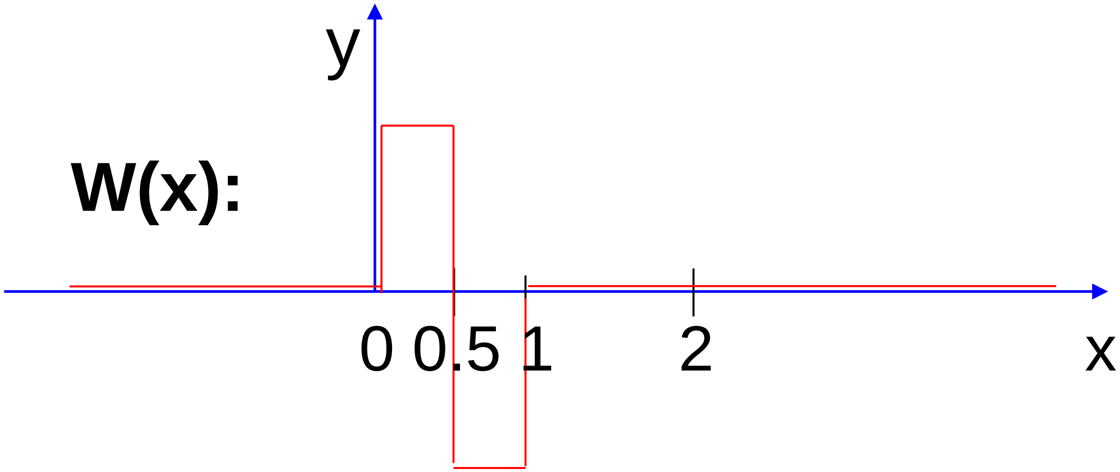
Filter-Maske **[1 1]** , denn

1*$\Phi(2x)$ + 1*$\Phi(2x-1)$

zu Tiefpass-Filter (Mittelwertfilter)

Notwendig ist zweiter Hochpass-Filter (Differenz-Filter).
Definiere dazu zur Skalierungsfunktion $\Phi(x)$ die eigentliche Waveletfunktion

W(x) = 1*Φ(2x) - 1*Φ(2x-1) , Maske [1 -1]



Wichtig: Orthogonalität der Ansatzfunktionen!

$$\int \Phi(x-k) \cdot W(x-j)dx = 0$$

$\Phi(2x\text{-}k)$ sind Basis zu feinerer Diskretisierung und höherer Auflösung (Genauigkeit).

Mit den obigen Beziehungen kann $\Phi(2x)$ eindeutig durch $\Phi(x)$ und $W(x)$ dargestellt werden:

$$\boxed{\begin{aligned}\Phi(x) &= \Phi(2x) + \Phi(2x-1)\\ W(x) &= \Phi(2x) - \Phi(2x-1)\end{aligned}}$$

oder umgekehrt

$$\boxed{\begin{aligned}\Phi(2x) &= \left(\Phi(x) + W(x)\right)/2\\ \Phi(2x-1) &= \left(\Phi(x) - W(x)\right)/2\end{aligned}}$$

Gegeben: $\mathbf{f(x) = \sum a_k \cdot \Phi(2x-k)}$

Nun können wir den Übergang von Koeffizienten zur Basis $\Phi(2x-k)$ zu Koeffizienten bezgl. $\Phi(x-k)$, $W(x-k)$ beschreiben

$$\boxed{\begin{aligned}a_{2k}\cdot\Phi(2x-2k) &\rightarrow a_{2k}\cdot\left(\Phi(x-k)+W(x-k)\right)/2\\ a_{2k+1}\cdot\Phi(2x-2k-1) &\rightarrow a_{2k+1}\cdot\left(\Phi(x-k)-W(x-k)\right)/2\end{aligned}}$$

gerade/ungerade

$$f(x) = \sum a_k^{(1)} \Phi(2x-k) =$$

$$= \sum a_{2k}^{(1)} \Phi(2x-2k) + \sum a_{2k+1}^{(1)} \Phi(2x-2k-1) =$$

$$= \sum \frac{a_{2k}^{(1)}}{2} \big(\Phi(x-k) + W(x-k)\big) +$$

$$+ \sum \frac{a_{2k+1}^{(1)}}{2} \big(\Phi(x-k) - W(x-k)\big) =$$

$$= \sum \boxed{\frac{a_{2k}^{(1)} + a_{2k+1}^{(1)}}{2}} \cdot \Phi(x-k) + \sum \boxed{\frac{a_{2k}^{(1)} - a_{2k+1}^{(1)}}{2}} \cdot W(x-k) =$$

$$= \sum a_k^{(0)} \cdot \Phi(x-k) + \sum b_k^{(0)} \cdot W(x-k) =$$

$$= f^{\,tiefpass}(x) + f^{\,hochpass}(x)$$

Anwendung der beiden Filtermasken **[1 1] /2** und **[1 -1] /2** auf die Koeffizienten a_k liefert neue Koeffizienten zu hoch/tiefpass-gefilterten Teil-Funktionen.

Umgekehrt kann aus den beiden gefilterten Teilfunktionen die Gesamtfunktion f(x) wieder rekonstruiert werden mittels

$$
\begin{aligned}
& f^{\,tiefpass}(x) + f^{\,hochpass}(x) = \\
& \sum a_k^{(0)} \Phi(x-k) + b_k^{(0)} W(x-k) = \\
& = \sum a_k^{(0)} \left(\Phi(2x-2k) + \Phi(2x-2k-1)\right) + \\
& \qquad + \sum b_k^{(0)} \left(\Phi(2x-2k) - \Phi(2x-2k-1)\right) = \\
& = \sum \left(a_k^{(0)} + b_k^{(0)}\right) \cdot \Phi(2x-2k) + \\
& \qquad + \sum \left(a_k^{(0)} - b_k^{(0)}\right) \Phi(2x-2k-1) = \\
& = \sum a_{2k}^{(1)} \Phi(2x-2k) + \sum a_{2k+1}^{(1)} \Phi(2x-2k-1) = \\
& = \sum a_k^{(1)} \Phi(2x-k) = f(x)
\end{aligned}
$$

Also Anwendung der Filter

$$[\ 1 \quad 1\ ] \quad \text{und} \quad [\ 1 \quad -1\ ]$$

auf die Koeffizienten der hoch/tiefpassgefilterten Koeffizienten liefert die Koeffizienten zur feineren Diskretisierung.

Funktionenfamilien auf verschiedenen Skalen:

$\Phi(x-k)$, $k = \ldots, -1,0,1,\ldots$

$\Phi(2x-k)$, $k = \ldots, -1,0,1,\ldots$

....

