

Wann wird der relative Fehler groß?

Wenn $|a+b| \gg |a+b+c|$, oder $a+b+c \approx 0$

Andere Reihenfolge der Berechnung liefert Faktoren
 $|(b+c)/(a+b+c)|$ oder $|(a+c)/(a+b+c)|$;

Es wird jeweils der Fehler, der bei der ersten Addition auftritt, verstärkt.

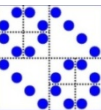
Folien-Beispiel: Maschinenzahlen

$$a = (1.11)_2 * 2^{-1}, \quad b = - (1.10)_2 * 2^{-1} \text{ und} \\ c = (1.10)_2 * 2^{-3} \quad \text{bei dreistelliger Mantisse.}$$

Addition:

$$\begin{aligned} \tilde{y} &= \left((1.11)_2 * 2^{-1} +_M (-1.10)_2 * 2^{-1} \right) +_M (1.10)_2 * 2^{-3} \\ &= (1.00)_2 * 2^{-3} +_M (1.10)_2 * 2^{-3} \\ &= (1.01)_2 * 2^{-2} \end{aligned}$$

Dabei tritt kein Fehler auf!
Andere Reihenfolge?



$$\begin{aligned}\hat{y} &= (1.11)_2 * 2^{-1} +_M \left((-1.10)_2 * 2^{-1} \right) +_M (1.10)_2 * 2^{-3} \\ &= (1.11)_2 * 2^{-1} +_M (-1.00)_2 * 2^{-1} \\ &= (1.10)_2 * 2^{-2}\end{aligned}$$

mit relativem Fehler

$$\left| \frac{(1.01)_2 * 2^{-2} - (1.10)_2 * 2^{-2}}{(1.01)_2 * 2^{-2}} \right| = 20\%$$

Merke: Reihenfolge der Operationen ist wichtig!

Bisher waren a, b und c Maschinenzahlen
Jetzt betrachten wir Eingangszahlen, die schon selbst mit
Rundungsfehler behaftet sind:

a \rightarrow **a(1+ ε_a)** mit **| ε_a | \leq ε** , usw.

1. $e = (a \cdot (1 + \varepsilon_a)) +_M (b \cdot (1 + \varepsilon_b))$

2. $f = e +_M (c \cdot (1 + \varepsilon_c))$.

Relativer Fehler in erster Näherung:

$$\frac{f - y}{y} = \frac{a}{a+b+c} \varepsilon_a + \frac{b}{a+b+c} \varepsilon_b + \frac{c}{a+b+c} \varepsilon_c + \frac{a+b}{a+b+c} \varepsilon_1 + \varepsilon_2.$$

Erste Terme: Auswirkung der Eingabefehler

Vierter Term: Auswirkung des Fehlers bei der ersten Addition

Fünfter Term: Fehler bei der zweiten Addition

Auslöschung

Kritischer Fall: Endergebnis nahe bei Null!

Folien-Beispiel:

Differenz zwischen $x=3/5$ und $y=4/7$ bei fünf-stelliger Mantisse.

Exakte Rechnung: $x - y = 1/35 = (0.11101\dots)_2 2^{-5}$

Rundung von x und y liefert

für $(1.0011001\dots)_2 2^{-1}$ und $(1.001001\dots)_2 2^{-1}$

die Näherungen $(1.0011)_2 2^{-1}$ und $(1.0010)_2 2^{-1}$

Damit ergibt sich die Rechnung

$$\begin{aligned} \underline{(1.0011)}_2 2^{-1} - \underline{(1.0010)}_2 2^{-1} &= \\ &= \underline{(0.0001)}_2 2^{-1} = (1.0000)_2 2^{-5} \end{aligned}$$

Dabei sind unterstrichene Stellen noch exakt, während nicht unterstrichene Stellen durch Rundung verfälscht sind.

Die kursiven Nullen im Ergebnis sind wertlos!

Das berechnete Ergebnis lautet also **1/32**,

Relativer Fehler:

$$(1/35 - 1/32) / (1/35) = -0.0938$$

entspricht ca. 9.4% Abweichung.

Vgl. Maschinengenauigkeit für $t = 5$ von 0.031 ca. 3.1%

Die unterstrichenen, ‚guten‘ Stellen gehen durch die Differenz verloren und es bleiben die unsicheren Stellen übrig.

