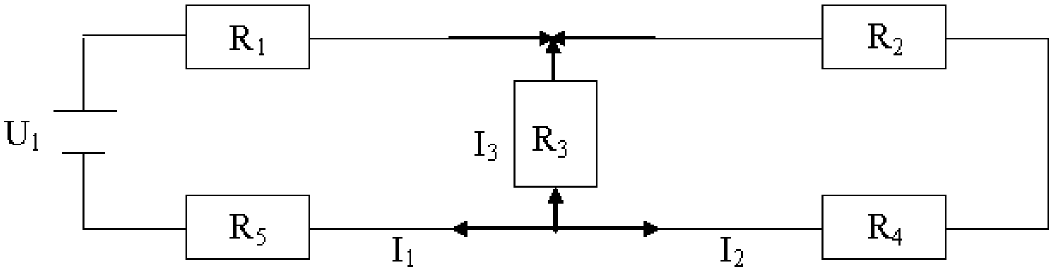
Beispiel: Elektrische Schaltkreise



Ohmsche Widerstände in Reihen- und Parallelschaltung.

Kirchhoff'sche Regeln:

- In jedem Knoten ist die Summe der zufließenden elektrischen Ströme gleich der Summe der abfließenden Ströme.
- In jeder Masche ist die Summe der elektrischen Spannungsabfälle gleich der Summe der in dieser Masche vorhandenen Quellenspannungen.

Mittels **U = R * I** ergibt dies drei lineare Gleichungen

$$\begin{aligned} I_1 + I_2 + I_3 &= 0 \\ R_1 I_1 - R_5 I_1 - R_3 I_3 &= U_1 \\ R_1 I_1 + R_5 I_1 - R_2 I_2 - R_4 I_2 &= U_1 \end{aligned}$$

zur Berechnung der auftretenden Ströme.

In Matrixschreibweise:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ R_1 - R_5 & 0 & -R_3 \\ R_1 + R_5 & -R_2 & -R_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ U_1 \\ U_1 \end{pmatrix}$$

3.1 Dreiecksgleichungssysteme

Beispiel: Unbekannte x_1, x_2, x_3:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 10x_1 & - & 7x_2 & + & 0x_3 & = & 7 \\ & & 2.5x_2 & + & 5x_3 & = & 2.5 \\ & & & & 6.2x_3 & = & 6.2 \end{array}$$

In Matrixschreibweise:

$$\begin{pmatrix} 10 & -7 & 0 \\ 0 & 2.5 & 5 \\ 0 & 0 & 6.2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2.5 \\ 6.2 \end{pmatrix}$$

Wegen der Dreiecksform lässt sich das System leicht von unten her auflösen:

$$x_3 = 6.2/6.2 = 1; \qquad also \quad x_3 = 1;$$

$$2.5x_2 = 2.5 - 5x_3 = -2.5, \qquad also \quad x_2 = -1;$$

$$10x_1 = 7 + 7x_2 = 7 - 7 = 0, \qquad also \quad x_1 = 0;$$

Lösungsvektor: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix};$

Probe durch Einsetzen!

Allgemein:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

wird gelöst mittels **Programm 3.1.1.:**

$$x_n = b_n / a_{nn};$$

$$\textit{für} \quad i = n-1, n-2, \ldots, 1:$$

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j}{a_{ii}}$$

Genauso wird das untere Dreieckssystem

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

von oben her gelöst mit dem Programm:

$$x_1 = b_1 / a_{11};$$

$$\textit{für} \quad i = 2,3,\ldots,n:$$

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j}{a_{ii}}$$

Wichtig: Alle $a_{ii} \neq 0$, da sonst System nicht eindeutig lösbar!

$$\det(A) = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn} \neq 0$$

3.2 Einschub: Rechnen mit Matrizen

Matrix
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \in \Re^{n,m}$$

beschreibt Abbildung

x → f(x) = Ax = b .

Matrizen bilden kommutative Gruppe bzgl. +, bzw.