$\Phi(2^j x-k)$, $k = \ldots, -1,0,1,\ldots$, $j = \ldots,-1,0,1,\ldots$

Basisumrechnung von f(x):

$$\Phi(2^j x-k)$$

$$\Phi(2^{j-1}x-k) \qquad W(2^{j-1}x-k)$$

beschrieben durch die Transformation der Koeffizienten:

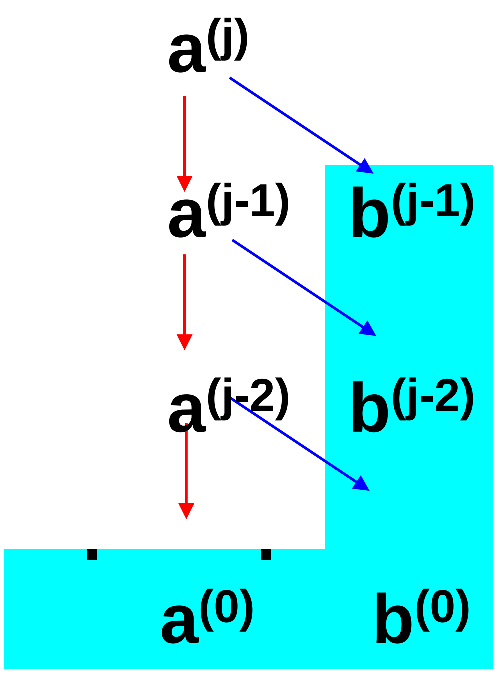
$$\begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \\ a_k^{(j-1)} \\ b_k^{(j-1)} \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & & & & \\ 1 & -1 & & & & \\ & & 1 & 1 & & \\ & & 1 & -1 & & \\ & & & & \ddots & \ddots \\ & & & & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \cdot a^{(j)}$$

entsprechend Tief- und Hochpassfilter mit Haar-Filter.

Umkehrung mit

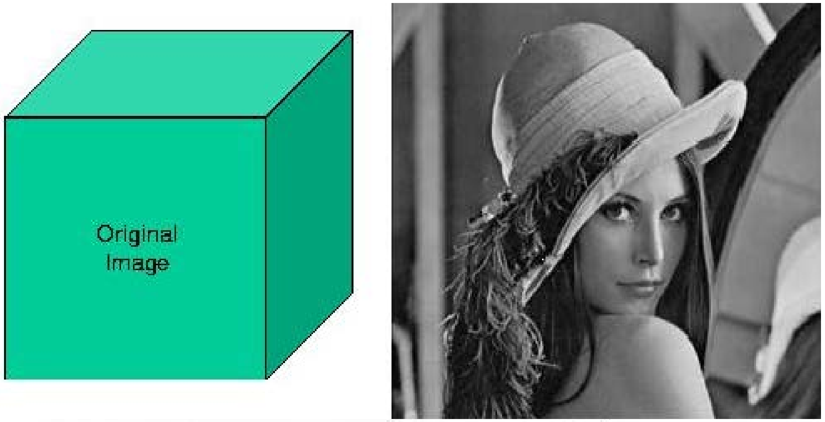
$$a^{(j)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & & & & \\ 1 & -1 & & & & \\ & & 1 & 1 & & \\ & & 1 & -1 & & \\ & & & & \ddots & \ddots \\ & & & & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \\ a_k^{(j-1)} \\ b_k^{(j-1)} \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}$$

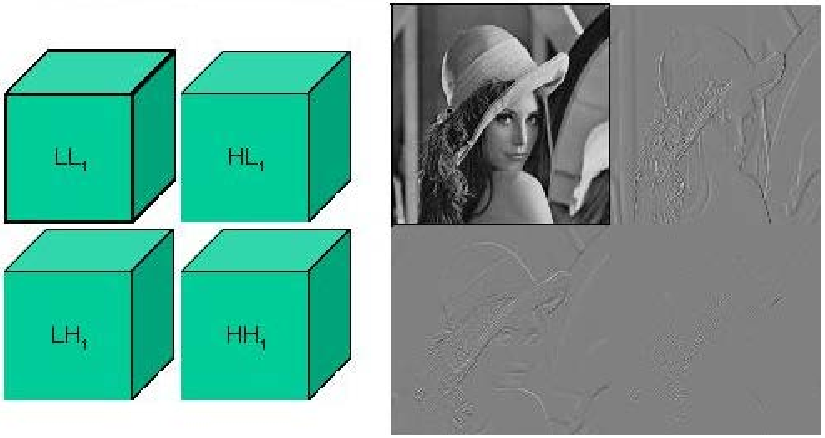
Rekursive Wiederholung:

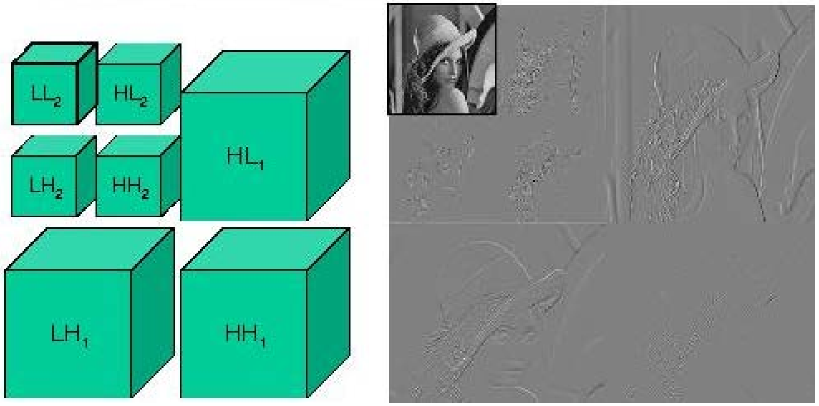


Wavelet als Verschmelzung der
klassischen Filter und
Fourieranalyse mit der Idee
lokaler Basisfunktionen wie bei den B-Splines.

Haar-Filter ←→ Haar-Wavelet

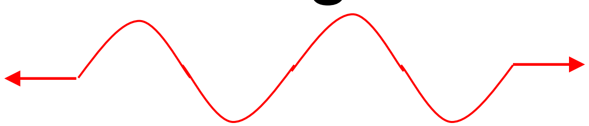

Original
Image


LL_1
HL_1
LH_1
HH_1


LL_2
HL_2
LH_2
HH_2
HL_1
LH_1
HH_1

Fourier-Analyse
FFT

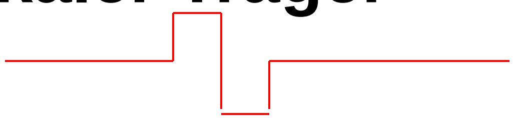
cos(kx), sin(kx)
Skalierung k
Alle gleichberechtigt
globaler Träger



keine Variations-
möglichkeit
Kantenproblem
Volle Rekursion
Kosten O(n log(n))
Frequenz aus
Fourierkoeffizienten

Multiskalen-Analyse
Wavelet

$W(2^j x\text{-}m)$, $\Phi(2^j x\text{-}m)$
Shift m, Skalierung 2^j
Mittelwert/Differenz
lokaler Träger



Wahl von Approximations-
güte und Diff'barkeit
Lokal, adaptiv
Rekursion nur im Mittelwert
Kosten O(n)
Frequenz aus
Wavelekoeffizienten

VI. Iterationsverfahren

To infinity and beyond

Falls eine direkte Lösung des Problems nicht möglich oder ineffizient ist.

