Technische Universität München
Institut für Informatik
Prof. Dr. Thomas Huckle
Dipl.-Inf. Christoph Riesinger
Dipl.-Math. Jürgen Bräckle

SoSe 2013

Numerisches Programmieren, Übungen

Musterlösung 5. Übungsblatt: Interpolation

1) Polynominterpolation mit Aitken-Neville

Die zu interpolierenden Punkte sind:

$$\begin{array}{rrcrr} x_0 = & \text{-2}\ , & y_0 = & \text{-7} \\ x_1 = & \text{-1}\ , & y_1 = & 0 \\ x_2 = & 0\ , & y_2 = & 1 \\ x_3 = & 2\ , & y_3 = & 9. \end{array}$$

Damit ergibt sich für die Auswertung des Algorithmus ($p[i,0] = y_i$ ist ja klar):

$\underline{k=1}$:

$$\begin{aligned} p[0,1] &= p[0,0] + \frac{x - x[0]}{x[1]-x[0]}\,(p[1,0]-p[0,0]) \;=\; -7 + \frac{1-(-2)}{-1-(-2)}(0-(-7)) \;=\; 14 \\ p[1,1] &= p[1,0] + \frac{x - x[1]}{x[2]-x[1]}\,(p[2,0]-p[1,0]) \;=\; 0 + \frac{1-(-1)}{0-(-1)}(1-0) \;=\; 2 \\ p[2,1] &= p[2,0] + \frac{x - x[2]}{x[3]-x[2]}\,(p[3,0]-p[2,0]) \;=\; 1 + \frac{1-0}{2-0}(9-1) \;=\; 5 \end{aligned}$$

$\underline{k=2}$:

$$\begin{aligned} p[0,2] &= p[0,1] + \frac{x - x[0]}{x[2]-x[0]}\,(p[1,1]-p[0,1]) \;=\; 14 + \frac{1-(-2)}{0-(-2)}(2-14) \;=\; -4 \\ p[1,2] &= p[1,1] + \frac{x - x[1]}{x[3]-x[1]}\,(p[2,1]-p[1,1]) \;=\; 2 + \frac{1-(-1)}{2-(-1)}(5-2) \;=\; 4 \end{aligned}$$

$\underline{k=3}$:

$$p[0,3] = p[0,2] + \frac{x - x[0]}{x[3]-x[0]}\,(p[1,2]-p[0,2]) \;=\; -4 + \frac{1-(-2)}{2-(-2)}(4-(-4)) \;=\; \boxed{2}$$

Für das Dreicksschema erhält man somit:

$$
\begin{array}{c|c|ccccccc}
x_i & i \backslash k & 0 & & 1 & & 2 & & 3 \\
\hline
\text{-2} & 0 & y_0 = -7 & \rightarrow & 14 & \rightarrow & \text{-4} & \rightarrow & \boxed{2} \\
 & & & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & \\
\text{-1} & 1 & y_1 = 0 & \rightarrow & 2 & \rightarrow & 4 & & \\
 & & & \nearrow & & \nearrow & & & \\
0 & 2 & y_2 = 1 & \rightarrow & 5 & & & & \\
 & & & \nearrow & & & & & \\
2 & 3 & y_3 = 9 & & & & & &
\end{array}
$$

Der Wert von $p(x = 1)$ steht in dem obersten rechten Eintrag ($p[0, 3]$) des Schemas und passt mit dem echten Polynom $p(x) = x^3 + 1$ an der Stelle $x = 1$ zusammen.

Wenn man den Aitken-Neville-Algorithmus schnell im Kopf rechnen möchte/muss (z.B. bei der Klausur), dann kann man mit ein wenig Übung direkt das Dreiecksschema nützen; dafür stehen dort auch die x_i mit dabei.