Bei $t=3$ zeigt sich dieser Effekt noch stärker:

Rechnung: $(\underline{1.01})_2 2^{-1} - (\underline{1.01})_2 2^{-1} = 0$

Fehler: 100%,

bei Maschinengenauigkeit $0.125=1/8$ oder 12.5%

Relativer Fehler bei Differenz $y = a - b$ nach 2.13:

$$\varepsilon_y = \frac{a - b - (a(1 + \varepsilon_a) - b(1 + \varepsilon_b)) \cdot (1 + \varepsilon_-)}{a - b}$$

$$= -\frac{a}{a - b} \varepsilon_a + \frac{b}{a - b} \varepsilon_b - \varepsilon_-$$

Eingabefehler werden extrem verstärkt, wenn $a-b$ nahe bei Null ist, also falls sich a und b fast auslöschen!

Aber:

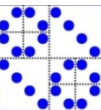
Sind a und b exakt ohne Fehler, dann ist

$$\varepsilon_a = 0 \quad \text{und} \quad \varepsilon_b = 0 \quad .$$

Daher ergibt sich dann nur ein relativer Fehler in der Größenordnung der Maschinengenauigkeit!

Also Differenz mit exakten Zahlen ist OK!

Nur bei Differenz von fehlerbehafteten Zahlen droht Gefahr.



Berechnung der Exponential-Funktion

$$\exp(x) = \sum x^k / k!$$

an einer Stelle X mittels Programm:

```

Y:=1.0 ; T=1.0; K=1;
WHILE ( Y ≠ Y + T*X / K )
    T = T * X / K ; Y = Y+ T ; K = K + 1 ;
END
    
```

<i>X</i>	<i>Y</i>	<i>EXP(X)</i>
1	2.718282	2.718282
20	$4.8516531 * 10^8$	$4.8516520 * 10^8$
-10	$-1.6408609 * 10^{-4}$	$4.5399930 * 10^{-5}$
-20	1.202966	$2.0611537 * 10^{-9}$

Für $X = -15$ ergibt sich:

$$\begin{aligned}
 & 1 - 15 + 112.5 - 562.5 + \dots - 312540.3 + 334864.6 - 334864.6 + \\
 & \quad + 313935.5 - \dots - 0.00000061660813 \dots = \\
 & = 3.050\dots \cdot 10^{-7}
 \end{aligned}$$

Auslöschung durch wiederholte Differenz im
Schritt $T = T + Y$!

Der Term T wächst zunächst, um am Ende einen sehr kleinen
Wert anzunehmen!

Große Zwischenwerte + kleine Endwerte \rightarrow Auslöschung
Problematisch!

Kondition und Stabilität

2.14 Definition:

Ein Berechnungsverfahren ist eine Folge von mathematischen Berechnungen zur Lösung eines Problems mit Eingangsdaten

$x \in \mathbb{R}^n$ und dem Ergebnis $y = f(x) \in \mathbb{R}$

Zur Berechnung von y wird es verschiedene Algorithmen geben, die sich z.B. in der Reihenfolge der Operationen unterscheiden (vgl. Addition $a+b+c$).

Zum Vergleich verschiedener Algorithmen betrachtet man die entstehenden Rundungsfehler.

Dazu kann man u.a. Taylor-Entwicklung oder Epsilontik verwenden.

Zur Bestimmung der Kondition betrachten wir

- Eingabedaten x_i , versehen mit absoluten Rundungsfehlern δ_{x_i} , $i=1, \dots, n$. (Zur Vereinfachung: $n=1$, also nur ein x)
- $f(x)$ als black box; wir sind nur an der Ein- und Ausgabe interessiert!

Rundungsfehler innerhalb der Ausführung von $f(x)$ sollen zunächst nicht auftreten!

Für den absoluten Fehler im Resultat gilt dann – unter Vernachlässigung der während der Berechnung sonst auftretenden Rundungsfehler:

$$y + \delta_y = f(x + \delta_x) = f(x) + f'(x)\delta_x + O(\delta_x^2).$$

In erster Näherung gilt daher

$$\delta_y \doteq f'(x)\delta_x$$

Daher ist der relative Fehler des Resultats y

$$\varepsilon_y = f_{rel}(y) = \frac{\delta_y}{y} \doteq \frac{xf'(x)}{y} \cdot \frac{\delta_x}{x} = \frac{xf'(x)}{y} f_{rel}(x) = \frac{xf'(x)}{f(x)} \cdot \varepsilon_x$$