6.1. Fixpunktgleichungen

6.1.1. Problemstellung:

Iterationsfunktion $\Phi(x)$

Iteration: $x_0 \in R$ Startwert,

$$x_{k+1} := \Phi(x_k) \in \Re\ , \ k=0,1,\ldots$$

Dadurch ist eine Folge x_k definiert.

Ist diese Folge konvergent:

$$x_k \rightarrow \bar{x} \quad \text{für } k \rightarrow \infty,$$

so folgt für eine stetige Funktion Φ:

$$\bar{x} = \lim_{k\to\infty} x_k = \lim_{k\to\infty} \Phi(x_{k-1}) = \Phi(\lim_{k\to\infty} x_{k-1}) = \Phi(\bar{x})$$

$\bar{x}$ heißt Fixpunkt von Φ in **R**.

Beispiel: $\Phi(x) = x^2$, also $x_{k+1} := \Phi(x_k) = (x_k)^2$
oder

$$x_k = x_{k-1}^2 = x_{k-2}^4 = \cdots = x_0^{\left(2^k\right)}$$

Das Konvergenzverhalten hängt vom Startwert x_0 ab :

$$
\begin{array}{lllll}
x_0 = 0 & \Rightarrow & x_k = 0, & k = 1,2,\ldots, & \bar{x}_1 = 0 \\
x_0 = \pm 1 & \Rightarrow & x_k = 1, & k = 1,2,\ldots, & \bar{x}_2 = 1 \\
0 < |x_0| < 1 & \Rightarrow & x_k = x_0^{2^k} \to 0 & k \to \infty, & \bar{x}_1 = 0 \\
|x_0| > 1 & \Rightarrow & x_k = x_0^{2^k} \to \infty & k \to \infty, & (\bar{x}_3 = \infty)
\end{array}
$$

Φ hat daher den Fixpunkte 0, bzw. ist divergent
(könnte man als Fixpunkt ∞ bezeichnen).

Die Folgen sind jeweils monoton für $k > 0$.

1 ist ebenfalls Fixpunkt, kann aber nur vorkommen, wenn man mit ± 1 startet;
1 heißt daher <u>abstoßender</u> Fixpunkt.

6.1.2. Beispiel: Ausbreitung eines Grippevirus in einem Kindergarten

Zu Zeitpunkt t_i bezeichnen wir mit k_i die relative Anzahl erkrankter Kinder, also

k_i = # kranke Kinder / # Kinder.

t_i ist diskrete Folge von Zeitpunkten.

Infektionsrate α > 1, (= Übertragungswahrscheinlichkeit)

Bei jeder Kontaktaufnahme zweier Kinder kann daher eine Virusübertragung stattfinden; daher ist die Zahl neu Erkrankter zum nächsten Zeitpunkt direkt proportional zur Zahl der möglichen Begegnungen zwischen einem kranken und einem gesunden Kind.

Ein Kind, das zum Zeitpunkt t_i krank ist, ist zum Zeitpunkt t_{i+1} wieder gesund, kann sich aber wieder anstecken

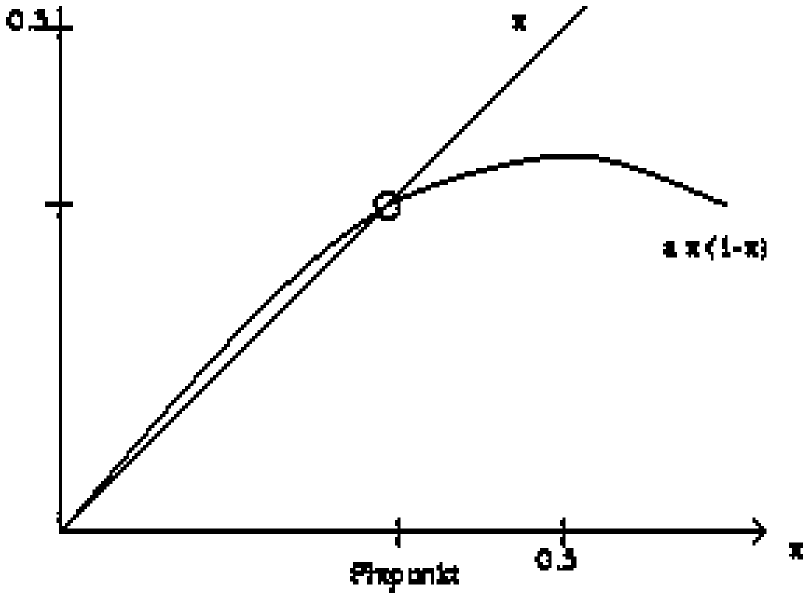
(Diese Annahme dient der Vereinfachung des Modells).

Ergibt Formel: $k_{i+1} = \alpha\, k_i (1 - k_i)$

$= \alpha$* #*Kranke* * #*Gesunde*

Dazugehörige Iterationsfunktion: $\Phi(x) = \alpha\; x(1 - x)$

beschreibt eine konkave Parabel, die logistische Parabel.

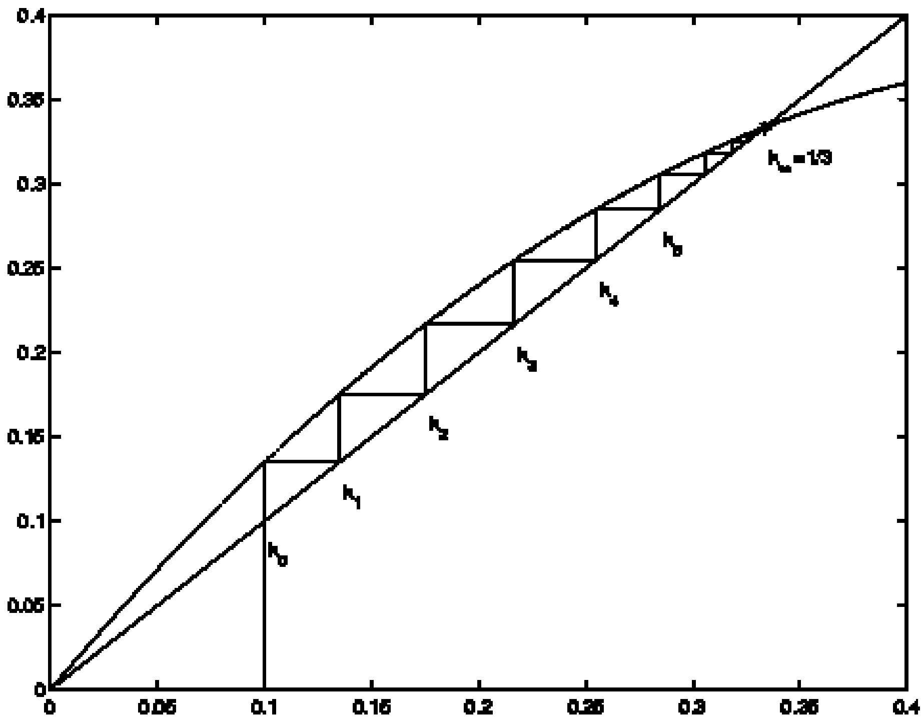


Relatives Maximum bei x = 0.5 mit Wert $\Phi(0.5) = 0.25\alpha$;
Nullstellen bei x = 0 und x = 1;

