Gewöhnliche Differentialgleichung

- hat nur eine Unbekannte (z.B. x oder Zeit t)

- hat Anfangswerte gegeben.

Zu einer Diff‘gleichung in einer Variablen x kann man auch ein Randwertproblem betrachten, z.B.

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \varphi(u, u', x) \qquad auf \quad [a, b], \qquad u(a) = u_a, \quad u_b = u_b$$

Hat eine Differentialgleichungen Ableitungen in mehr als einer Variablen, so spricht man von einer Partiellen Differentialgleichung PDE

Beispiel Diffusion (mit Anwendung in der Bildverarbeitung):

Die Strömung j – hervorgerufen durch Dichteunterschiede – erfolgt in Richtung des negativen Gradienten der Konzentration u →

$$\boxed{j(x,t) = -D \cdot \nabla u(x,t)}$$

Massenerhaltung: Änderung der Konzentration in einem Volumenelement kann nur durch Strömung erfolgen →

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} u(x,t) = -div(j) = -\frac{\partial j_1}{\partial x_1} - \frac{\partial j_2}{\partial x_2} - \frac{\partial j_3}{\partial x_3}}$$

Notation:

Nabla-Operator $\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$

Gradient $f(x,y,z):\quad \nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}$

Divergenz $F = \begin{pmatrix} f \\ g \\ h \end{pmatrix}:\quad \nabla F = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f \\ g \\ h \end{pmatrix} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z} =$

$$= f_x + g_y + h_z = div(F)$$

Laplace-O.

$$\Delta U = div(grad(U)) = \nabla(\nabla U) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} & \frac{\partial U}{\partial y} & \frac{\partial U}{\partial z} \end{pmatrix}^T =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}U + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}U + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial z}U = U_{xx} + U_{yy} + U_{zz}$$

Zusammen: $$\boxed{u_t = div(D \cdot \nabla u)}$$

Im isotropen Fall ist D eine konstante Zahl, z.B. D=1:

$$\boxed{u_t = \Delta u = u_{xx} + u_{yy}}$$

im zweidimensionalen Fall;

Δ heißt Laplace-Operator.

Einteilung Partieller Diff'gleichungen: u(x,y,t)

Gleichgewichtsgl. (elliptische PDE):

$$-\Delta u = f$$

Wärmeleitungsgl. (parabolische PDE):

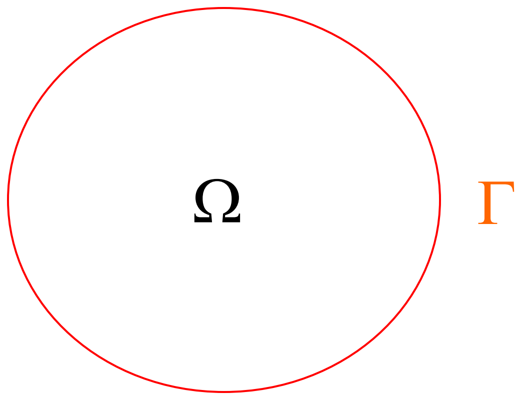
$$\Delta u = u_t$$

Wellengleichung (hyperbolische PDE):

$$\Delta u = u_{tt}$$

Elliptische PDE: Gegeben sind zusätzlich Randwerte.

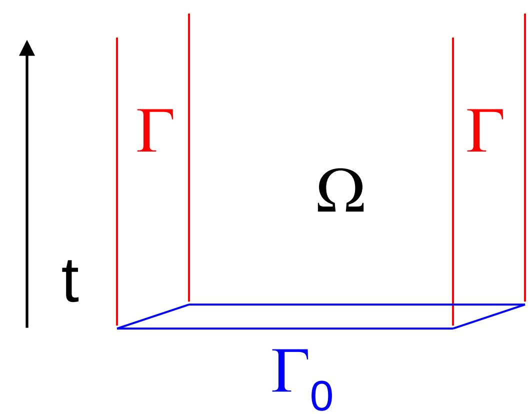
Also $-\Delta u = f$ auf Gebiet Ω und u(x) auf Γ, dem Rand von Ω



Parabolische PDE: Gegeben sind Anfangs- und Randwerte.

Also $\Delta u = u_t$ auf Gebiet Ω und

u(x,0) auf Γ_0 zum Zeitpunkt t=0, und u(x,t) vorgegeben auf Γ, dem Rand von Ω.

