Technische Universität München
Institut für Informatik
Prof. Dr. Thomas Huckle
Dipl.-Inf. Christoph Riesinger
Dipl.-Math. Jürgen Bräckle

SoSe 2013

Numerisches Programmieren, Übungen

3. Übungsblatt: Gaußelimination, LR-Zerlegung, Pivotsuche, QR-Zerlegung

1) LR-Zerlegung

In dieser Aufgabe wollen wir den Algorithmus der LR-Zerlegung aus der Vorlesung an Beispielen nachvollziehen und vergleichen.

Die LR-Zerlegung zur Lösung eines linearen Gleichungssystems $Ax = b$ besteht aus drei Teilen:
1. Zerlegung der Matrix A**:** $A = L \cdot R$
2. Vorwärtssubstitution: $Ly = b$
3. Rückwärtssubstitution: $Rx = y$

i) Lösen Sie unter Verwendung der Gauß-Elimination das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

ii) Berechnen Sie die Zerlegung (1.) der Matrix A.

iii) Führen Sie nun zur Lösung von $Ax = b$ die Vorwärts- und Rückwärtssubstitution (2.) und (3.) durch. Verwenden Sie den Vektor b aus Teilaufgabe i).

iv) Setzen Sie die LR-Zerlegung ebenfalls zur Lösung von $Ax = c$ mit $c = (2, 1, 2)^T$ ein. Wie groß ist der zusätzliche Aufwand?

2) Gauß-Elimination und Pivotsuche

Lösen Sie das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} -10^{-3} & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} x \;=\; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit der Gauß-Elimination:

i) Ohne Spalten-Pivotsuche (keine Zeilenvertauschungen) in exakter Arithmetik (d.h. mit Brüchen rechnen)!

ii) Ohne Spalten-Pivotsuche (keine Zeilenvertauschungen) mit Rundungsfehlern: jedes Zwischenergebnis auf 3 Dezimalstellen runden (Gleitpunktarithmetik mit $B = 10$, $t = 3$ und korrekter Rundung: $0.01236 = 123.6 \cdot 10^{-4}$ ergibt 0.0124).

iii) Mit Spalten-Pivotsuche und mit Rundungsfehlern wie in ii).

3) QR-Zerlegung mit Givens-Rotationen

Die QR-Zerlegung ist ein verwandtes Verfahren der LR-Zerlegung, das hohe Stabilität aufweist. Wieder wird die Matrix A in ein Produkt aus zwei Matrizen zerlegt:

$$A = Q \cdot R.$$

R ist wieder eine rechte obere Dreiecksmatrix, wohingegen Q nun eine orthogonale Matrix ist. Es gilt also:

$$Q^T \cdot Q = I_n \quad \text{bzw.} \quad Q^{-1} = Q^T, \quad \det(Q) = \pm 1, \quad \|Qx\|_2 = \|x\|_2,$$

wobei I_n die $n \times n$-Einheitsmatrix bezeichnet.
Angewendet auf das zu lösende Gleichungssystem $Ax = b$ ergibt sich:

$$Ax = b \quad \Leftrightarrow \quad Q \cdot Rx = b \quad \Leftrightarrow \quad Rx = Q^T b. \tag{1}$$

Damit reduziert sich das Problem auf eine Rückwärtssubstitution, sobald man die Matrizen Q und R kennt.

Wir wollen in dieser Aufgabe eine rel. einfache QR-Zerlegung mit Hilfe der sogenannten Givens-Rotationen berechnen. Die Idee ist, die Matrix Q aus aufeinanderfolgenden Drehungen aufzubauen, die – analog zum Gauß-Algorithmus – sukzessive Spalteneinträge unterhalb der Diagonalen eliminieren.

Für 2×2-Matrizen ist das nur ein einziger Eintrag (und entsprechend nur eine Drehung in der Ebene $\mathbb{R}^2$). Eine Drehung im $\mathbb{R}^2$ um den Winkel φ ist durch eine orthogonale Rotationsmatrix G_φ charakterisiert,

$$G_\varphi = \begin{pmatrix} c & s \\ -s & c \end{pmatrix}, \quad c^2 + s^2 = 1,$$

wobei $c = cos(\varphi)$ und $s = sin(\varphi)$.

