

Numerisches Programmieren, Übungen

Musterlösung 3. Übungsblatt: Gaußelimination, LR-Zerlegung, Pivotsuche, QR-Zerlegung

1) LR-Zerlegung

Zunächst folgt eine kleine Einführung zur LR-Zerlegung. Eine mögliche Umsetzung der drei Abschnitte in Pseudocode sieht folgendermaßen aus:

```
for i=1:n % Fuer jede Zeile i
  for k=1:i-1 % Berechne Elemente L[i,k]
    L[i,k] := A[i,k];
    for j=1:k-1
      L[i,k] := L[i,k]-L[i,j]*R[j,k];
    end
    L[i,k] := L[i,k]/R[k,k];
  end

  for k=i:n % Berechne Elemente R[i,k]
    R[i,k] := A[i,k];
    for j=1:i-1
      R[i,k] := R[i,k]-L[i,j]*R[j,k];
    end
  end
end
```

2. Vorwärtssubstitution: $Ly = b$

```
for i=1:n
  y[i] := b[i];
  for j=1:i-1
    y[i] := y[i]-L[i,j]*y[j];
  end
end
```

3. Rückwärtssubstitution: $Rx = y$

```
for i=n:-1:1
  x[i] := y[i];
```

```

for j=i+1:n
    x[i] := x[i]-R[i,j]*x[j];
end
x[i] := x[i]/R[i,i];
end

```

Die Grundidee ist für die Algorithmen Gaußelimination und LR-Zerlegung natürlich die gleiche: Bringe A durch Zeilenumformungen auf Zeilenstufenform. Der Gauß-Algorithmus eliminiert sukzessive Einträge in einer Spalte i (äußere Schleife), geht also spaltenweise vor. Dagegen berechnet unser LR-Algorithmus für jedes i der äußeren Schleife die Einträge von L und R in der Zeile i ; er arbeitet also zeilenweise. Die zweite Schleife über k läuft dementsprechend über die nötigen Spaltenindizes von L und R .

Um zu verstehen, warum der LR-Algorithmus die angegebene Form hat, betrachten wir die Zerlegung genauer. $A = L \cdot R$ bedeutet in Indexnotation

$$A_{ik} = \sum_{j=1}^n L_{ij} \cdot R_{jk}, \quad i, k = 1, \dots, n$$

wobei n die Dimension der Matrix A ist. Die Einträge A_{ik} können in solche unterhalb bzw. oberhalb der Diagonalen aufgesplittet und getrennt betrachtet werden.

- $i > k$: Einträge unterhalb der Diagonalen: "Zeile mal Spalte" im Produkt $L \cdot R$ ergibt aufgrund der Nullen eine Summe, die nur bis k läuft (kleinerer der beiden Indizes):

$$\begin{aligned}
 A_{ik} &= \sum_{j=1}^n L_{ij} \cdot R_{jk} = \sum_{j=1}^k L_{ij} \cdot R_{jk} = \sum_{j=1}^{k-1} L_{ij} \cdot R_{jk} + L_{ik} \cdot R_{kk} \\
 \Rightarrow L_{ik} &= \left(A_{ik} - \sum_{j=1}^{k-1} L_{ij} \cdot R_{jk} \right) / R_{kk}.
 \end{aligned}$$

- $i \leq k$: Einträge oberhalb der Diagonalen: Die Summe läuft nur bis i (kleinerer der beiden Indizes):

$$\begin{aligned}
 A_{ik} &= \sum_{j=1}^n L_{ij} \cdot R_{jk} = \sum_{j=1}^i L_{ij} \cdot R_{jk} = \sum_{j=1}^{i-1} L_{ij} \cdot R_{jk} + L_{ii} \cdot R_{ik} \\
 \Rightarrow R_{ik} &= \left(A_{ik} - \sum_{j=1}^{i-1} L_{ij} \cdot R_{jk} \right) / \underbrace{L_{ii}}_{=1}.
 \end{aligned}$$

Damit erhalten wir exakt die Formeln der LR-Zerlegung aus dem angegebenen Algorithmus. Man macht sich leicht klar, dass aufgrund des zeilenweisen Durchlaufs der äußeren Schleife (über i) stets alle nötigen Werte schon vorhanden sind, um die neuen Einträge L_{ik} und R_{ik} zu berechnen.

i) Lösungsschritte bei Anwendung von Gauß-Elimination auf das Problem $Ax = b$

$$\begin{array}{l}
 1. \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \end{array} \right) \quad \left| \quad 3. \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -1/2 & -11/2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right) \\
 2. \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -1/2 & -11/2 \\ 0 & 1 & 1/2 & -5/2 \end{array} \right) \quad \left| \quad 4. \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right)
 \end{array}$$

ii) Berechnung der Zerlegung (1.) von $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$: Die Matrizen L und R denken

wir uns mit lauter Nulleinträgen vorbelegt. Neu hinzukommende Einträge werden mit einer Box gekennzeichnet.