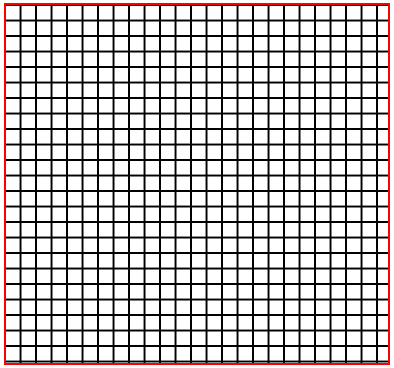


Lösungsmethoden am Beispiel Laplacegleichung

$$-\Delta u = f$$ auf Gebiet Ω und $u(x)$ auf Γ

Differenzenverfahren:

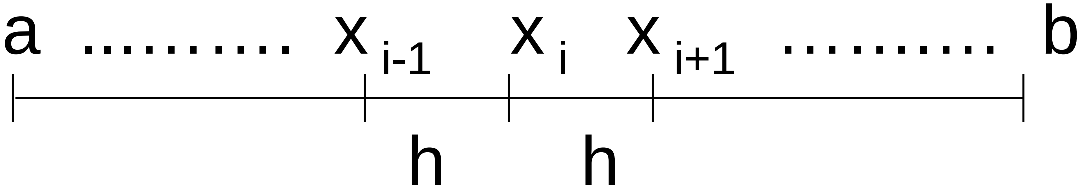
Ersetze Differentialquotient durch Differenzenquotienten.
Das Gebiet Ω wird diskretisiert, d.h. durch ein Punktegitter x_{jk}, $j=1,\ldots,n$, $k=1,\ldots,m$, dargestellt:



$u(x) \rightarrow u_{jk} = u(x_{jk})$,
am einfachsten äquidistant mit konstanter Schrittweite h.

1-dimensionaler Fall: $-u_{xx} = f$ für $a =< x =< b$

$u(a)=v; \quad u(b)=w;$



$$\left.\frac{du}{dx}\right|_{x_i} = u_x(x_i) \approx \frac{u_{i+1} - u_i}{h}$$

$$\boxed{\left.\frac{d^2u}{dx^2}\right|_{x_i} = u_{xx}(x_i) \approx \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2}} = -f_i$$

ergibt lineares Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{n-2} \\ u_{n-1} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} h^2 f_1 - u(a) \\ h^2 f_2 \\ \vdots \\ h^2 f_{n-2} \\ h^2 f_{n-1} - u(b) \end{pmatrix}$$

Maske:

[-1 2 -1]

In 2D: Maske:

$$\begin{matrix} & -1 & \\ -1 & 4 & -1 \\ & -1 & \end{matrix}$$

entspricht Differenzfilter

Zu Lösen: Lineares Gleichungssystem

Galerkinverfahren:

Wähle Ansatzfunktionen $u_i(x)$

(z.B. lineare B-Splines = Hut-Funktion, die genau an der Stelle x_i gleich 1 sind, und an den anderen Stützstellen gleich 0).

Setze $u(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i u_i(x)$ als Ansatz für die gesuchte Lösung.

Suche also Koeffizienten c_i , so dass DGL ‚möglichst gut' erfüllt ist.

Die Differentialgleichung selbst ist so direkt nicht erfüllbar!

Umformulierung der DGL als Variationsproblem:

$$u_{xx} + f \equiv 0 \Leftrightarrow \int_a^b (u_{xx} + f)\, v(x)\; dx = 0 \qquad \text{für} \quad \text{alle} \quad v(x)$$

Setze in diese Gleichung für u(x) den Ansatz mit den Basisfunktionen, und für v(x) ebenfalls alle Basisfunktion.

$$\int_a^b \left(\sum_i c_i u_{i,xx}(x) + f(x) \right) u_k(x)\; dx = 0 \qquad \text{für} \quad k = 0,\ldots,n$$

$$\sum_{i=0}^{n} \overbrace{\left(\int_a^b u_{i,xx}(x) \cdot u_k(x) dx \right)}^{a_{kj}} c_i = \overbrace{-\int_a^b f(x) u_k(x) dx}^{b_k}$$

$$\text{für} \quad k = 0,\ldots,n$$

ergibt: $A*c = b$

also ein lineares Gleichungssystem zur Berechnung der unbekannten Koeffizienten c_i .

Nach Lösen des LGS liefert

$$u(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i u_i(x)$$

eine Näherungslösung der gegebenen PDE.

Ansatzfunktionen $u_i(x)$ sind so zu wählen, dass sie ‚vernünftig' diff'bar sind und die Randbedingungen erfüllen!

