# VI. Iterationsverfahren

*To infinity and beyond*

**Falls eine direkte Lösung des Problems nicht möglich oder ineffizient ist.**

## 6.1. Fixpunktgleichungen

### 6.1.1. Problemstellung:

**Iterationsfunktion $\Phi(x)$**

**Iteration: $x_0 \in R$ Startwert,**

$$x_{k+1} := \Phi(x_k) \in \Re \text{ , } k=0,1,\ldots$$

Dadurch ist eine Folge $x_k$ definiert.

Ist diese Folge konvergent:

$$x_k \rightarrow \bar{x} \qquad \text{für} \quad k \rightarrow \infty,$$

so folgt für eine stetige Funktion $\Phi$:

$$\bar{x} = \lim_{k\to\infty} x_k = \lim_{k\to\infty} \Phi(x_{k-1}) = \Phi(\lim_{k\to\infty} x_{k-1}) = \Phi(\bar{x})$$

$\bar{x}$ heißt Fixpunkt von $\Phi$ in **R**.

Beispiel: $\Phi(x) = x^2$ , also $\qquad x_{k+1} := \Phi(x_k) = (x_k)^2$

oder

$$x_k = x_{k-1}^2 = x_{k-2}^4 = \cdots = x_0^{\left(2^k\right)}$$

Das Konvergenzverhalten hängt vom Startwert $x_0$ ab :

$$
\begin{array}{lcllc}
x_0 = 0 & \Rightarrow & x_k = 0, & k = 1,2,\ldots, & \bar{x}_1 = 0 \\
x_0 = \pm 1 & \Rightarrow & x_k = 1, & k = 1,2,\ldots, & \bar{x}_2 = 1 \\
0 < |x_0| < 1 & \Rightarrow & x_k = x_0^{2^k} \to 0 & k \to \infty, & \bar{x}_1 = 0 \\
|x_0| > 1 & \Rightarrow & x_k = x_0^{2^k} \to \infty & k \to \infty, & (\bar{x}_3 = \infty)
\end{array}
$$

$\Phi$ hat daher den Fixpunkte 0, bzw. ist divergent (könnte man als Fixpunkt $\infty$ bezeichnen).

Die Folgen sind jeweils monoton für $k > 0$ .

1 ist ebenfalls Fixpunkt, kann aber nur vorkommen, wenn man mit $\pm 1$ startet;
1 heißt daher <u>abstoßender</u> Fixpunkt.

# 6.1.2. Beispiel: Ausbreitung eines Grippevirus in einem Kindergarten

Zu Zeitpunkt $t_i$ bezeichnen wir mit $k_i$ die relative Anzahl erkrankter Kinder, also

**$k_i$ = # kranke Kinder / # Kinder.**

**$t_i$ ist diskrete Folge von Zeitpunkten.**

**Infektionsrate $\alpha > 1$, ( = Übertragungswahrscheinlichkeit)**

Bei jeder Kontaktaufnahme zweier Kinder kann daher eine Virusübertragung stattfinden; daher ist die Zahl neu Erkrankter zum nächsten Zeitpunkt direkt proportional zur Zahl der möglichen Begegnungen zwischen einem kranken und einem gesunden Kind.

Ein Kind, das zum Zeitpunkt $t_i$ krank ist, ist zum Zeitpunkt $t_{i+1}$ wieder gesund, kann sich aber wieder anstecken

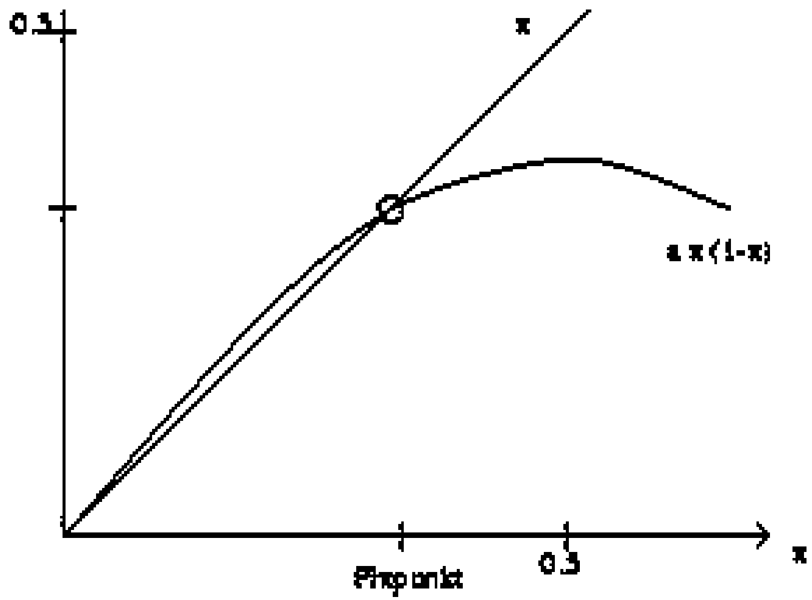
(Diese Annahme dient der Vereinfachung des Modells).