Fixpunkt als Schnittpunkt von Φ mit der Funktion $g(x) \equiv x$:

$$\bar{x} = \Phi(\bar{x}) = \alpha\bar{x}(1-\bar{x}) \quad \Rightarrow \quad \bar{x} = \frac{\alpha - 1}{\alpha}$$

Für $1 < \alpha < 2$ existiert genau ein eindeutiger Fixpunkt dieser Iteration zwischen 0 und 0.5.



z.B. x_0=0.1 und α=1.5

Konvergiert monoton wachsend gegen 1/3

Fixpunkt geometrisch:
Schnittpunkt zwischen Iterationsfunktion $\Phi(x)$ und
Gerade $g(x) \equiv x$.

6.1.3. Banach'scher Fixpunktsatz

Frage:

Wann konvergiert die so erzeugte Folge und wann nicht?

Welche Eigenschaften müssen Φ und x_0 haben,
damit Konvergenz gegen einen (ev. eindeutigen) Fixpunkt vorliegt?

Banach'scher Fixpunktsatz:

Sei I ein abgeschlossenes Intervall, Startwert $x_0 \in I$,
Φ eine Abbildung $\Phi: I \rightarrow I$, d.h. $\Phi(I) \subseteq I$,
Φ sei in I eine kontrahierende Abbildung, d.h. es gibt eine Konstante $0 < L < 1$ mit

$$x, y \in I \Rightarrow \left|\Phi(x) - \Phi(y)\right| \le L \cdot \left|x - y\right|.$$

Dann konvergiert die Folge $x_{k+1} := \Phi(x_k)$
gegen den eindeutigen Fixpunkt $\bar{x} \in I$,
also $x_k \rightarrow \bar{x} = \Phi(\bar{x})$ für $k \rightarrow \infty$.

Beweis: Offensichtlich gilt stets $x_k \in I$; daher folgt

$$\left|x_{k+1} - x_k\right| = \left|\Phi(x_k) - \Phi(x_{k-1})\right| \le L\left|x_k - x_{k-1}\right| \le$$
$$\le L\left(L\left|x_{k-1} - x_{k-2}\right|\right) \le \cdots \le L^k\left|x_1 - x_0\right|.$$

Damit ergibt sich für den Abstand zweier Iterierter x_k und x_m für $m>k$:

$$|x_m - x_k| = |(x_m - x_{m-1}) + (x_{m-1} - x_{m-2}) + \cdots + (x_{k+1} - x_k)| \le$$

$$\le |x_m - x_{m-1}| + |x_{m-1} - x_{m-2}| + \cdots + |x_{k+1} - x_k| \le$$

$$\le \left(L^{m-1} + L^{m-2} + \cdots + L^k\right) \cdot |x_1 - x_0| \le$$

$$\le \sum_{j=k}^{\infty} L^j \cdot |x_1 - x_0| = \frac{L^k}{1-L} \cdot |x_1 - x_0|.$$

Daher wird der Abstand zwischen zwei Iterierten beliebig klein, wenn sie beide großen Index haben:

$$|x_m - x_k| \le \varepsilon \qquad \text{für} \qquad m, k \ge N(\varepsilon)$$

Die Zahlen x_k bilden daher eine Cauchy-Folge!

Cauchy-Folgen sind konvergent in I, da I abgeschlossen ist!

(dies ist genau die mathematische Definition von Abgeschlossenheit).

Daher existiert eine Zahl $\overline{x} \in I$ mit $x_k \to \overline{x}$ für $k \to \infty$.

$\bar{x}$ ist der gesuchte Fixpunkt in I, denn

$$
\begin{aligned}
0 &\le \left|\bar{x} - \Phi(\bar{x})\right| \le \left|\bar{x} - x_k\right| + \left|x_k - \Phi(\bar{x})\right| \le \\
&\le \left|\bar{x} - x_k\right| + \left|\Phi(x_{k-1}) - \Phi(\bar{x})\right| \le \\
&\le \left|\bar{x} - x_k\right| + L\left|x_{k-1} - \bar{x}\right| \to 0 \qquad \textit{für} \quad k \to \infty
\end{aligned}
$$

Daher muss gelten $\quad \bar{x} - \Phi(\bar{x}) = 0.$

Dieser Fixpunkt in I ist eindeutig, denn

$$\bar{x} = \Phi(\bar{x}) \in I \qquad \textit{und} \qquad \hat{x} = \Phi(\hat{x}) \in I \qquad \textit{mit} \qquad \bar{x} \ne \hat{x} \quad \Rightarrow$$

$$\left|\bar{x} - \hat{x}\right| = \left|\Phi(\bar{x}) - \Phi(\hat{x})\right| \le L \cdot \left|\bar{x} - \hat{x}\right| < \left|\bar{x} - \hat{x}\right| \qquad \textit{falsch}\ !$$

Widerspruch, daher Annahme $\bar{x} \ne \hat{x}$ falsch, also $\bar{x} = \hat{x}$

Außerdem gilt: x_k konvergiert *linear* gegen $\bar{x}$, denn

$$\underline{\left|x_{k+1}-\bar{x}\right|} = \left|\Phi(x_k)-\Phi(\bar{x})\right| \le L\underline{\left|x_k-\bar{x}\right|} \le \cdots$$

$$\cdots \le L^{k+1}\left|x_0-\bar{x}\right| \to 0, \quad L<1 \qquad \#$$

Um den Satz anwenden zu können benötigt man also,
dass Φ ein Intervall in sich abbildet, und zwar so,
dass die Funktionswerte dabei näher zusammenrücken.

L < 1 heißt Lipschitz-Konstante.

Ist Φ diff'bar, so lassen sich diese Bedingungen mit Hilfe
des Mittelwertsatzes vereinfachen:

Für x,y∈I ist dann nämlich

$$\Phi(y) = \Phi(x) + \Phi'(z) \cdot (y - x)$$

mit einer Zahl z zwischen x und y.

Daher gilt: $$\left|\Phi(y) - \Phi(x)\right| \le \max_{z \in I} \left|\Phi'(z)\right| \cdot \left|y - x\right|$$

Ist nun |Φ'(z)| < 1 in I, so kann man

$$L := \max_{z \in I} \left|\Phi'(z)\right|$$ setzen.