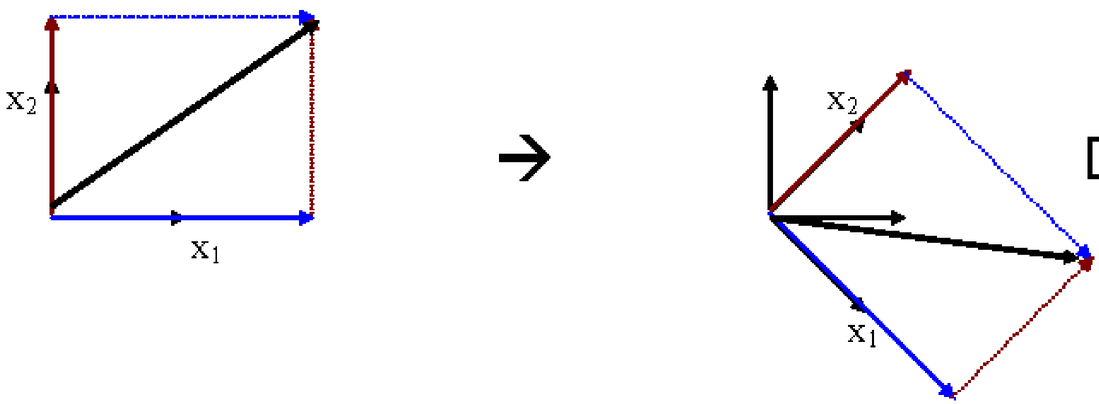
Invertierbare nxn-Matrizen bilden sogar Gruppe bzgl. *
(aber nicht kommutativ!)

A^{-1} * A = I = Einheitsmatrix = Identität = 1

Beispiel:

Abbildung $$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

Daher: $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} / \sqrt{2}$ und $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} / \sqrt{2}$



Drehung um 45°

Beispiele

Google Page-Rank Matrix: Tabelle von Webseiten-Verlinkung:

	w_1	w_2	w_3	w_4
w_1	0	1	0	0
w_2	1	0	1	1
w_3	0	1	0	2
w_4	0	2	3	0

Bild filtern: $\frac{1}{8}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ oder eindimensional $\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Matrix beschreibt lineare Abbildung:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax_1 + bx_2 \\ cx_1 + dx_2 \end{pmatrix}$$

1. Matrix-Multiplikation: A * B = C

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nk} \end{pmatrix} * \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & j & \end{array} \\ \begin{pmatrix} b_{11} & \cdot & b_{1m} \\ \vdots & \cdot & \vdots \\ b_{k1} & \cdot & b_{km} \end{pmatrix} \end{array} = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} & j & \end{array} & \\ \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1m} \\ \vdots & \cdot & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nm} \end{pmatrix} & i \end{array}$$

$$c_{ij} = \sum_{r=1}^{k} a_{ir} \cdot b_{rj}$$

Spezialfall: $$a^T \cdot b = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{n} a_j \cdot b_j \in R$$

ist Skalarprodukt (Inneres Produkt) der Vektoren a und b

$$a \cdot b^T = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 & \cdots & b_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & \cdots & a_1 b_m \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n b_1 & \cdots & a_n b_m \end{pmatrix}$$

als Äußeres Produkt von a und b.

$A = a\, b^T$ ist Rang-1-Matrix, d.h. die durch A beschriebene Abbildung f(x) hat eindimensionalen Bildraum:

$$f(x) = A\,x = (a\, b^T)\, x = (b^T x)\, a = r(x) * a$$

bildet die 2-dim. Ebene auf die Gerade durch den Vektor a ab.

Eine invertierbare n x n–Matrix A hat vollen Rang n und det(A) ≠ 0

$$A^T = \left(\left(a_{i,j} \right)_{i,j=1}^{n,m} \right)^T = \left(a_{j,i} \right)_{j,i=1}^{m,n}$$ Spiegelung an der Hauptdiagonalen

3.2.2. Orthonormalbasis:

Vektoren $\mathbf{u}_j$, $\mathbf{j=1,\dots,n}$ mit $\mathbf{u_j^T u_k = 0}$ für $\mathbf{j \neq k}$

$\mathbf{u_j^T u_k = 1}$ für $\mathbf{j = k}$

Dies sind n ***linear unabhängige*** Vektoren, also eine ***Basis*** des $\mathbf{R^n}$.