Die Auswertung eines Polynoms mit dem Aitken-Neville-Algorithmus ist dann gut, wenn man nicht sehr viele Werte des Polynoms benötigt. Sonst ist der Aufwand von $\mathcal{O}(n^2)$ durch die beiden verschachtelten Schleifen über i und k höher, als wenn man einmal die Polynomkoeffizienten direkt berechnet (z.B. mit Lagrange oder Newton) und dann die Auswertung über das Horner-Schema ($\mathcal{O}(n)$) macht.

Für das Dreicksschema erhält man somit:

$$
\begin{array}{c|c|ccccccc}
x_i & i \setminus k & 0 & & 1 & & 2 & & 3 \\
\hline
\text{-2} & 0 & y_0 = -7 & \rightarrow & 21 & \rightarrow & \text{-15} & \rightarrow & \boxed{9} \\
 & & & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & \\
\text{-1} & 1 & y_1 = 0 & \rightarrow & 3 & \rightarrow & 3 & & \\
 & & & \nearrow & & \nearrow & & & \\
0 & 2 & y_2 = 1 & \rightarrow & 3 & & & & \\
 & & & \nearrow & & & & & \\
1 & 3 & y_3 = 2 & & & & & &
\end{array}
$$

Der Wert von $p(x = 2)$ steht in dem obersten rechten Eintrag ($p[0, 3]$) des Schemas und passt mit dem echten Polynom $p(x) = x^3 + 1$ an der Stelle $x = 2$ zusammen.

Wenn man den Aitken-Neville-Algorithmus schnell im Kopf rechnen möchte/muss (z.B. bei der Klausur), dann kann man mit ein wenig Übung direkt das Dreiecksschema nützen; dafür stehen dort auch die x_i mit dabei.

Die Auswertung eines Polynoms mit dem Aitken-Neville-Algorithmus ist dann gut, wenn man nicht sehr viele Werte des Polynoms benötigt. Sonst ist der Aufwand von $\mathcal{O}(n^2)$ durch die beiden verschachtelten Schleifen über i und k höher, als wenn man einmal die Polynomkoeffizienten direkt berechnet (z.B. mit Lagrange oder Newton) und dann die Auswertung über das Horner-Schema ($\mathcal{O}(n)$) macht.

2) Polynominterpolation nach Newton

i) Die zu interpolierenden Punkte sind:

$$\begin{aligned} x_0 &= -1\,, & y_0 &= -3 \\ x_1 &= 1\,, & y_1 &= 1 \\ x_2 &= 3\,, & y_2 &= -3. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich für die Newtonschen dividierten Differenzen:

$$\begin{aligned}
[x_0]\,f &= y_0 = -3 \\
[x_1]\,f &= y_1 = 1 \\
[x_2]\,f &= y_2 = -3 \\
[x_0, x_1]\,f &= \frac{[x_1]f - [x_0]f}{x_1 - x_0} = \frac{1-(-3)}{1-(-1)} = 2 \\
[x_1, x_2]\,f &= \frac{[x_2]f - [x_1]f}{x_2 - x_1} = \frac{-3-1}{3-1} = -2 \\
[x_0, x_1, x_2]\,f &= \frac{[x_1, x_2]f - [x_0, x_1]f}{x_2 - x_0} = \frac{-2-2}{3-(-1)} = -1
\end{aligned}$$

Im Dreiecksschema à la Aitken-Neville sieht das folgendermaßen aus:

$$\begin{array}{c|c|ccccc}
x_i & i \setminus k & 0 & & 1 & & 2 \\ \hline
-1 & 0 & y_0 = \boxed{-3} & \to & \boxed{2} & \to & \boxed{-1} \\
 & & & \nearrow & & \nearrow & \\
1 & 1 & y_1 = 1 & \to & -2 & & \\
 & & & \nearrow & & & \\
3 & 2 & y_2 = -3 & & & &
\end{array}$$