2.15. Definition:

Unter der Konditionszahl des Problems

$$y = f(x)$$

bezüglich Eingabewert x

versteht man den Betrag des Verstärkungsfaktors

$$cond_x := \left| \frac{x \cdot f'(x)}{f(x)} \right|$$

Die Konditionszahl misst die Sensibilität des Resultats y in Abhängigkeit von den Fehlern in der Eingabe x .

cond groß, z.B. wenn:

- große Eingabe gegenüber kleinem Endwert
- nahezu senkrechte Tangente ($|f'(x)|$ groß)

Ein Problem heißt gut konditioniert \leftrightarrow

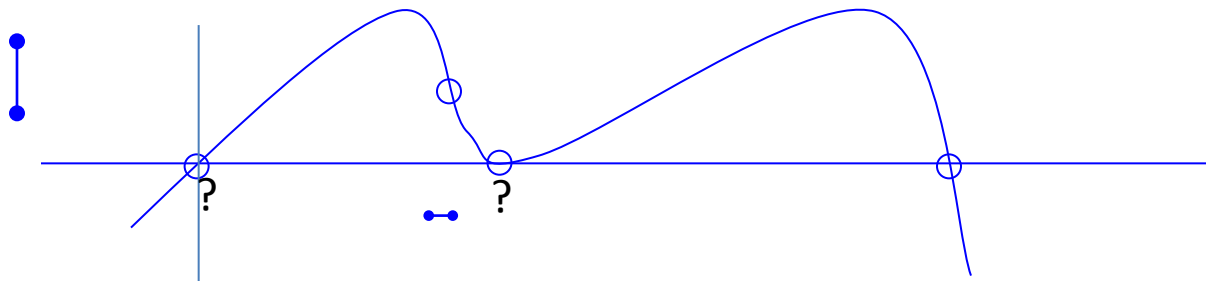
**wenn kleine relative Fehler in x bei exakter Arithmetik (also ohne Rundungsfehler während der weiteren Rechnung) zu kleinen relativen Fehlern im Resultat y führen:
 ε_y ungef. in der Größenordnung von ε_x**

Andernfalls liegt schlechte Kondition bzgl. x vor.

Die Konditionszahl misst den sog. unvermeidbaren Fehler, der durch **das Problem selbst** an einer Stelle x gegeben ist.

Beispiel: $\text{cond}(\exp(x)) = |x|$
 $\text{cond}(\ln(x)) = |1/\ln(x)|$

Bild einer Funktion, Punkte schlechter Kondition:



Frage: Schlecht konditionierte Probleme im Alltag?
Beispiele PPT.

Beispiel: Konditionszahlen zu $y=a+b+c$

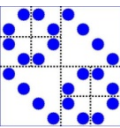
$$\text{cond}_a = \left| \frac{a}{a+b+c} \right|, \quad \text{cond}_b = \left| \frac{b}{a+b+c} \right|, \quad \text{cond}_c = \left| \frac{c}{a+b+c} \right|,$$

Das sind gerade die Verstärkungsfaktoren der rel. Fehler der Eingabedaten in der Formel für den relativen Fehler:

$$\frac{y-f}{y} \doteq \frac{a}{a+b+c} \varepsilon_a + \frac{b}{a+b+c} \varepsilon_b + \frac{c}{a+b+c} \varepsilon_c + \underbrace{\frac{a+b}{a+b+c}}_{\text{Konditionszahl bzgl. der zweiten Addition}} \varepsilon_1 + \varepsilon_2.$$

Konditionszahl bzgl. der zweiten Addition $f(a+b,c)=(a+b)+c$

Unvermeidbarer Fehler!



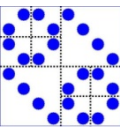
Betrachten wir die Gesamtrechnung, so lassen sich Konditionszahlen zu jedem einzelnen Rechenschritt angeben.

Damit ist es möglich, für den gesamten Algorithmus das Fehlerverhalten zu bestimmen.

Dies ist meist zu aufwändig oder gar nicht möglich!

Dies ermöglicht eine mehr mathematische Formulierung der *Epsilontik*.

z.B. ist der vierte blaue Term gleich der Konditionszahl der Teilfunktion, die die Addition von $(a+b)$ mit c beschreibt.

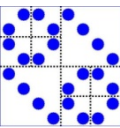


2.16. Definition:

Sei das Problem $y=f(x)$ gut konditioniert.

Existiert dann zusätzlich auch ein gutartiges Berechnungsverfahren, bei dem die relativen Fehler nicht zusätzlich stark vergrößert werden, so spricht man von einem *numerisch stabilen* Algorithmus.