Wir betrachten den Mittelwertsatz jetzt speziell in der Nähe eines Fixpunktes x . Dann gilt:

Sei |Φ'($\bar{x}$)| < 1; dann kann man eine Umgebung U von $\bar{x}$ angeben, in der Φ kontrahierend ist und Φ(U) ⊆ U gilt (es liegt dann also lokale Konvergenz vor).

Sei $|\Phi'(\overline{x})| < 1$; dann kann man eine Umgebung U von $\overline{x}$ angeben, in der Φ kontrahierend ist und $\Phi(U) \subseteq U$ gilt (es liegt dann also lokale Konvergenz vor).

Beweis: Setze $U := [\,\overline{x}-h\,,\overline{x}+h\,]$ und wähle dabei $h > 0$ so klein, dass immer noch

$$L := \max_{z \in U} \left|\Phi'(z)\right| < 1$$

gilt (Φ' ist ja stetig!).

Für ein $x \in U$ folgt dann $\left|\Phi(x) - \overline{x}\right| = \left|\Phi(x) - \Phi(\overline{x})\right| \le L \cdot \left|x - \overline{x}\right| < h$

und daher ist auch $\Phi(x) \in U$.

Also insgesamt: $\Phi(U) \subseteq U$ und außerdem ist Φ kontrahierend in U.
Daher ist der Banach'sche Fixpunktsatz anwendbar.

Einen Fixpunkt $\bar{x}$ mit $|\Phi'(\bar{x})| < 1$ nennt man **‚anziehenden Fixpunkt'.**

Im Beispiel x^2 ist 0 anziehender Fixpunkt, da $\Phi'(0)=2*0 = 0<1$

Daher gilt für $L = 0.5$ und $U = [-0.25 , 0.25]$, dass $\Phi(x) = x^2$ in U eine kontrahierende Selbstabbildung von U ist → mit dem Fixpunktsatz von Banach: Konvergenz in U gegen Fixpunkt 0!

Andererseits heißt ein Fixpunkt $\bar{x}$ mit $|\Phi'(\bar{x})| > 1$ **abstoßender Fixpunkt,**

da keine kontrahierende Umgebung für Φ existiert.

Im Beispiel x^2 ist 1 abstoßender Fixpunkt,

da $\Phi'(1) = 2*1 = 2 > 1$.

Beispiel Grippevirus: $\Phi(x) = \alpha x(1-x)$

mit Fixpunkt $\bar{x} = (\alpha - 1)/\alpha$

Dann gilt $\Phi'(\bar{x}) = \alpha(1-2\bar{x}) = \alpha\left(1-2\frac{\alpha-1}{\alpha}\right) = 2-\alpha$

$\bar{x} = (1-\alpha)/\alpha$ ist anziehender Fixpunkt für $1 < \alpha < 3$.

Für $\alpha >= 3$ ergibt sich abstoßender Fixpunkt!
Keine Konvergenz!

Für $\alpha <= 1$ kein Fixpunkt im Intervall [0,1].

Wegen $x_{k+1} = \Phi(x_k) = \bar{x} + \Phi'(z)(x_k - \bar{x})$

gilt außerdem $x_{k+1} - \bar{x} = \Phi'(z)(x_k - \bar{x})$

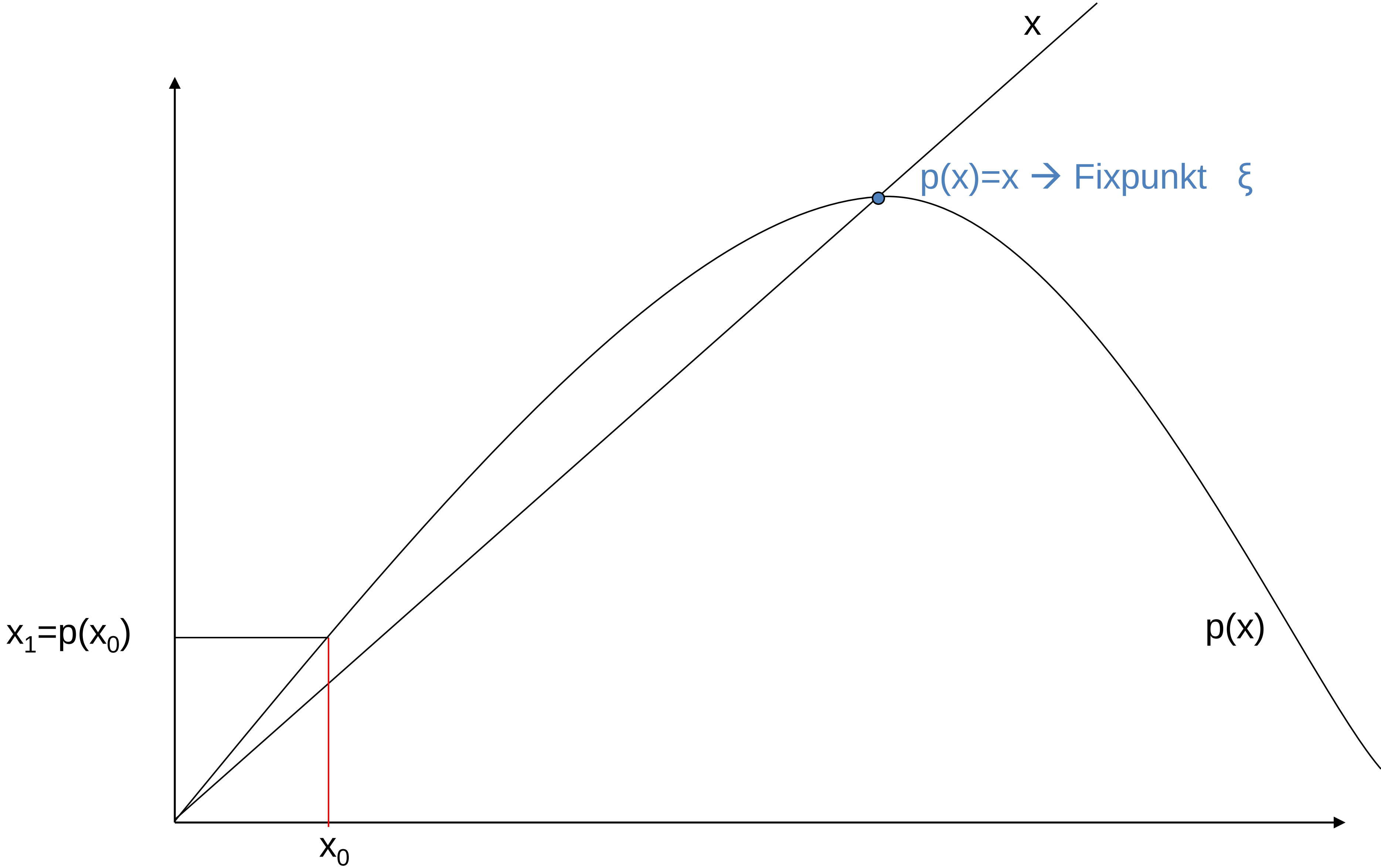
Daher ist für $1 < \alpha < 2$ $\Phi'(\bar{x}) > 0$, und die Folge x_k ist lokal monoton wachsend oder fallend, je nach Startwert rechts oder links vom Fixpunkt.