Norm: $\mathbf{\|x\|_2 = \sqrt{x^T x}}$ ist die euklid'sche Länge.

Eigenschaften: $\mathbf{\|x\| > 0}$ **für** $\mathbf{x \neq 0}$

$\mathbf{\|a*x\| = |a|*\|x\|}$ **für** $\mathbf{a \in R}$

$\mathbf{\|x+y\| <= \|x\| + \|y\|}$

und

$\mathbf{|x^T y| <= \|x\|*\|y\|}$

Q ist orthogonale Matrix, wenn stets

$\|Qx\|_2 = \|x\|_2$ oder $x^T Q^T Q x = x^T x$, d.h.

$Q^T Q = I$ oder $Q^{-1} = Q^T$

Die Spalten (Zeilen) von Q bilden eine Orthonormalbasis!

Lie Gruppen

Ein lineares Gleichungssystem **Ax = b** ist lösbar, falls

Rang(A) = Rang(A | b), d.h.

b ist durch Spalten von A darstellbar.

Denn mit der Lösung x (falls sie existiert) ist b = Ax eine Linearkombination von Spalten von A:

$$b = A_{\cdot,1} x_1 + \cdots + A_{\cdot,n} x_n$$

Dann ist

$$\mathbf{x = inv(A)*b = A^{-1} * b}$$

Ein lineares Gleichungssystem hat entweder eindeutige/keine/unendlich viele Lösungen!

Ein Vektor u heißt Eigenvektor zu Eigenwert λ, wenn gilt:

$$u \neq 0: \qquad Au = \lambda u$$

Richtung u beschreibt Fixgerade der Abbildung y=Ax

Ist A reell symmetrisch, $A=A^T$, n x n, so gilt sogar:
Es existieren n paarweise orthogonale Eigenvektoren,
also eine Orthonormal-Basis des $|R^n$,
$u_1,\ldots,u_n$, $Au_j = \lambda_j u_j$, $u_i \perp u_j$ für $i \neq j$, $\| u_j \| = 1$

$$AU = A\begin{pmatrix} u_1 & \cdots & u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Au_1 & \cdots & Au_n \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1 u_1 & \cdots & \lambda_n u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 & \cdots & u_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} = U\Lambda$$

U liefert ideale Basis für A: $$U^T A U = \Lambda$$

3.3.1. Beispiel:

$$\begin{array}{rcrcrcl} 10x_1 & - & 7x_2 & + & 0x_3 & = & 7 \\ -3x_1 & + & 2x_2 & + & 6x_3 & = & 4 \\ 5x_1 & - & x_2 & + & 5x_3 & = & 6 \end{array}$$

In Matrixschreibweise:

$$\begin{pmatrix} 10 & -7 & 0 \\ -3 & 2 & 6 \\ 5 & -1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Grundidee: Zurückführung auf den bekannten Fall eines Dreiecksgleichungssystems.

3.3.2. Erlaubte Transformationen:

- **Multiplizieren einer Zeile (Gleichung) mit einer Zahl verschieden von Null.**
- **Addieren eines Vielfachen einer Zeile zu einer anderen Zeile (Gleichung).**
- **Vertauschen von Zeilen (Gleichungen), bzw. Spalten (Unbekannten) (entspricht Umnummerierung).**

Operationen sind dabei nicht nur an der Matrix durchzuführen, sondern ev. auch an der rechten Seite (Vektor b) und dem Lösungsvektor x!
Benutze diese Regeln, um in der Matrix die Subdiagonal-Elemente der Reihe nach von oben nach unten, bzw. von links nach rechts, zu Null zu machen

→ Dreieckssystem.

$$\begin{pmatrix} 10 & -7 & 0 \\ -3 & 2 & 6 \\ 5 & -1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}, \qquad \begin{matrix} \cdot(3/10) & \\ \downarrow & + \\ & \end{matrix}$$

Zu Eliminieren: -3

Addiere dazu zur zweiten Zeile die erste, multipliziert mit 3/10.