Ein Berechnungsverfahren, das trotz kleiner Konditionszahl zu vergrößerten relativen Fehlern im Resultat führen kann, heißt *numerisch instabil*.



*Wenn ja, formuliere numerisch stabiles
Berechnungsverfahren:*

Prüfe das Berechnungsverfahren mit Epsilontik:

*Ersetze dazu jede Eingangsvariable x durch $x(1+\varepsilon_x)$ und
jede auszuführende Operation*

$$(x \text{ op}_M y) = (x \text{ op } y)^*(1+\varepsilon_{op})$$

mit $|\varepsilon_x| \leq \varepsilon$ und $|\varepsilon_{op}| \leq \varepsilon$.

*Vernachlässige dabei Terme höherer Ordnung in ε
(also $\varepsilon^2, \varepsilon^3, \varepsilon^4, \dots$).*

Damit erhält man das gestörte Endergebnis.

*Berechne und diskutiere dann den relativen Fehler in erster
Ordnung durch Abschätzen der Beträge der Einzelterme*

$$|f_{rel}| \leq |Term| \cdot eps + |Term| \cdot eps + \dots$$

Ist das Problem schlecht konditioniert, dann ist nur Schadensbegrenzung möglich:

Verwende ev. höhere Genauigkeit:

	<i>Eingabefehler</i>	10^{-12}
<i>mit</i>	<i>Konditionszahl</i>	10^8
<i>ergibt</i>	<i>Ausgabefehler</i>	10^{-4}

Ist dieser Ausgabefehler noch tolerierbar?

Wenn nein, dann kann zu einer Verbesserung nur der Eingabefehler verkleinert werden.

Beispiel: Berechnung von

$$f(x) = 1 - \sqrt{1 - x^2}, \quad x \approx 0$$

Kondition ist OK, da

$$\text{cond}_x = \left| \frac{x^2}{(1 - \sqrt{1 - x^2})\sqrt{1 - x^2}} \right| \rightarrow 2 \quad \text{für} \quad x \rightarrow 0 \quad (\text{L'Hospital})$$

Allerdings ist die Auswertung in dieser Form numerisch instabil

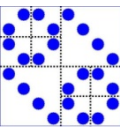
$$x \rightarrow x^2 \rightarrow 1 - x^2 \rightarrow \sqrt{1 - x^2} \rightarrow 1 - \sqrt{1 - x^2}$$

da Auslöschung im letzten Schritt!

Bessere Formulierung:

$$\begin{aligned}
 1 - \sqrt{1 - x^2} &= \frac{(1 - \sqrt{1 - x^2})(1 + \sqrt{1 - x^2})}{1 + \sqrt{1 - x^2}} = \\
 &= \frac{1 - (1 - x^2)}{1 + \sqrt{1 - x^2}} = \frac{x^2}{1 + \sqrt{1 - x^2}}
 \end{aligned}$$

Entsprechend lässt sich die Berechnung der Exponentialfunktion für große negative x ‚retten‘, indem wir $\exp(-1000)$ ersetzen durch $1/\exp(1000)$.



Beispiel: $f(x) = 1 - \cos(x)$ in der Nähe von $x=0$
 $f(x)$ ist wieder gut konditioniert bei 0, da

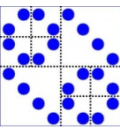
$$\text{cond}_x = \left| \frac{xf'}{f} \right| = \left| \frac{x \cdot \sin(x)}{1 - \cos(x)} \right| = \left| \frac{x^2 + \dots}{1 - (1 - x^2/2 + \dots)} \right| \rightarrow 2, \quad x \rightarrow 0$$

Aber bei 0 ist $\cos(x)$ nahe bei 1 \rightarrow wieder Auslöschung!

In MATLAB: $1 - \cos(10^{-8})$ ergibt 0;

in $\cos(10^{-3}) = 0.\underline{999999}50000004$

verliert man bei der Differenz 6 signifikante Stellen

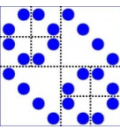


Anderer Berechnungsweg:

$$1 - \cos(x) = 2 \sin^2(x/2)$$

oder Reihenentwicklung des Cosinus

$$1 - \cos(x) = 1 - \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots\right) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} - \dots$$



Beispiel: $y = a^2 - b^2$ bei $|a|=|b|$

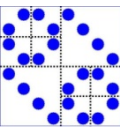
Anwendung der Epsilontik; seien a, b Maschinenzahlen:
Berechne erst beide Produkte, dann die Differenz.