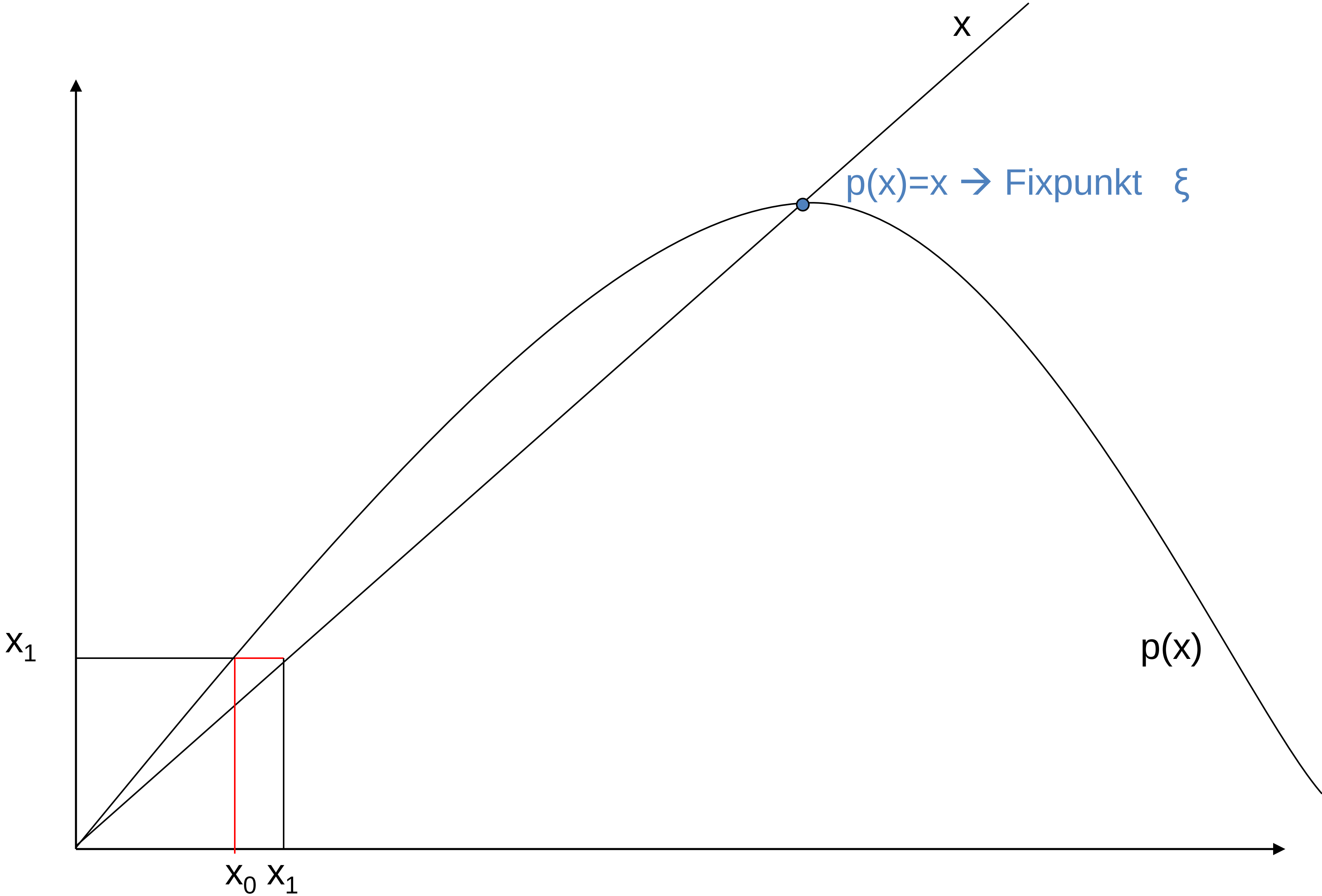
$$x_{k+1} - \bar{x} = \Phi'(z)(x_k - \bar{x})$$

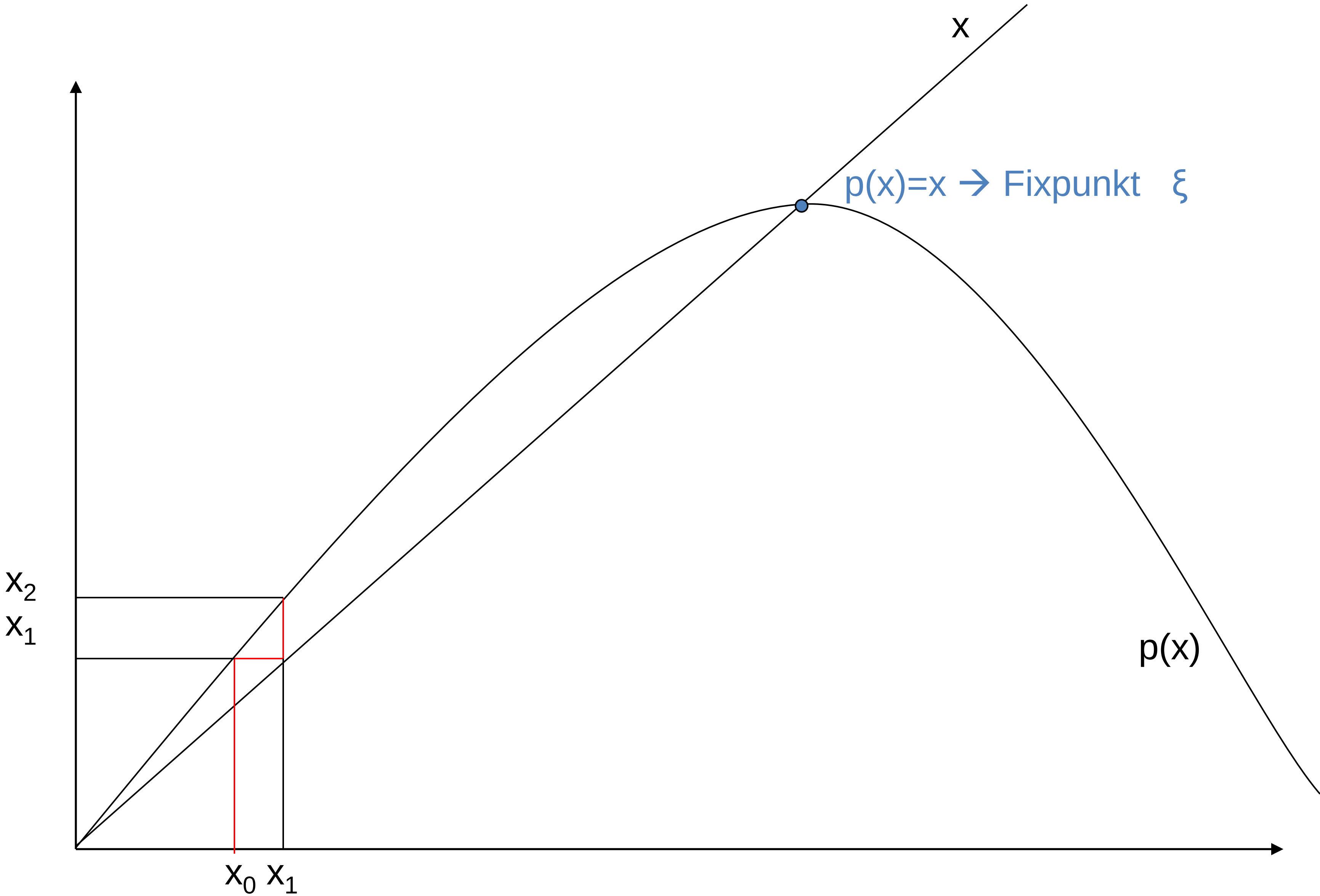
(die x_k liegen stets auf derselben Seite, rechts oder links vom Fixpunkt)