• $i=1$:

L : for $k = 1 : 0 \Rightarrow$ nichts zu tun (empty)

R : for $k = 1 : 3$

$$R[1, k] = A[1, k];$$

$$\text{for } j = 1 : 0 \Rightarrow \text{empty} \Rightarrow R = \begin{pmatrix} \boxed{4} & \boxed{2} & \boxed{3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

• $i=2$:

L : for $k = 1 : 1$

$$L[2, 1] = A[2, 1] = 2;$$

for $j = 1 : 0 \Rightarrow$ empty

$$L[2, 1] = L[2, 1]/R[1, 1] = 2/4; \Rightarrow L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \boxed{1/2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

R : for $k = 2 : 3$

$$R[2, k] = A[2, k];$$

for $j = 1 : 1$

$$R[2, k] = R[2, k] - L[2, 1] \cdot R[1, k];$$

$$\rightarrow k = 2 : R[2, 2] = R[2, 2] - L[2, 1] \cdot R[1, 2] = 2 - 1/2 \cdot 2 = 1;$$

$$\rightarrow k = 3 : R[2, 3] = R[2, 3] - L[2, 1] \cdot R[1, 3] = 1 - 1/2 \cdot 3 = -1/2;$$

$$\Rightarrow R = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 0 & \boxed{1} & \boxed{-1/2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- $i=3$:

$$\begin{aligned}
 L: \quad & \text{for } k = 1 : 2 \\
 & L[3, k] = A[3, k]; \\
 & \text{for } j = 1 : k - 1 \\
 & \quad \rightarrow k = 1 : \text{empty} \\
 & \quad \rightarrow k = 2 : L[3, 2] = L[3, 2] - L[3, 1] * R[1, 2] = 1; \\
 & L[3, k] = L[3, k]/R[k, k]; \quad \Rightarrow L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ \boxed{1/2} & \boxed{1} & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 R: \quad & \text{for } k = 3 : 3 \\
 & R[3, 3] = A[3, 3]; \\
 & \text{for } j = 1 : 2 \\
 & \quad R[3, 3] = R[3, 3] - L[3, j] \cdot R[j, 3]; \\
 & \quad \rightarrow j = 1 : R[3, 3] = 2 - 1/2 \cdot 3 = 1/2; \\
 & \quad \rightarrow j = 2 : R[3, 3] = 1/2 - 1 \cdot (-1/2); \\
 & \Rightarrow R = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Damit haben wir unsere gesuchte Zerlegung:

$$A = L \cdot R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

iii) Substitution:

- Vorwärtssubstitution $Ly = b$:

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 \Rightarrow y &= (5, -11/2, 3)^T.
 \end{aligned}$$

- Rückwärtssubstitution $Rx = y$:

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 5 \\ -11/2 \\ 3 \end{pmatrix} \\
 \Rightarrow x &= (1, -4, 3)^T.
 \end{aligned}$$

iv) Die Zerlegung ist bereits bekannt, daher müssen zur Lösung von $Ax = c$ lediglich Vorwärts- und Rückwärtssubstitution durchgeführt werden. Der Aufwand hierfür ist

$O(n^2)$ Operationen (vergleiche $O(n^3)$ Operationen für die Berechnung der Zerlegung bei der Lösung von $Ax = b$).

Substitution:

- Vorwärtssubstitution $L\tilde{y} = c$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \tilde{y} = (2, 0, 1)^T.$$

- Rückwärtssubstitution $Rx = \tilde{y}$:

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow x = (-1/2, 1/2, 1)^T.$$

2) Gauß-Elimination und Pivotsuche

i) Gauß-Elimination ohne Pivotsuche und mit exakter Arithmetik:

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{cc|c} -\frac{1}{1000} & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{array} \right) &\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -\frac{1}{1000} & 1 & 1 \\ 0 & 2001 & 2000 \end{array} \right) \\ &\Rightarrow x_2 = \frac{2000}{2001} = 0.9995\dots, \quad x_1 = (x_2 - 1) \cdot 1000 = -0.4997\dots \\ &\Rightarrow x = \begin{pmatrix} -0.4997\dots \\ 0.9995\dots \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

ii) Gauß-Elimination ohne Pivotsuche und mit Rundungsfehlern (3 Stellen):

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{cc|c} -\frac{1}{1000} & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{array} \right) &\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -1.000 \cdot 10^{-3} & 1 & 1 \\ 0 & 2.001 \cdot 10^3 & 2.000 \cdot 10^3 \end{array} \right) \\ &\stackrel{\text{Runden}}{\Rightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} -1.00 \cdot 10^{-3} & 1 & 1 \\ 0 & 2.00 \cdot 10^3 & 2.00 \cdot 10^3 \end{array} \right) \\ &\Rightarrow x_2 = \frac{2.00}{2.00} = 1, \quad x_1 = (x_2 - 1) \cdot 10^3 = 0 \\ &\Rightarrow x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Der zweite Eintrag x_2 ist in Ordnung, aber x_1 ist komplett falsch!

iii) Gauß-Elimination mit Pivotsuche und mit Rundungsfehlern (3 Stellen):

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{cc|c} -\frac{1}{1000} & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{array} \right) &\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{1000} & 1 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{2001}{2000} & 1 \end{array} \right) \\ &\stackrel{\text{Runden}}{\Rightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \\ &\Rightarrow x_2 = 1, \quad x_1 = -x_2/2 = -0.5 \\ &\Rightarrow x = \begin{pmatrix} -0.5 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Diesmal ist x für beide Einträge in der passenden Größenordnung (vgl. i)).