Ergibt:

$$\begin{pmatrix} 10 & -7 & 0 \\ 0 & -0.1 & 6 \\ 5 & -1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 6.1 \\ 6 \end{pmatrix}, \qquad \begin{matrix} \cdot(-5/10) & \\ | & \\ \downarrow & + \end{matrix}$$

Danach soll 5 zu Null werden:

Dritte Zeile - 5/10 * Erste Zeile

$$\begin{pmatrix} 10 & -7 & 0 \\ 0 & -0.1 & 6 \\ 0 & 2.5 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 6.1 \\ 2.5 \end{pmatrix}, \qquad \cdot(2.5/0.1) \;\; \downarrow \;\; +$$

Eliminiere 2.5 in letzter Zeile.

Resultat:

$$\begin{pmatrix} 10 & -7 & 0 \\ 0 & -0.1 & 6 \\ 0 & 0 & 155 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 6.1 \\ 155 \end{pmatrix},$$

Dieses System kann nun von unten her aufgelöst werden, wie in Abschnitt 3.1. beschrieben.

Benutze also jeweils das Diagonalelement, um die darunter liegenden Einträge Spalte für Spalte zu eliminieren, und zwar von a_{11} , a_{22} , bis $a_{n-1,n-1}$.

Problem: Es könnte irgendwann eine Null auf der Diagonalen auftreten: $a_{ii}=0$!!!???
Was dann?

Im Beispiel: Ersetze $\mathbf{a_{22} = 2}$ durch $\mathbf{a_{22} = 2.1}$

$$\begin{pmatrix} 10 & -7 & 0 \\ -3 & 2.1 & 6 \\ 5 & -1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}, \qquad \begin{matrix} 3/10 \\ \downarrow \\ \end{matrix} \qquad \begin{matrix} -5/10 \\ | \\ \downarrow \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 10 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 2.5 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 6.1 \\ 2.5 \end{pmatrix}.$$

Um Fortfahren zu können, ist eine Vertauschung notwendig, z.B. vertausche zweite Zeile mit dritter Zeile.

$$\begin{pmatrix} 10 & -7 & 0 \\ 0 & 2.5 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2.5 \\ 6.1 \end{pmatrix} \qquad \updownarrow$$

Problem gelöst!

Betrachten wir das ursprüngliche System, so sehen wir, dass wir zwar ohne Vertauschung durchkommen, aber der Wert -0.1 auf der Diagonalen a_{22} führt zu der großen Zahl 155 in der letzten Zeile.

Erinnerung: **Zu vermeiden sind große Zwischenwerte!**

Daher ist es auch im ursprünglichen System besser, die Vertauschung von zweiter und dritter Zeile vorzunehmen.

$$\begin{pmatrix} 10 & -7 & 0 \\ 0 & 2.5 & 5 \\ 0 & -0.1 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2.5 \\ 6.1 \end{pmatrix} \qquad \updownarrow \quad \begin{array}{c} \cdot\, 0.1/2.5 \\ \downarrow \\ + \end{array}$$

Dann lautet der letzte Eliminationsschritt

$$\begin{pmatrix} 10 & -7 & 0 \\ 0 & 2.5 & 5 \\ 0 & 0 & 6.2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2.5 \\ 6.2 \end{pmatrix}$$

Es treten keine großen Zwischenwerte mehr auf.

Allgemeines Vorgehen: ***Pivotsuche***

Sieht im k-ten Eliminationsschritt so aus:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ 0 & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & a_{k-1,k-1} & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \boxed{a_{kk}} & \cdots & a_{k,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nk} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Suche in Untermatrix ‚großen' Eintrag und vertausche entsprechend Zeilen und Spalten, so dass diese große Zahl an die Diagonal-Position a_{kk} kommt.