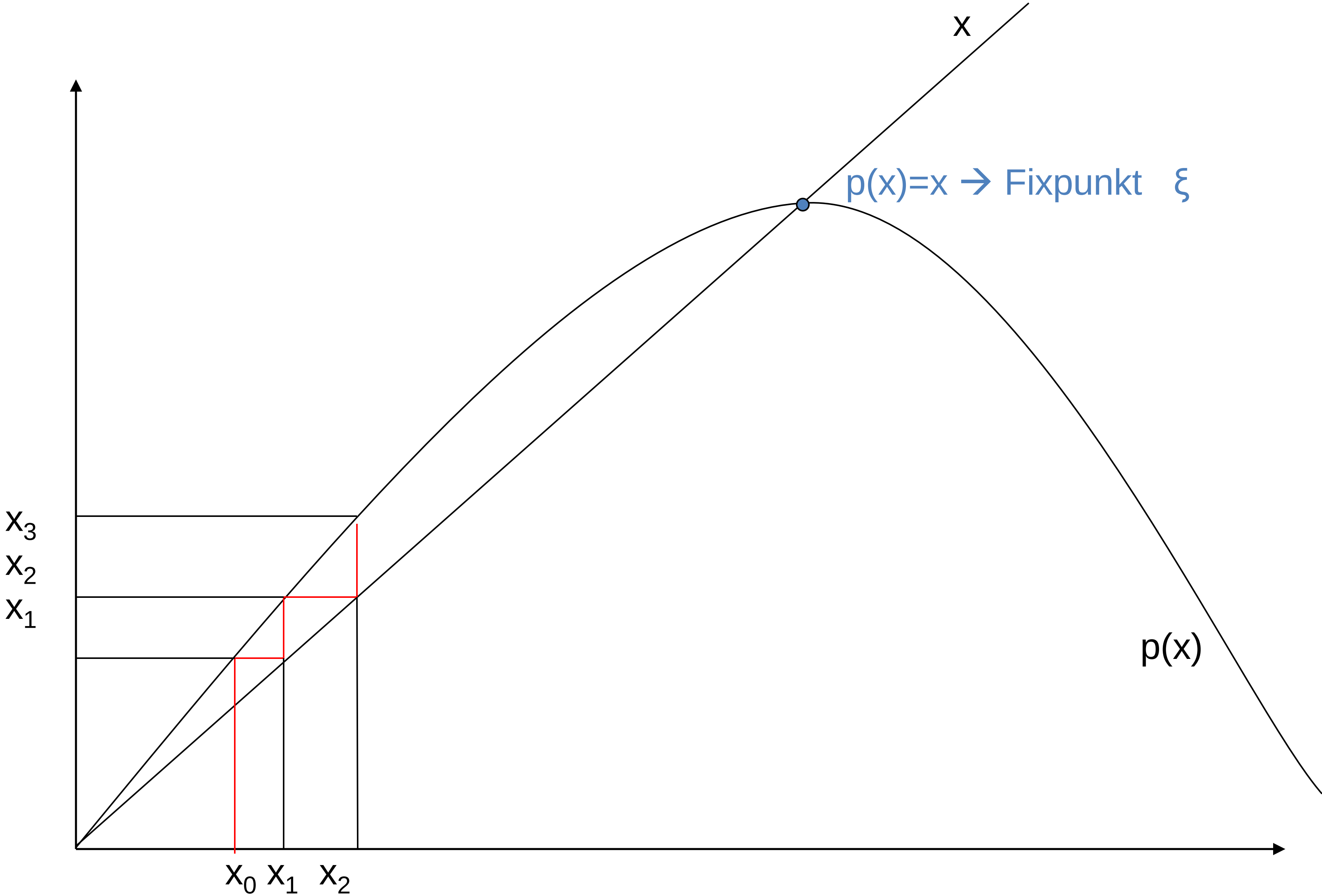
Dagegen konvergiert für $2 < \alpha < 3$ die Folge alternierend,

da $\Phi'(\bar{x}) < 0$ ist.