Ergibt Formel: $$k_{i+1} = \alpha\, k_i (1 - k_i)$$

$= \quad \alpha$* *#Kranke * #Gesunde*

**Dazugehörige Iterationsfunktion:** $$\Phi(x) = \alpha\; x(1 - x)$$

beschreibt eine konkave Parabel, die logistische Parabel.

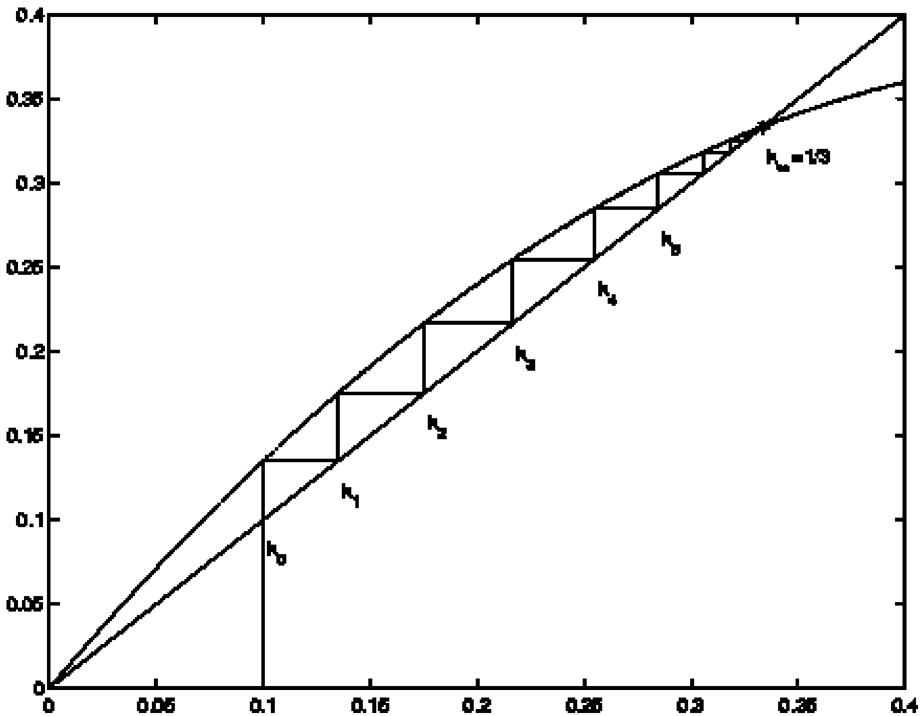



Relatives Maximum bei $x = 0.5$ mit Wert $\Phi(0.5) = 0.25\alpha$;
Nullstellen bei $x = 0$ und $x = 1$;

Fixpunkt als Schnittpunkt von $\Phi$ mit der Funktion  $g(x) \equiv x$:

$$\bar{x} = \Phi(\bar{x}) = \alpha\bar{x}(1-\bar{x}) \quad \Rightarrow \quad \bar{x} = \frac{\alpha - 1}{\alpha}$$

Für $1 < \alpha < 2$ existiert genau ein eindeutiger Fixpunkt dieser Iteration zwischen 0 und 0.5.




z.B. $x_0$=0.1 und $\alpha$=1.5

**Konvergiert monoton wachsend gegen 1/3**

Fixpunkt geometrisch:
Schnittpunkt zwischen Iterationsfunktion $\Phi(x)$ und
Gerade $g(x) \equiv x$ .

## 6.1.3. Banach'scher Fixpunktsatz

Frage:

Wann konvergiert die so erzeugte Folge und wann nicht?