Dieses Element heißt *Pivotelement.*

Gebräuchlichste Variante:

3.3.3. Spaltenpivotsuche:

Durchsuche nur die Spalte von a_{kk} bis a_{nk} nach betragsgrößtem Element a_{jk} und vertausche dann die gefundene Zeile j mit der k-ten Zeile.

Der Zusatzaufwand ist gering, da nur jeweils eine Spalte durchsucht werden muss, und zwei Zeilen (Gleichungen) vertauscht werden müssen.

Vertausche also zwei Zeilen in der Matrix und entsprechend in der rechten Seite b.

Weniger üblich - *Zeilenpivotsuche*:

Durchsuche die k-te Zeile nach betragsgrößtem Element

und vertausche zwei Spalten (= Umnummerierung in Vektor x), so dass das betragsgrößte Element der k-ten Zeile an die Diagonalposition kommt.

Keine Vertauschungen in b nötig!

Totalpivotsuche:

Durchsuche die gesamte n-k+1 x n-k+1 – Untermatrix und vertausche sowohl Spalten, als auch Zeilen, um das betragsgrößte Element an die Diagonalposition zu versetzen.

Aufwändig! Nur sinnvoll, wenn das Gleichungssystem sehr schlecht konditioniert ist! (Mehr dazu später)

3.3.4. Umwandlung auf Dreiecksform mit Spaltenpivotsuche: Algorithmus der Gauss-Elimination.

1. Teil des Programms: Pivotsuche und –vertauschung

```
FOR k=1,...,n-1 DO
        alpha = |a(k,k)|; j=k;
        FOR s=k+1,...,n DO
              IF |a(s,k)| > alpha THEN
                  alpha = |a(s,k)|; j=s;
              ENDIF
         ENDFOR
   # Pivotelement ist a(j,k) und Pivotzeile ist j
         FOR i=k,...,n DO
             alpha = a(k,i);  a(k,i) = a(j,i);  a(j,i) = alpha;
         ENDFOR
         alpha = b(j);  b(j) = b(k);  b(k) = alpha;
```

2. Teil: Eigentliche Elimination

```
    # Eliminationsschritt
      FOR s=k+1,...,n DO
           l(s,k) = a(s,k)/a(k,k);
           b(s) = b(s) - l(s,k)b(k);
           FOR  i=k+1,...,n DO
                a(s,i) = a(s,i) - l(s,k)a(k,i);
           ENDFOR
      ENDFOR
 ENDFOR
```

Dadurch ist das System auf obere Dreiecksform gebracht, und kann wie in 3.1 beschrieben einfach von unten her gelöst werden.

3. 4 Die LU-Zerlegung

3.4.1. Definition:

Sei $\mathbf{A}_k$ die Matrix, die im k-ten Schritt der Gauss-Elimination bearbeitet wird, also $\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}$ die Ausgangsmatrix und $\mathbf{A}_n = \mathbf{U}$ die Endmatrix in oberer Dreiecksgestalt.

Die Gewichte $\mathbf{l(s,k)=l_{s,k}}$ aus obigem GE-Algorithmus schreiben wir in eine neue untere Dreiecksmatrix:

$$L := \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ l_{2,1} & \ddots & & & & \\ \vdots & \ddots & 1 & & & \\ \vdots & & l_{k+1,k} & 1 & & \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \ddots & \\ l_{n,1} & \cdots & l_{n,k} & \cdots & l_{n,n-1} & 1 \end{pmatrix}$$

Für jede Spaltenelimination sammeln wir die Gewichte in

$$L_k := \begin{pmatrix} 0 & & & & & \\ \vdots & \ddots & & & & \\ \vdots & & 0 & & & \\ \vdots & & \boxed{l_{k+1,k}} & 0 & & \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & & l_{n,k} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

P sei die Permutationsmatrix zu den Pivotvertauschungen.