Relativer Fehler:

Nun seien auch a und b fehlerhaft: $a(1+\varepsilon_a)$, $b(1+\varepsilon_b)$

$$\varepsilon_y \doteq \boxed{-\frac{2a^2}{a^2 - b^2} \varepsilon_a + \frac{2b^2}{a^2 - b^2} \varepsilon_b} - \boxed{\frac{a^2}{a^2 - b^2} \varepsilon_1 + \frac{b^2}{a^2 - b^2} \varepsilon_2} - \varepsilon_3$$

Fehler:	Eingabefehler	Produktfehler	Differenzfehler
---------	---------------	---------------	-----------------



Konditionszahlen:

$$\text{cond}_a = \left| \frac{a \cdot \frac{dy}{da}}{a^2 - b^2} \right| = \left| \frac{2a^2}{a^2 - b^2} \right|, \quad \text{cond}_b = \left| \frac{b \cdot \frac{dy}{db}}{a^2 - b^2} \right| = \left| \frac{-2b^2}{a^2 - b^2} \right|$$

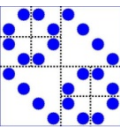
Problem ist schlecht konditioniert für $|a| \cong |b|$

Andere Art der Berechnung: $\mathbf{y = (a - b)(a + b)}$

$$\begin{aligned} f &= (a(1 + \varepsilon_a) - b(1 + \varepsilon_b))(1 + \varepsilon_-)(a(1 + \varepsilon_a) + b(1 + \varepsilon_b))(1 + \varepsilon_+) \cdot (1 + \varepsilon_*) \\ &\doteq (a^2(1 + 2\varepsilon_a) - b^2(1 + 2\varepsilon_b)) \cdot (1 + \varepsilon_- + \varepsilon_+ + \varepsilon_*) \end{aligned}$$

Relativer Fehler in erster Näherung:

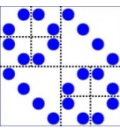
$$\frac{-2a^2}{a^2 - b^2} \varepsilon_a + \frac{2b^2}{a^2 - b^2} \varepsilon_b - \varepsilon_- - \varepsilon_+ - \varepsilon_*$$



Vergleich mit erstem Algorithmus:

Das neue Verfahren ist besser, da i.W. nur der unvermeidbare Fehler (durch Eingabefehler) auftritt!

Grund: Auslöschung in $a - b$ geringer als in $a^2 - b^2$,
da Fehler in a und b kleiner als in a^2 und b^2 .



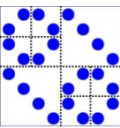
Zusammenfassung

Endlichkeit des Computers führt zu endlicher Menge von Maschinenzahlen.

In jedem Schritt treten Rundungsfehler auf.

Gefährlich sind Operationen, bei denen man signifikante Stellen verliert, wie z.B.:

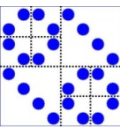
- **Auslöschung (Differenz fast gleicher Zahlen)**
- **Summe zwischen großer Zahl und sehr kleiner Zahl, bei der die signifikanten Stellen in der kleinen Zahl stecken (vgl. wiederholtes Wurzelziehen)**
- **Allgemein Operationsfolgen mit großen Zwischenwerten und kleinen Endwerten**
(vgl. \exp , Teilfunktion schlecht konditioniert).



Algorithmus ist OK, wenn die Größenordnung der relativen Fehler im Resultat ungefähr gleich der Größenordnung der Eingabefehler bleibt.

Umformen eines numerisch instabilen Verfahrens durch

- andere Reihenfolge der Berechnung**
- Anfang der Taylorentwicklung**
- Trigonometrische Formeln**
- algebraische Umformung (binomische F.)**
-**
- Ev. double precision rechnen, damit trotz schlechter Kondition oder Rundungsfehler noch brauchbares Resultat übrigbleibt.**



Systematische Fehler und große Zahl der Operationen können zu schlechten Ergebnissen führen!