Welche Eigenschaften müssen $\Phi$ und $x_0$ haben,
damit Konvergenz gegen einen (ev. eindeutigen) Fixpunkt vorliegt?

***Banach'scher Fixpunktsatz*:**

**Sei I ein abgeschlossenes Intervall, Startwert $x_0 \in I$,**
**$\Phi$ eine Abbildung $\Phi: I \rightarrow I$, d.h. $\Phi(I) \subseteq I$ ,**
**$\Phi$ sei in I eine kontrahierende Abbildung, d.h. es gibt eine Konstante $0 < L < 1$ mit**

$$x, y \in I \Rightarrow |\Phi(x) - \Phi(y)| \leq L \cdot |x - y|.$$

**Dann konvergiert die Folge $x_{k+1} := \Phi(x_k)$**
**gegen den eindeutigen Fixpunkt $\bar{x} \in I$ ,**
**also $x_k \rightarrow \bar{x} = \Phi(\bar{x})$ für $k \rightarrow \infty$.**

**Beweis:** Offensichtlich gilt stets $x_k \in I$; daher folgt

$$|x_{k+1} - x_k| = |\Phi(x_k) - \Phi(x_{k-1})| \leq L|x_k - x_{k-1}| \leq$$
$$\leq L\left(L|x_{k-1} - x_{k-2}|\right) \leq \cdots \leq L^k |x_1 - x_0|.$$

Damit ergibt sich für den Abstand zweier Iterierter $x_k$ und $x_m$ für $m > k$:

$$\left|x_m - x_k\right| = \left|(x_m - x_{m-1}) + (x_{m-1} - x_{m-2}) + \cdots + (x_{k+1} - x_k)\right| \leq$$

$$\leq \left|x_m - x_{m-1}\right| + \left|x_{m-1} - x_{m-2}\right| + \cdots + \left|x_{k+1} - x_k\right| \leq$$

$$\leq \left(L^{m-1} + L^{m-2} + \cdots + L^k\right) \cdot \left|x_1 - x_0\right| \leq$$

$$\leq \sum_{j=k}^{\infty} L^j \cdot \left|x_1 - x_0\right| = \frac{L^k}{1-L} \cdot \left|x_1 - x_0\right|.$$

Daher wird der Abstand zwischen zwei Iterierten beliebig klein, wenn sie beide großen Index haben:

$$\left|x_m - x_k\right| \leq \varepsilon \qquad \text{für} \qquad m,k \geq N(\varepsilon)$$

Die Zahlen $x_k$ bilden daher eine Cauchy-Folge!

Cauchy-Folgen sind konvergent in I, da I abgeschlossen ist!

(dies ist genau die mathematische Definition von Abgeschlossenheit).

Daher existiert eine Zahl $\bar{x} \in I$ mit $x_k \to \bar{x}$ für $k \to \infty$.

$\bar{x}$ ist der gesuchte Fixpunkt in I, denn

$$0 \le |\bar{x} - \Phi(\bar{x})| \le |\bar{x} - x_k| + |x_k - \Phi(\bar{x})| \le$$
$$\le |\bar{x} - x_k| + |\Phi(x_{k-1}) - \Phi(\bar{x})| \le$$
$$\le |\bar{x} - x_k| + L|x_{k-1} - \bar{x}| \to 0 \qquad \textit{für} \quad k \to \infty$$

Daher muss gelten $\bar{x} - \Phi(\bar{x}) = 0.$

Dieser Fixpunkt in I ist eindeutig, denn

$$\bar{x} = \Phi(\bar{x}) \in I \qquad und \quad \hat{x} = \Phi(\hat{x}) \in I \qquad mit \quad \bar{x} \ne \hat{x} \quad \Rightarrow$$
$$|\bar{x} - \hat{x}| = |\Phi(\bar{x}) - \Phi(\hat{x})| \le L \cdot |\bar{x} - \hat{x}| < |\bar{x} - \hat{x}| \qquad \textit{falsch}\,!$$

Widerspruch, daher Annahme $\bar{x} \ne \hat{x}$ falsch, also $\bar{x} = \hat{x}$

Außerdem gilt: $x_k$ konvergiert *linear* gegen $\bar{x}$ , denn

$$\underline{\left|x_{k+1}-\bar{x}\right|} = \left|\Phi(x_k)-\Phi(\bar{x})\right| \le L\underline{\left|x_k-\bar{x}\right|} \le \cdots$$

$$\cdots \le L^{k+1}\left|x_0-\bar{x}\right| \to 0, \quad L<1 \qquad \#$$

Um den Satz anwenden zu können benötigt man also,
dass $\Phi$ ein Intervall in sich abbildet, und zwar so,
dass die Funktionswerte dabei näher zusammenrücken.

