

Numerisches Programmieren, Übungen

Musterlösung 7. Übungsblatt: Numerische Quadratur

1) Integration von Interpolationspolynomen

i)

$$\begin{aligned} I_1(f) &= \int_0^1 f(0) \cdot \frac{x-1}{0-1} + f(1) \cdot \frac{x-0}{1-0} dx \\ &= \int_0^1 f(0) \cdot (-x+1) + f(1) \cdot x dx \\ &= \left[f(0) \cdot \left(-\frac{1}{2}x^2 + x \right) + f(1) \cdot \frac{1}{2}x^2 \right]_0^1 \\ &= f(0) \cdot \left(-\frac{1}{2} + 1 \right) + f(1) \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} (f(0) + f(1)) \end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned} L_0(x) &= \frac{x-x_1}{x_0-x_1} \cdot \frac{x-x_2}{x_0-x_2} = (2x^2 - 3x + 1) \\ L_1(x) &= \frac{x-x_0}{x_1-x_0} \cdot \frac{x-x_2}{x_1-x_2} = (-4x^2 + 4x) \\ L_2(x) &= \frac{x-x_0}{x_2-x_0} \cdot \frac{x-x_1}{x_2-x_1} = (2x^2 - x) \\ I_2(f) &= \int_0^1 \sum_{k=0}^2 f(x_k) \cdot L_k(x) dx \\ &= f(0) \cdot \int_0^1 L_0(x) dx + f\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \int_0^1 L_1(x) dx + f(1) \cdot \int_0^1 L_2(x) dx \\ &= \frac{1}{6} \left(f(0) + 4f\left(\frac{1}{2}\right) + f(1) \right) \end{aligned}$$

iii) Allgemeines Polynom 3. Grades aufstellen, an den Stützstellen auswerten, einsetzen, ausrechnen und mit analytischem Integral vergleichen!

$$\begin{aligned}
 p(x) &= c_3x^3 + c_2x^2 + c_1x + c_0 \\
 p(0) &= c_0 \\
 p\left(\frac{1}{2}\right) &= c_3/8 + c_2/4 + c_1/2 + c_0 \\
 p(1) &= c_3 + c_2 + c_1 + c_0 \\
 I_2(p) &= \frac{3c_3 + 4c_2 + 6c_1 + 12c_0}{12} \\
 &= \left[\frac{c_3x^4}{4} + \frac{c_2x^3}{3} + \frac{c_1x^2}{2} + c_0x \right]_0^1 = \int_0^1 p(x) dx
 \end{aligned}$$

iv)

	$f(x)$	$f(0)$	$f(1)$	$I_1(f)$
a)	$\sin(\pi x) \cdot \cos(\pi x)$	0	0	0
b)	$\frac{\sin(\pi x)}{x}$	π	0	$\frac{\pi}{2}$
c)	$e^{-\frac{x}{2}}$	1	$e^{-\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{e}}$

Bei Aufgabe b) muss die Regel von l'Hospital angewendet werden um den Grenzwert der Funktion an der Stelle $x = 0$ zu bestimmen.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi x)}{x} \stackrel{\text{l'H.}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\pi \cos(\pi x)}{1} = \pi$$

2) Trapezregel und Trapezsumme

i) $f(x) = -x^2 + 4$, $a = -2$, $b = 2$

$$\begin{aligned}
 I(f) &= \int_a^b f(x) dx = \int_{-2}^2 (-x^2 + 4) dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + 4x \right]_{-2}^2 \\
 &= -\frac{8}{3} + 8 - \left(\frac{8}{3} - 8 \right) = 16 \cdot \frac{2}{3} = 10.\bar{6} \\
 Q_T(f) &= H \cdot \frac{f(a) + f(b)}{2} = H \cdot 0 = 0
 \end{aligned}$$

ii) $g(x) = x^4$, $a = 0$, $b = 4$

$$\begin{aligned}
 I(g) &= \int_a^b g(x) dx = \int_0^4 x^4 dx = \left[\frac{1}{5}x^5 \right]_0^4 \\
 &= \frac{1024}{5} = 204,8 \\
 Q_T(g) &= H \cdot \frac{f(a) + f(b)}{2} = 2 \cdot (0 + 256) = 512
 \end{aligned}$$

- iii) Berechnung der Trapezsumme für $f(x) = -x^2 + 4$, $a = -2$, $b = 2$, $n = 8$
 $\Rightarrow h = \frac{b-a}{n} = \frac{1}{2}$
 $f(x)$ ist achsensymmetrisch zur y-Achse, d.h. $f(x) = f(-x)$

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
x_i	-2	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
f_i	0	$\frac{7}{4}$	3	$\frac{15}{4}$	4	$\frac{15}{4}$	3	$\frac{7}{4}$	0

$$T_i = (x_{i+1} - x_i) \cdot \left(\frac{y_{i+1} + y_i}{2}\right) = h \cdot \left(\frac{y_{i+1} + y_i}{2}\right)$$

$$\Rightarrow Q_{TS}(f; h) = \sum_{i=0}^{n-1} T_i = h \cdot \left(\frac{f_0}{2} + f_1 + \dots + f_{n-1} + \frac{f_n}{2}\right)$$

$$= h \left(\frac{f_0}{2} + f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 + f_6 + f_7 + \frac{f_8}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(0 + \frac{7}{4} + 3 + \frac{15}{4} + 4 + \frac{15}{4} + 3 + \frac{7}{4} + 0\right) = \frac{1}{2} \cdot 21 = 10.5$$