(Siehe Beispiel Börsenindex)

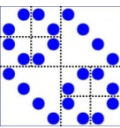
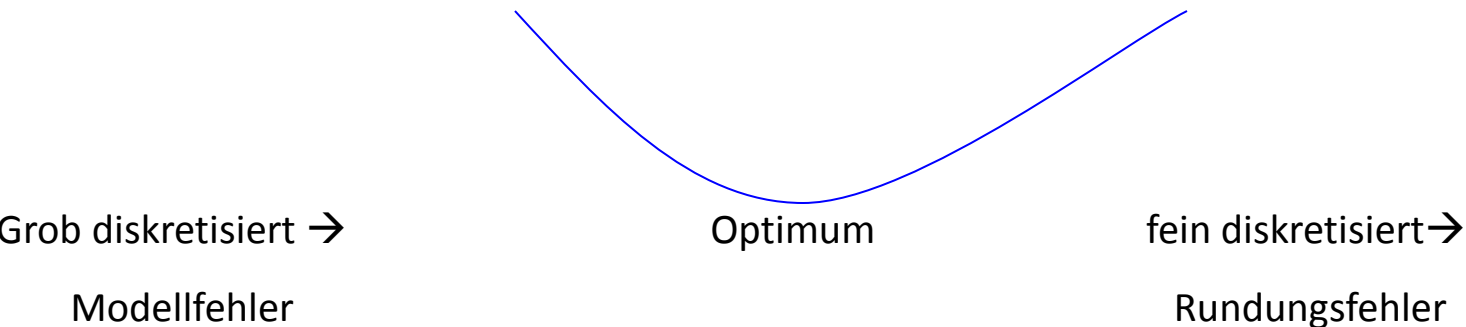
Ev. Modellfehler gegen Rundungsfehler abwägen:

Feineres Modell \rightarrow Mehr Rechnung \rightarrow Mehr Rundungsfehler!

Man muss die optimale Balance finden!

Beispiel Übungsaufgabe Differenzenquotient.

Gesamtfehler:



Beispiel: Verbesserte Fehleranalyse für den numerisch instabilen Fall großer Zwischenwerte

Zerlege Problem $f(x)$ in zwei Schritte

$$y = f(x) = f_2(f_1(x)) = f_2(z)$$

wobei $z = f_1(x)$ großer Zwischenwert und

$y = f_2(z)$ kleiner Endwert.

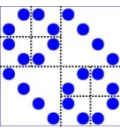
Daher ist Teilproblem $f_2(z)$ für diese Werte schlecht konditioniert,

da $|z / f_2(z)|$ groß ist!

Daher ist Gesamtverfahren nicht numerisch stabil für x .

Verfahren ist numerisch stabil, wenn für jede Zerlegung in Teilprobleme $f_2(f_1(x)) = f_2(z)$, $z = f_1(x)$, $f_2(z)$ stets gut konditioniert ist!

**Konditionszahl \leftrightarrow Gesamtproblem
Numerisch stabil \leftrightarrow Berechnungsform**



Genauere Analyse der numerischen Stabilität durch Bestimmung der Konditionszahlen und Ableitungen aller Teilschritte:

Zerlege Algorithmus in Teilprobleme $f(x) = f_2(f_1(x))$ und berechne alle auftretenden Konditionszahlen $\text{cond}(f_2)$!

Meist zu aufwändig oder unmöglich.

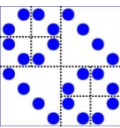
Epsilontik genügt für uns:

(Ersetze $x \rightarrow x(1+\varepsilon)$, $x \text{ op } y \rightarrow (x \text{ op } y)(1+\varepsilon)$)

Streiche Terme höherer Ordnung in $\varepsilon^2, \varepsilon^3, \varepsilon^4, \dots$

Bestimme damit den rel. Fehler des Resultats $(f - y)/f$
in erster Näherung und schätze Beträge ab nach oben

Diskutiere die einzelnen Terme.

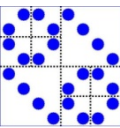


Ziel:

Erkenne aus Formel (Programm), bzw. berechneten (Zwischen)werten,

- ob das Problem gut konditioniert ist, und**
- ob das verwendete Verfahren numerisch stabil ist,**
- bzw. wie das Verfahren ev. verbessert werden kann.**

Klausuraufgabe: $f(x)=\exp(x)-1$, $g(x)=1-x+x^2-x^3$, $h(x)=(1+x^2)(1-\cos^2(x))$



Schlecht konditionierte Probleme:

- Wettervorhersage
- Aktienentwicklung
- ...

Sprunghaft, chaotisch, parameterabhängig

Vorsicht mit Vorhersagen:

“Die einzigen Vorhersagen, die wirklich zutreffen sind die, die man nachträglich macht.”

Geldverdienen mit Schneeballsystem.

Nachträgliches Bewerten von Vorhersagen.

Psychologische Effekte.