Multigridverfahren:

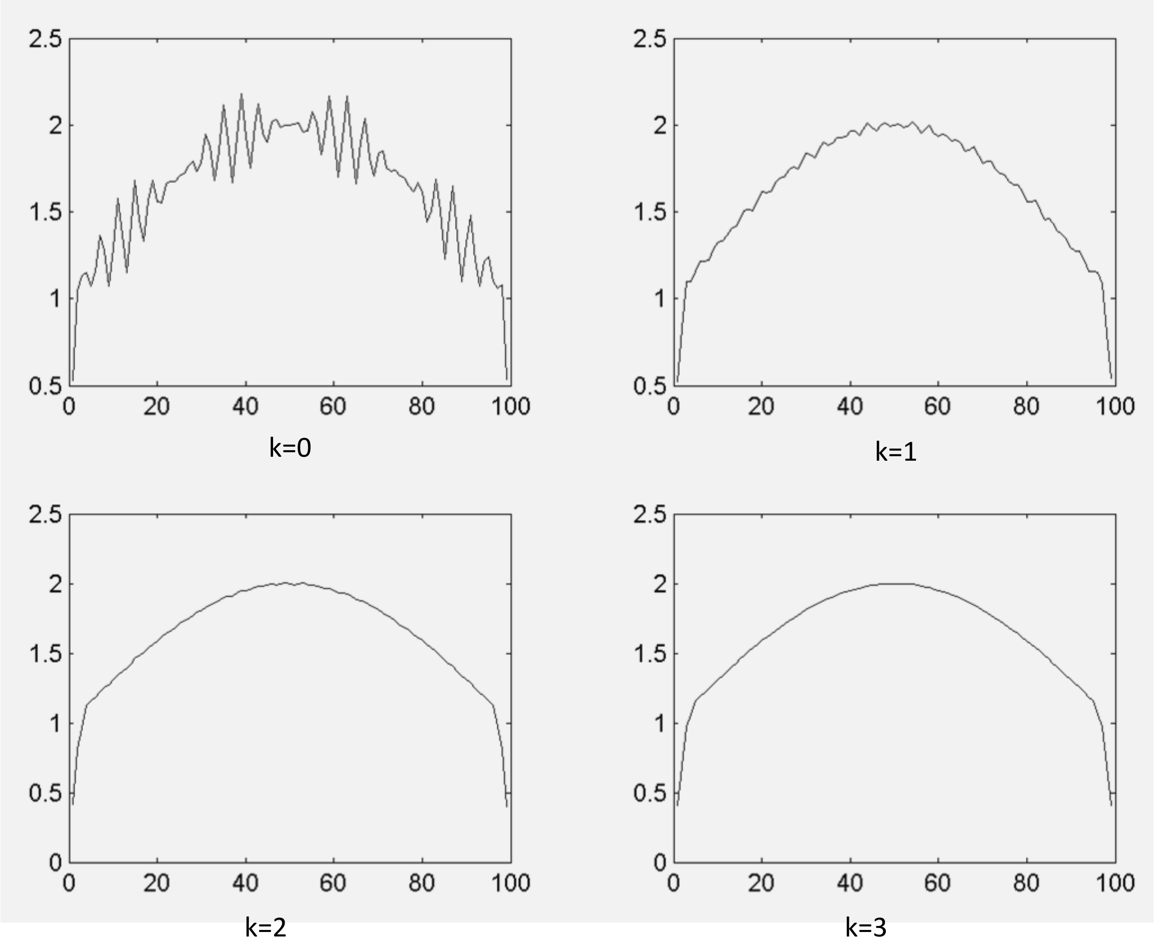
Wende (gedämpftes) Jacobi-Verfahren zur Lösung der entstandenen LGS an.
Liefert Näherungslösungen x_0 , x_1 , ... x_k ...

Beobachtung:

Nach wenigen Iterationen sind die hochfrequenten Fehleranteile verschwunden.

Zur Veranschaulichung:

Vektor $r_k = b - Ax_k$ komponentenweise aufgetragen nach k-tem Iterationsschritt des gedämpften Jacobi-Verfahrens:



Idee:

Betrachte nach k Schritten mit Näherung x_k neues Gleichungssystem

$$A(x_k + x) = b \Leftrightarrow Ax = b - Ax_k \Leftrightarrow Ax = r_k$$

r_k ist durch Iteration ‚glatt' geworden und kann genauso gut auf einer gröberen Diskretisierung dargestellt werden!

In der Sprache der Wavelets:

Zerlegt man r_k in glatten Mittelwertanteil und rauhen Differenzanteil, so ist der hochfrequente Differenzanteil praktisch Null.

Projeziere LGS mittels Wavelet-Mittelwert-Filter auf halb so großes LGS und löse $A_{grob}\ x_{grob} = r_{k,grob}$ auf grobem Gitter.