Nützen wir nun die Werte $[x_0, \ldots, x_i]f$ aus der obersten Zeile des Dreiecks als Koeffizienten des Polynoms in der Darstellung (4), so erhalten wir das Interpolationspolynom $p(x)$ zu

$$\begin{aligned}
p(x) &= [x_0]f + [x_0, x_1]f \cdot (x - x_0) + \ldots + [x_0, \cdots, x_n]f \cdot \prod_{i=0}^{n-1}(x - x_i) \\
&= \boxed{-3} + \boxed{2}(x-(-1)) + (\boxed{-1})(x-(-1))(x-1) = \boxed{-x^2 + 2x}\,.
\end{aligned}$$

ii) Ein zusätzlicher Punkt $P_3 = (x_3, y_3) = (0, 0)$ lässt sich (unabhängig von seiner $x-$Position) einfach unten an das Newton-Schema anhängen. Man muss nur die noch fehlenden dividierten Differenzen berechnen:

$$\begin{aligned}
[x_3]\, f &= y_3 = 0 \\
[x_2, x_3]\, f &= \frac{[x_3]f - [x_2]f}{x_3 - x_2} = \frac{0 - (-3)}{0 - 3} = -1 \\
[x_1, x_2, x_3]\, f &= \frac{[x_2, x_3]f - [x_1, x_2]f}{x_3 - x_1} = \frac{-1 - (-2)}{0 - 1} = -1 \\
[x_0, x_1, x_2, x_3]\, f &= \frac{[x_1, x_2, x_3]f - [x_0, x_1, x_2]f}{x_3 - x_0} = \frac{-1 - (-1)}{0 - (-1)} = \boxed{0}.
\end{aligned}$$

Im Dreiecksschema sieht das folgendermaßen aus:

$$\begin{array}{c|c|ccccccc}
x_i & i \setminus k & 0 & & 1 & & 2 & & 3 \\
\hline
-1 & 0 & y_0 = -3 & \rightarrow & 2 & \rightarrow & -1 & \rightarrow & \boxed{0} \\
 & & & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & \\
1 & 1 & y_1 = 1 & \rightarrow & -2 & \rightarrow & -1 & & \\
 & & & \nearrow & & \nearrow & & & \\
3 & 2 & y_2 = -3 & \rightarrow & -1 & & & & \\
 & & & \nearrow & & & & & \\
0 & 3 & y_3 = 0 & & & & & &
\end{array}$$

Der zusätzliche Term für $q(x)$ besteht dann aus $[x_0, x_1, x_2, x_3]f \cdot (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) = 0$. Dass dieser Anteil verschwindet, ist nötig, da der Zusatzpunkt (0,0) auch schon auf dem ersten Interpolationspolynom $p(x)$ liegt! Deswegen muss aufgrund der Eindeutigkeit der Polynominterpolation $p(x) = q(x)$ gelten.

iii) Die Formel zur Abschätzung des Interpolationsfehlers $|f(x) - p(x)|$ für eine Funktion $f \in C^{n+1}$ lautet allgemein

$$|f(x) - p(x)| = \left| \frac{D^{n+1} f(\xi)}{(n+1)!} \prod_{k=0}^{n} (x - x_k) \right|$$

mit $\xi \in [\min\{x, x_0, \ldots, x_n\}, \max\{x, x_0, \ldots, x_n\}]$.

In unserem Fall $(x = 2)$ ergibt sich speziell

$$\begin{aligned}
|f(x) - p(x)| &= |f(2) - p(2)| = \left| \frac{D^4 f(\xi)}{4!} \cdot (2 - (-1))(2 - 0)(2 - 1)(2 - 3) \right| \\
&= \frac{1}{4} \cdot |D^4 f(\xi)| \\
&\leq \frac{1}{4} \cdot \max_{x \in [-1,3]} |D^4 f(x)|
\end{aligned}$$

Anmerkung:
Wäre $f(x)$ bekannt, so ließe sich der Ausdruck $|D^4 f(x)|$ noch genauer abschätzen. Dies könnte zum Beispiel durch eine Kurvendiskussion von $D^4 f(x)$ geschehen, bei welcher man sämtliche lokalen Minima und Maxima im zu betrachtenden Intervall (in unserem Fall $[-1, 3]$) bestimmt. Hierbei darf man nicht vergessen, die beiden Werte an den Intervallrändern zu berücksichtigen, da diese ebenfalls Kandidaten für Extrema sind!