3) QR-Zerlegung mit Givens-Rotationen

Zunächst ein paar allgemeine Bemerkungen zur QR-Zerlegung:

- Für $n \times n$ -Matrizen lassen sich verallgemeinerte Drehungen $G_{i,k}$ angeben, die analog genau das Spaltenelement k zu Null machen bzw. i in r überführen (Drehung in der (i, k) -Ebene des \mathbb{R}^n).
Mit der Multiplikation dieser einzelnen Matrizen $G_{i,k}^T$ zu einer Gesamtmatrix Q , lässt sich das Verfahren analog zu unserem Beispiel durchführen.
- Die QR-Zerlegung mit Givens-Rotationen ist im Allgemeinen etwas teurer als die LR-Zerlegung (ca. $\frac{4}{3}n^3$ statt $\frac{2}{3}n^3$), dafür aber stabiler. Eine Pivotsuche ist nicht nötig.
- Bei dünnbesetzten Matrizen und mit Hilfe schneller Implementierungen (fast givens) lässt sich der Aufwand wesentlich reduzieren.
- In der Praxis werden die einzelnen Rotationsmatrizen $G_{i,k}$ natürlich nie explizit aufgestellt, sondern stets nur ihre Wirkung $G_{i,k} \cdot A$ berechnet und abgespeichert. $G_{i,k}$ kann dabei durch eine einzige Zahl codiert/decodiert werden.

i) Aufstellen der Matrix G_φ mit $(a, b)^T = (1, 2)$:

$$c = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad s = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}; \quad \Rightarrow \quad G_\varphi = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen der Matrix R:

$$R = G_\varphi \cdot A = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

ii) Lösung des Gleichungssystems: Es gilt $Rx = Q^T b = G_\varphi b$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \\ \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow x_2 = 2, \quad x_1 = (1 - 3x_2)/5 = -5/5 = -1 \\ &\Rightarrow x = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

4) Image Stitching mit Gauß-Elimination

Gegeben seien zwei Merkmalspunkte $\mathbf{x}_1 = [3 \ 2]^T$ und $\mathbf{x}_2 = [4 \ 3]^T$ im Bild I_1 und deren korrespondierende Punkte $\mathbf{x}'_1 = [1 \ 2]^T$ und $\mathbf{x}'_2 = [2 \ 4]^T$ im anderen Bild I_2 . Wie bereits erwähnt, lässt sich der Zusammenhang zwischen korrespondierenden Punkten über die Transformation $\mathbf{x}' = H \cdot \mathbf{x}$ ausdrücken. Nun gilt es die Einträge der "Homography-Matrix" zu finden.

Notieren wir zunächst den bekannten Zusammenhang für das erste Paar korrespondierender Punkte:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}'_1 &= H \cdot \mathbf{x}_1 \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{x}'_2 &= H \cdot \mathbf{x}_2 \\ \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Nach der Matrix-Vektor-Multiplikation erhalten wir ein System mit vier Gleichungen mit den vier Unbekannten $h_{11}, h_{12}, h_{21}, h_{22}$.

$$\begin{aligned}3h_{11} + 2h_{12} &= 1 \\ 3h_{21} + 2h_{22} &= 2 \\ 4h_{11} + 3h_{12} &= 2 \\ 4h_{21} + 3h_{22} &= 4\end{aligned}$$

Durch Tauschen der zweiten und dritten Gleichung erhalten wir das folgende (lineare) Gleichungssystem, das wir mittels Gauß-Elimination lösen:

$$A \cdot \mathbf{h} = b \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{11} \\ h_{12} \\ h_{21} \\ h_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 4 \end{array} \right)$$

Die Gauß-Elimination erfolgt wie folgt:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 4 \end{array} \right) \begin{array}{l} / \cdot \frac{4}{3} \\ \rightsquigarrow \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 4 \end{array} \right) \begin{array}{l} / \cdot \frac{4}{3} \\ \rightsquigarrow \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \end{array} \right)$$

Damit lässt sich leicht $h_{22} = 4, h_{21} = -2, h_{12} = 2, h_{11} = -1$ berechnen.

Weiterer Lösungsweg: $Hx_1 = x_1'$ und $Hx_2 = x_2'$ lässt sich schreiben als

$$H \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1' & x_2' \end{bmatrix} \quad |^T$$

$$\begin{bmatrix} x_1^T \\ x_2^T \end{bmatrix} H^T = \begin{bmatrix} x_1'^T \\ x_2'^T \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} H^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{Gauß: } \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 4 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow H^T = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix},$$

und damit folgt die Lösung $H = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$.