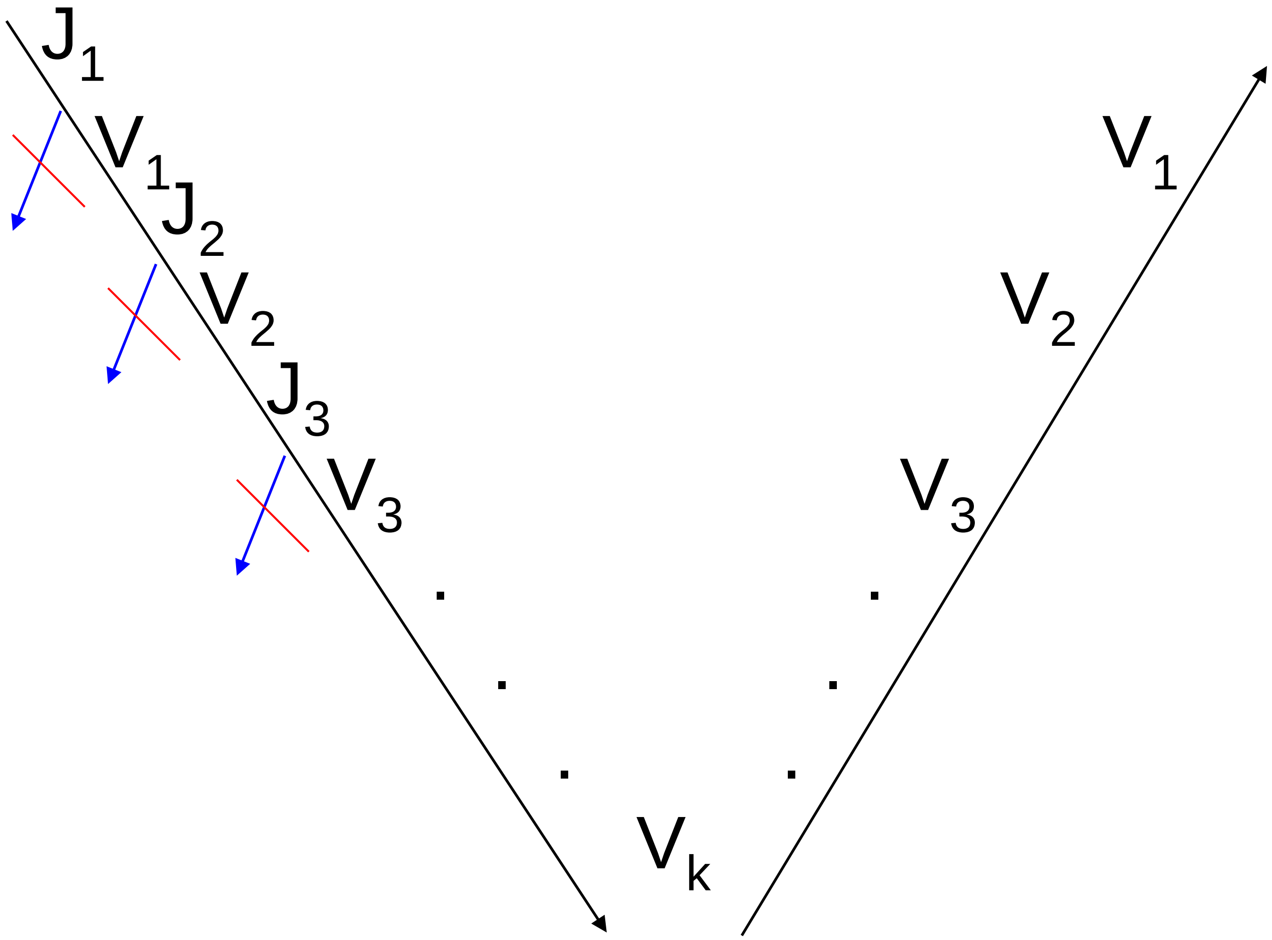
Projeziere Korektur x_{grob} wieder nach oben auf feines Gitter
→ Korrektur x

Diese Idee ist nun rekursiv auch grobem Gitter auf A_{grob} anwendbar, also wieder Jacobi-Iteration plus Wavelet-Filter.