Diese Rotation soll nun auf die erste Spalte $(a, b)^T$ einer 2×2-Matrix A angewendet werden und den Eintrag unter der Diagonalen zu Null machen:

$$G_\varphi \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & s \\ -s & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix}.$$

In der Praxis benötigt man den Drehwinkel φ nicht, sondern kann c und s direkt berechnen:

$$c = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad s = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Unsere gesuchte Matrix Q ist nun einfach die Inverse (also Transponierte) der Rotationsmatrix: $Q = G_\varphi^T$. Die obere Dreiecksmatrix R erhalten wir durch Multiplikation von G_φ mit A:

$$A = Q \cdot R \quad \Leftrightarrow \quad Q^{-1} \cdot A = R \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{G_\varphi \cdot A = R}.$$

i) Berechnen Sie die Matrizen Q und R mit Hilfe der Givens-Rotation nach obigem Schema für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

ii) Berechnen Sie die Lösung x des Gleichungssystems $Ax = b$ mit $b = (1, 0)^T$ mit Hilfe der QR-Zerlegung aus i)!

4) Image Stitching mit Gauß-Elimination

In dieser Aufgabe verwenden wir die Gauß-Elimination zum Lösen linearer Gleichungssysteme im Bereich des Rechnersehens. Eine der Aufgaben, die durch Techniken der Bildverarbeitung bewältigt werden, ist das Zusammensetzen von Einzelbildern (engl. image stiching) bzw. die Erzeugung von Panoramabildern. Eine derartige Funktionalität findet sich bereits in Software, die mit Mainstreamdigitalkameras ausgeliefert wird.

Will man zwei Bilder I_1 und I_2 "aneinandernähen", detektiert der entsprechende Algorithmus zunächst sogenannte Merkmalpunkte (engl. feature points) in beiden Bildern. Unter der Annahme, dass beide Bilder einen gemeinsamen Teil einer Szenerie zeigen, gibt es solche Merkmalpunkte in beiden Bildern. Anschließend findet eine Verknüpfung der Merkmalpunkte im ersten Bild I_1 mit den zugehörigen Punkten im Bild I_2 statt, wie in Abbildung 1 gezeigt.

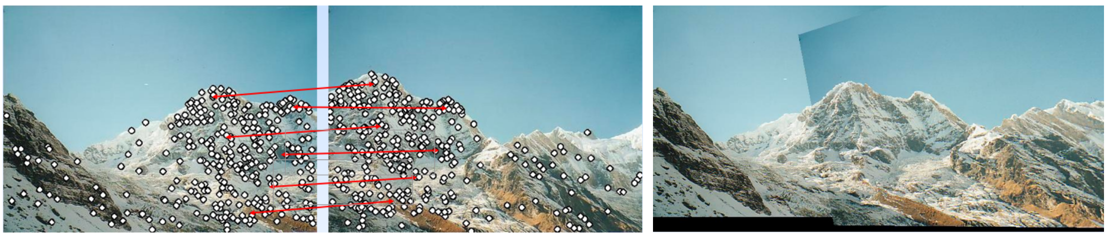

Abbildung 1: Image stiching.

In der Praxis treten viele Fehler beim Finden gemeinsamer Bildmerkmale auf. Allerdings gehen wir hier von perfekten Beziehungen zwischen den Punkten aus. Da sich die Punkte in der Bildebene befinden, existiert eine lineare Transformation H (im Englischen als homomorphy bezeichnet), die die Mengen von Merkmalpunkten aufeinander abbildet. Bezeichnet man die Merkmalpunkte in Bild I_1 als $\mathbf{x}_i, i = 1, \ldots n$ und in Bild I_2 als $\mathbf{x}_i^{'}, i = 1, \ldots n$, so kann die Korrespondenz zwischen ihnen durch $\mathbf{x}^{'} = H\mathbf{x}$ ausgedrückt werden.

Aufgabe: Gegeben seien die beiden Punktepaare

I_1	I_2
$x_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$	$x_1{}' = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$
$x_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$	$x_2{}' = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

.

Bestimmen Sie die entsprechende 2x2-Transformationsmatrix H.