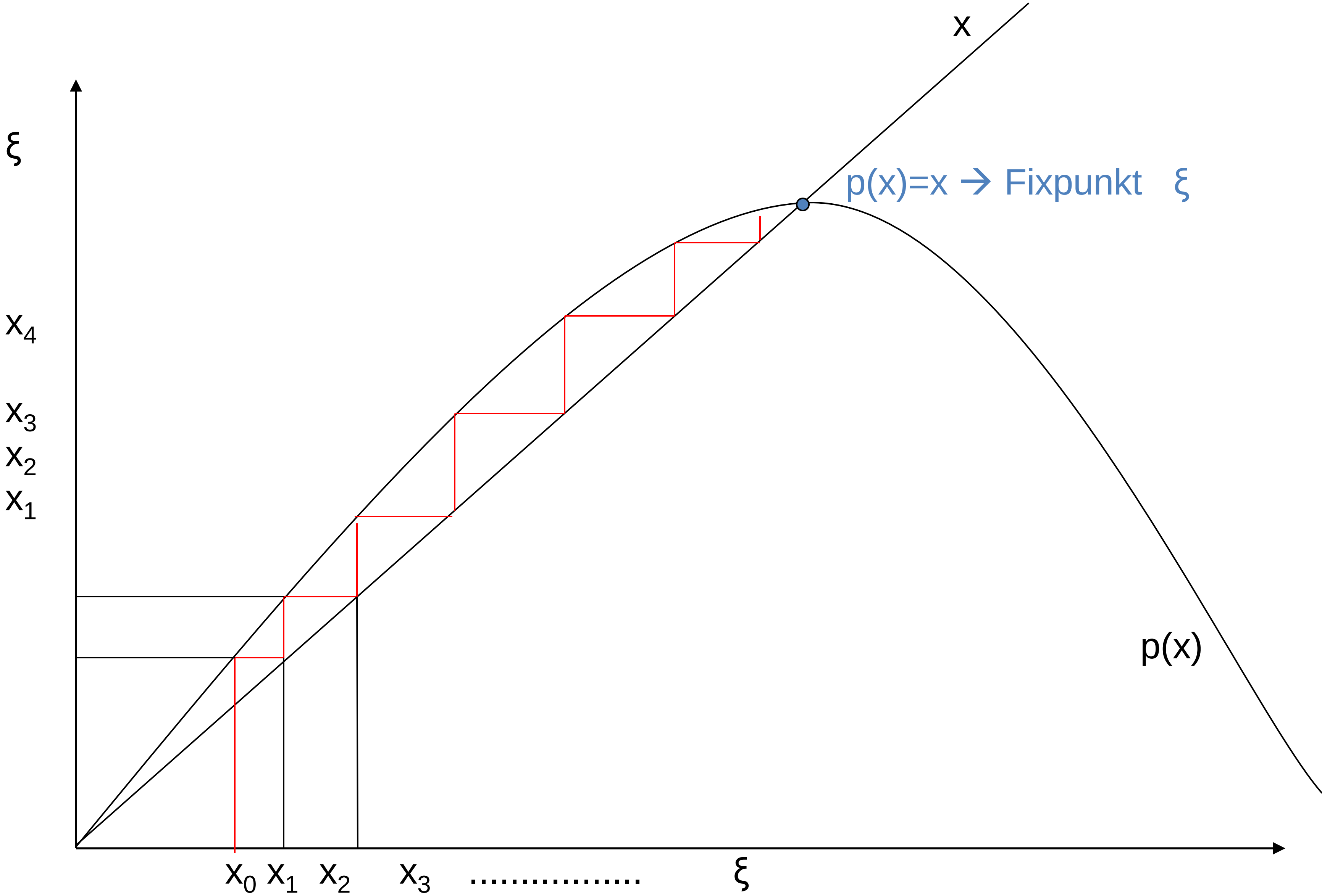

x
p(x)=x → Fixpunkt ξ
$x_1=p(x_0)$
p(x)
x_0


x
p(x)=x → Fixpunkt ξ
x1
p(x)
x0 x1

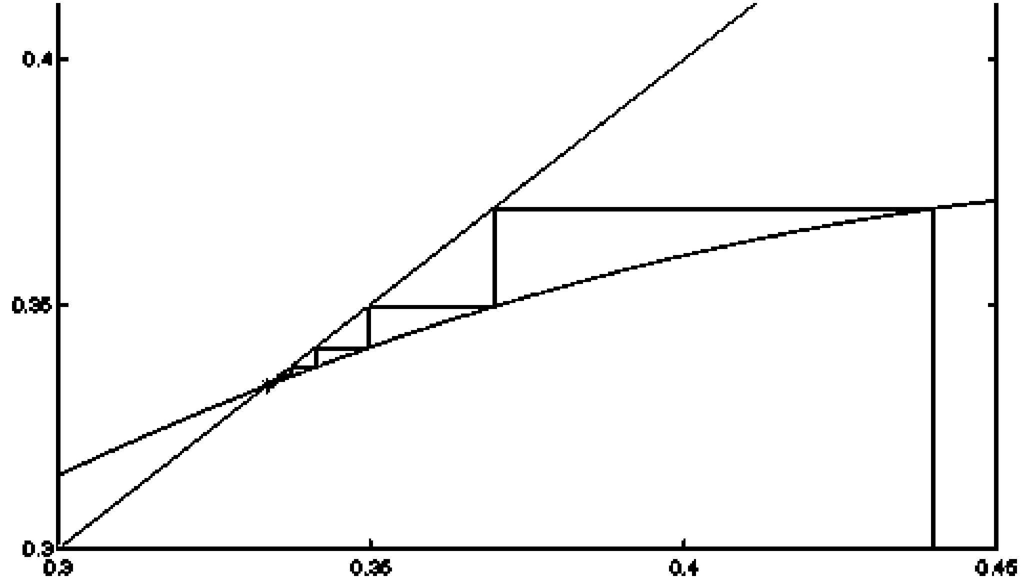

x
p(x)=x → Fixpunkt ξ
x2
x1
p(x)
x0 x1



x
p(x)=x → Fixpunkt ξ
x3
x2
x1
p(x)
x0 x1 x2

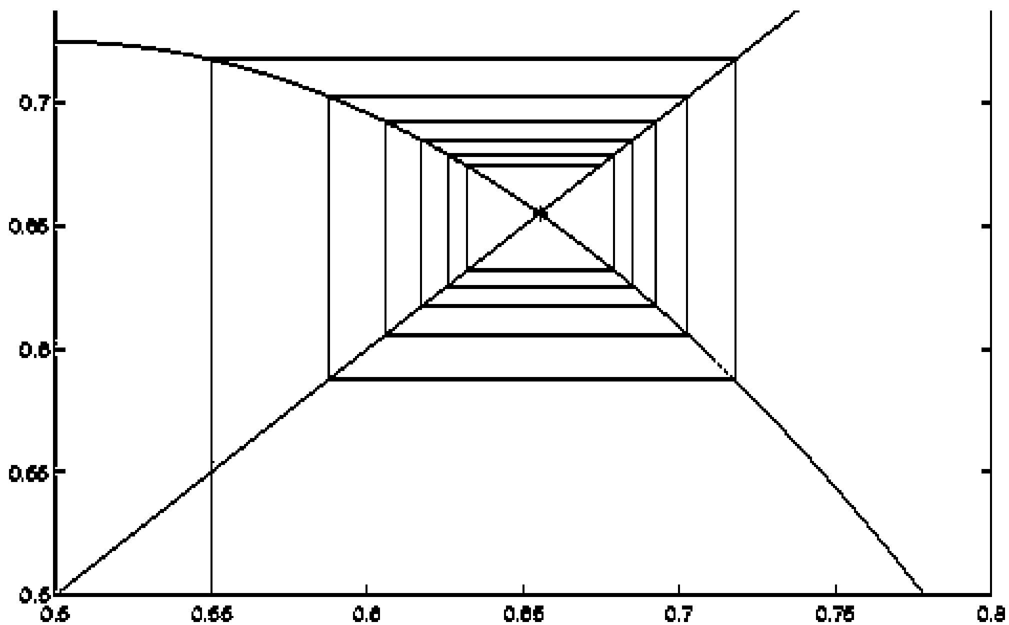


x
ξ
p(x)=x → Fixpunkt ξ
x_4
x_3
x_2
x_1
p(x)
x_0 x_1 x_2 x_3 .... ξ



α= 1.5 und Startwert 0.44 →

monoton fallende Konvergenz



α = 2.9 und Startwert 0.55 →

alternierende Konvergenz