3) Bezier-Kurven und Computergrafik

i) Die Bernstein-Polynome sind (vgl. Abb. 2 der Angabe):

$$\begin{aligned} B_0(t) &= \frac{3!}{0!\,3!} \cdot t^0(1-t)^3 &=& -t^3+3t^2-3t+1 \\ B_1(t) &= \frac{3!}{1!\,2!} \cdot t^1(1-t)^2 &=& 3t^3-6t^2+3t \\ B_2(t) &= \frac{3!}{2!\,1!} \cdot t^2(1-t)^1 &=& -3t^3+3t^2 \\ B_3(t) &= \frac{3!}{3!\,0!} \cdot t^3(1-t)^0 &=& t^3. \end{aligned}$$

ii) Aufsummieren der 4 kubischen Bernstein-Polynome ergibt:

$$\begin{array}{rrrr} -t^3 & +3t^2 & -3t & +1 \\ 3t^3 & -6t^2 & +3t & \\ -3t^3 & +3t^2 & & \\ t^3 & & & \\ \hline 0 & +0 & +0 & +1 \end{array}$$

iii) Es gilt:

$$\begin{aligned} s(0) &= \sum_{i=0}^{3} \mathbf{b_i} \cdot B_i(0) = \mathbf{b_0} \cdot 1 \\ s(1) &= \sum_{i=0}^{3} \mathbf{b_i} \cdot B_i(1) = \mathbf{b_0}(-1+3-3+1) + \mathbf{b_1}(3-6+3) + \mathbf{b_2}(-3+3) + \mathbf{b_3} \cdot 1 = \mathbf{b_3}. \end{aligned}$$

Die Ableitung der Kurve $s(t)$ nach ihrem Kurvenparameter t ergibt

$$\begin{aligned} \frac{ds(t)}{dt} &= \frac{d}{dt} \sum_{i=0}^{3} \mathbf{b_i} \cdot B_i(t) = \sum_{i=0}^{3} \mathbf{b_i} \cdot \frac{dB_i(t)}{dt} \\ &= \mathbf{b_0}(-3t^2+6t-3) + \mathbf{b_1}(9t^2-12t+3) + \mathbf{b_2}(-9t^2+6t) + \mathbf{b_3}(3t^2). \end{aligned}$$

Ausgewertet an der Stelle $t = 0$ bzw. $t = 1$ folgt daher

$$\left.\frac{ds(t)}{dt}\right|_{t=0} = -3\mathbf{b_0} + 3\mathbf{b_1} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} \left.\frac{ds(t)}{dt}\right|_{t=1} &= \mathbf{b_0}(-3+6-3) + \mathbf{b_1}(9-12+3) + \mathbf{b_2}(-9+6) + \mathbf{b_3}(3) \\ &= -3\mathbf{b_2} + 3\mathbf{b_3}. \end{aligned} \tag{2}$$

Der Richtungsvektor (1) von $\tau(\alpha)_{\mathbf{b_0}}$ ist gerade 3 mal der Vektor $(\mathbf{b_1} - \mathbf{b_0})$; damit liegt $\mathbf{b_1}$ auf der Geraden $\tau(\alpha)_{\mathbf{b_0}} = \mathbf{b_0} + \alpha \cdot \left.\frac{ds(t)}{dt}\right|_{t=0}$ mit $\alpha = 1/3$.

Analoges gilt für $\tau(\alpha)_{\mathbf{b_3}}$ mit dem Richtungsvektor (2):
$\mathbf{b_2}$ liegt auf der Geraden $\tau(\alpha)_{\mathbf{b_3}} = \mathbf{b_3} + \alpha \cdot \left.\frac{ds(t)}{dt}\right|_{t=1}$ mit $\alpha = -1/3$.