Beispiel: Vertauschung 1←→ 2 entspricht $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Im Folgenden betrachten wir zur Vereinfachung die Gauss-Elimination <u>ohne</u> Pivotsuche und ohne Permutation **P**.

Der k-te Schritt der GE kann als Matrixprodukt beschrieben werden in der Form

$$A_{k+1} = (I - L_k)A_k = A_k - L_k A_k$$ mit Einheitsmatrix I.

(Ziehe von den unteren Zeilen von A_k jeweils die entsprechend gewichtete k-te Zeile ab.)

$$L_k \cdot A_k = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & 0 & \cdot \\ \cdot & \boxed{l_{k+1,k}} & \cdot \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & l_{n,k} & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} * \\ \boxed{A_{k,.}} \\ * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l_{k+1,k} * A_{k,.} \\ \vdots \\ l_{n,k} * A_{k,.} \end{pmatrix}$$

Dabei bezeichnet $A_{k,.}$ die k-te Zeile von A_k .

Insgesamt:

$$U = A_n = (I - L_{n-1})A_{n-1} = \cdots = \overbrace{(I - L_{n-1})\ldots(I - L_1)}^{\tilde{L}}A_1 = \tilde{L}A$$

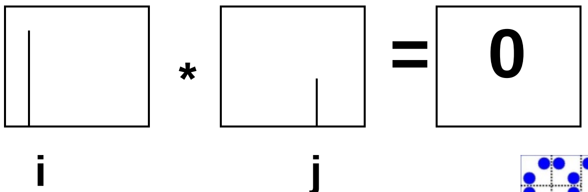
mit der Matrix

$$\tilde{L} := (I - L_{n-1})\ldots(I - L_2)(I - L_1)$$

Wie sieht die Inverse dieser Matrix aus? Es gilt

$$(I + L_j)\cdot(I - L_j) = I - L_j + L_j - L_j^2 = I$$

Dabei verwenden wir: **$L_i L_j$ = 0** für **i<=j;**



Also:

$$\tilde{L}^{-1} = \left((I - L_{n-1})\cdots(I - L_1)\right)^{-1} =$$

$$= (I - L_1)^{-1}\cdots(I - L_{n-1})^{-1} =$$

$$= (I + L_1)\ldots(I + L_{n-1})$$

und wegen

$$(I + L_1)\cdot(I + L_2) = I + L_1 + L_2 + L_1L_2 = I + L_1 + L_2$$

dann auch

$$\tilde{L}^{-1} = (I + L_1)\ldots(I + L_{n-1}) = I + L_1 + L_2 + \ldots L_{n-1} = L.$$

Damit ergibt sich: $U = \tilde{L}A \quad \leftrightarrow \quad A = LU$

Allgemeiner mit Pivotsuche muss noch die Permutation **P** mitberücksichtigt werden, die durch das Auswählen der Pivotelemente hervorgerufen wird. Dann gilt:

$$PA = LU$$

Allgemeines Vorgehen:

Sammle aus dem Algorithmus 3.3.4 der Gauss-Elimination die Gewichte $l_{j,k}$ in Matrix L und bezeichne mit U die obere Dreiecksmatrix, die sich als Endresultat der GE ergibt.

Sammle die Pivotvertauschungen in Permutationsmatrix **P**.

In dem betrachteten Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 & -7 & 0 \\ -3 & 2 & 6 \\ 5 & -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.5 & 1 & 0 \\ -0.3 & -0.04 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 & -7 & 0 \\ 0 & 2.5 & 5 \\ 0 & 0 & 6.2 \end{pmatrix}$$

Vorteil: Nach einmaliger Durchführung und Speicherung von L und U kann jedes weitere Gleichungssystem in A schnell gelöst werden:

$$\boxed{Ax = P^T L(Ux) = b \quad \rightarrow \quad Ly = Pb \quad \textit{und} \quad Ux = y}$$

Bem.: Speichere ev. L im Array von A an Stelle der entstehenden Nullen.