Gesamtschau:

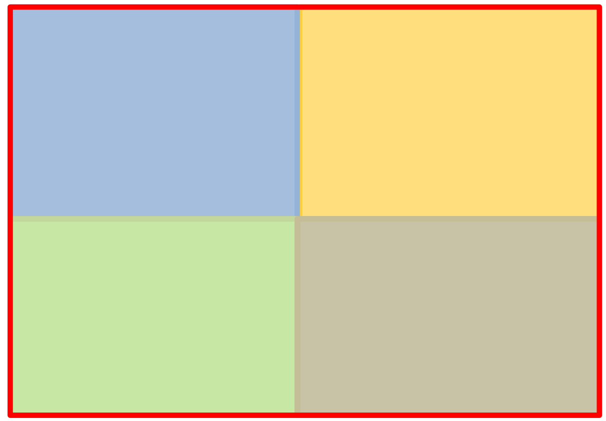
Rekursive Wavelet-Aufspaltung in rauhen und glatten Anteil.
Glättung durch Jacobi-Iteration und
Vernachlässigung des rauhen Anteils durch Projektion
Lösen des groben Problems und Rückprojektion der Korrektur

V-Zyklus:



J: Jacobi-Iteration, V: Projektion/Rückprojektion

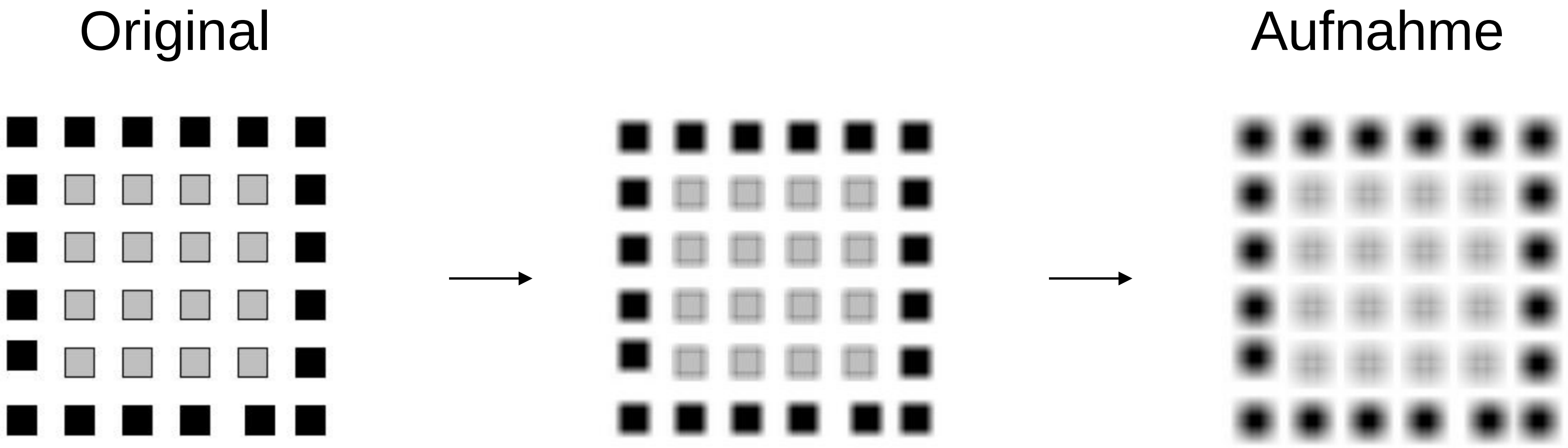
Gebietszerlegungs-Verfahren:



Löse die Differentialgleichung auf den 4Teilgebieten.

Konstruiere daraus durch Iteration oder Korrektur die Lösung auf dem Gesamtgebiet.

Diffusionsgleichung und Bild-verarbeitung:



Betrachte Bild als Momentaufnahme einer zeitabhängigen Strömung. Man kann sich vorstellen, dass die vorliegende Aufnahme durch einen Diffusionsprozess entstanden ist.

$$u_t = div(D \cdot \nabla u)$$

Veränderung des Bildes durch Zurückrechnen des Diffusions-prozesses.

(Diffusion ←→ Faltung mit Gauss-Funktion,
Gauss-Filter, Mittelwert-Filter,Weichzeichner)

Betragsmäßig großer Gradient zeigt Kanten an.
Außerdem ist das Bild ev. gestört durch Rauschen.
Ziel: Entferne Rauschen unter Beibehaltung der Kanten.

Wähle daher Diffusionskoeffizient D in Abhängigkeit vom Gradienten:

$$\boxed{u_t = div\left(\overbrace{\frac{1}{1+\left|\nabla u\right|^2/\lambda^2}}^{D} \cdot \nabla u \right)}$$

Effekt: Gradient nahe bei Null ergibt $D \approx 1$ → Normale Diffusion (entspricht Weichzeichner zur Noise-Reduktion)

Gradient groß → ‚Rückwärts'-Diffussion, Bild wird schärfer, Kanten bleiben erhalten.

$$u_{k+1,ij} = u_{k,ij} + \Delta t \ast div(..)_{ij}$$

t