Restglied:

$$R_{TS}(f; h) = h^2 \cdot H \cdot \frac{f^{(2)}(\xi)}{12} = \frac{1}{4} \cdot 4 \cdot \frac{-2}{12} = -\frac{1}{6} = 10.5 - 16 \cdot \frac{2}{3} = Q_{TS}(f; h) - I(f)$$

\Rightarrow Das Restglied beschreibt in diesem Fall exakt den Fehler der Trapezsumme

- iv) Berechnung der Trapezsumme für $g(x) = x^4$, $a = 0$, $b = 4$, $n = 4$
 $\Rightarrow h = \frac{b-a}{n} = 1$

i	0	1	2	3	4
x_i	0	1	2	3	4
g_i	0	1	16	81	256

$$Q_{TS}(g; h) = h \left(\frac{f_0}{2} + f_1 + f_2 + f_3 + \frac{f_4}{2}\right)$$

$$= (0 + 1 + 16 + 81 + 128) = 226$$

Restglied:

$$|R_{TS}(g; h)| = \left| h^2 \cdot H \cdot \frac{g^{(2)}(\xi)}{12} \right| = \left| 1 \cdot 4 \cdot \frac{12 \cdot \xi^2}{12} \right|$$

$$\leq 4 \cdot 16 = 64$$

3) Keplersche Fassregel und Simpson-Summe

i) Berechnung der Fassregel für $g(x) = x^4$, $a = 0$, $b = 4$

$$\begin{aligned} Q_F(g) &= h \left(\frac{f(a) + 4 \cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)}{6} \right) \\ &= \frac{4}{6} (0 + 4 \cdot 16 + 256) = \frac{2}{3} \cdot 320 = 213.\bar{3} \end{aligned}$$

⇒ Fassregel besser als Trapezregel und Trapezsumme (für $n = 4$)

ii) Simpsonsumme für $g(x) = x^4$, $a = 0$, $b = 4$, $n = 4$ Entspricht zwei Fassregeln, da fuer eine Fassregel zwei Intervalle benötigt werden.

$$\begin{aligned} Q_{SS}(g; h) &= \frac{h}{3} \cdot (g_0 + 4 \cdot g_1 + 2 \cdot g_2 + 4 \cdot g_3 + g_4) \\ &= \frac{h}{3} (0 + 4 \cdot 1 + 2 \cdot 16 + 4 \cdot 81 + 256) = \frac{1}{3} \cdot 616 = 205.\bar{3} \end{aligned}$$

Restglied:

$$R_{SS}(g; h) = h^4 \cdot H \cdot \frac{g^{(4)}(\xi)}{180} = 4 \cdot \frac{24}{180} = \frac{8}{15}$$

⇒ Das Restglied beschreibt in diesem Fall exakt den Fehler der Simpsonsumme

4) Quadratur nach Archimedes

Da $f(x)$ symmetrisch zur y-Achse ist, genügt es die Integration für x zwischen 0 und 2 zu berechnen und das Ergebnis mit 2 zu multiplizieren.

- Fläche der rechten Seite des Startdreiecks:

$$\frac{A_1}{2} = \frac{1}{2} \cdot (g_1 \cdot h_1) = \frac{1}{2} \cdot (f(0) \cdot 2) = \frac{1}{2} \cdot (4 \cdot 2) = 4$$

- Fläche des ersten verfeinerten Dreiecks: Das erste verfeinerte Dreieck besteht aus zwei Dreiecken, die jeweils die Grundseite g_2 und die Höhe h_2 haben.
 g_2 ist die Differenz zwischen der $f(1)$ und $\frac{f(0)+f(2)}{2}$

$$A_2 = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (g_2 \cdot h_2) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\left(3 - \frac{4+0}{2} \right) \cdot 1 \right) = 1$$

- zweite Verfeinerung: beide Dreiecke A_2^1 und A_2^2 bestehen jeweils aus zwei Dreiecken mit

Grundseite g_3^1 bzw. g_3^2 und Höhe h_3

$$g_3^1 = f\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{f(0) + f(1)}{2} = \frac{15}{4} - \frac{14}{4} = \frac{1}{4}$$

$$g_3^2 = f\left(\frac{3}{2}\right) - \frac{f(1) + f(2)}{2} = \frac{7}{4} - \frac{6}{4} = \frac{1}{4}$$

$$A_3^1 = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (g_3^1 \cdot h_3) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

$$A_3^2 = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (g_3^2 \cdot h_3) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

- gesamte rechte Seite:

$$A_r = \frac{A_1}{2} + A_2 + A_3^1 + A_3^2 = 4 + 1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = 5\frac{1}{4}$$

- Gesamtergebnis:

$$A = 2 \cdot A_r = 2 \cdot 5\frac{1}{4} = 10\frac{1}{2}$$

Das Ergebnis stimmt mit dem der Trapezsumme aus Aufgabe 1) iii) überein.