L < 1 heißt Lipschitz-Konstante.

Ist $\Phi$ diff'bar, so lassen sich diese Bedingungen mit Hilfe des Mittelwertsatzes vereinfachen:

Für x,y$\in$I ist dann nämlich

$$\Phi(y) = \Phi(x) + \Phi'(z) \cdot (y - x)$$

mit einer Zahl z zwischen x und y.

Daher gilt: $$\left|\Phi(y) - \Phi(x)\right| \le \max_{z\in I} \left|\Phi'(z)\right| \cdot \left|y - x\right|$$

Ist nun $|\Phi'(z)| < 1$ in I, so kann man

$$L := \max_{z\in I} \left|\Phi'(z)\right|$$ setzen.

Wir betrachten den Mittelwertsatz jetzt speziell in der Nähe eines Fixpunktes x . Dann gilt:

**Sei $|\Phi'(\bar{x})| < 1$; dann kann man eine Umgebung U von $\bar{x}$ angeben, in der $\Phi$ kontrahierend ist und $\Phi(U) \subseteq U$ gilt (es liegt dann also lokale Konvergenz vor).**

**Sei $|\Phi'(\overline{x})| < 1$; dann kann man eine Umgebung U von $\overline{x}$ angeben, in der $\Phi$ kontrahierend ist und $\Phi(U) \subseteq U$ gilt (es liegt dann also lokale Konvergenz vor).**

**Beweis**: Setze U:= [ $\overline{x}$-h , $\overline{x}$+h ] und wähle dabei h > 0 so klein, dass immer noch

$$L := \max_{z \in U} |\Phi'(z)| < 1$$

gilt ($\Phi$' ist ja stetig!).

Für ein x$\in$U folgt dann $|\Phi(x) - \overline{x}| = |\Phi(x) - \Phi(\overline{x})| \le L \cdot |x - \overline{x}| < h$

und daher ist auch $\Phi$(x)$\in$U.

Also insgesamt: $\Phi$(U) $\subseteq$ U und außerdem ist $\Phi$ kontrahierend in U.
Daher ist der Banach'sche Fixpunktsatz anwendbar.

**Einen Fixpunkt $\bar{x}$ mit $|\Phi'(\bar{x})| < 1$ nennt man** **‚anziehenden Fixpunkt'.**

Im Beispiel $x^2$ ist 0 anziehender Fixpunkt, da $\Phi'(0)=2*0 = 0<1$

Daher gilt für $L = 0.5$ und $U = [-0.25 , 0.25]$ , dass $\Phi(x) = x^2$ in U eine kontrahierende Selbstabbildung von U ist → mit dem Fixpunktsatz von Banach: Konvergenz in U gegen Fixpunkt 0!

**Andererseits heißt ein Fixpunkt $\bar{x}$ mit $|\Phi'(\bar{x})| > 1$** **abstoßender Fixpunkt,**

da keine kontrahierende Umgebung für $\Phi$ existiert.

Im Beispiel $x^2$ ist 1 abstoßender Fixpunkt,

da $\Phi'(1) = 2*1 = 2 > 1$.

**Beispiel Grippevirus:** $\Phi(x) = \alpha x(1-x)$

mit Fixpunkt $\bar{x} = (\alpha - 1)/\alpha$

Dann gilt $\Phi'(\bar{x}) = \alpha(1-2\bar{x}) = \alpha\left(1-2\frac{\alpha-1}{\alpha}\right) = 2-\alpha$

$\bar{x} = (1-\alpha)/\alpha$ ist anziehender Fixpunkt für $1 < \alpha < 3$.

Für α>=3 ergibt sich abstoßender Fixpunkt!
Keine Konvergenz!

Für α<= 1 kein Fixpunkt im Intervall [0,1].

Wegen $x_{k+1} = \Phi(x_k) = \bar{x} + \Phi'(z)(x_k - \bar{x})$

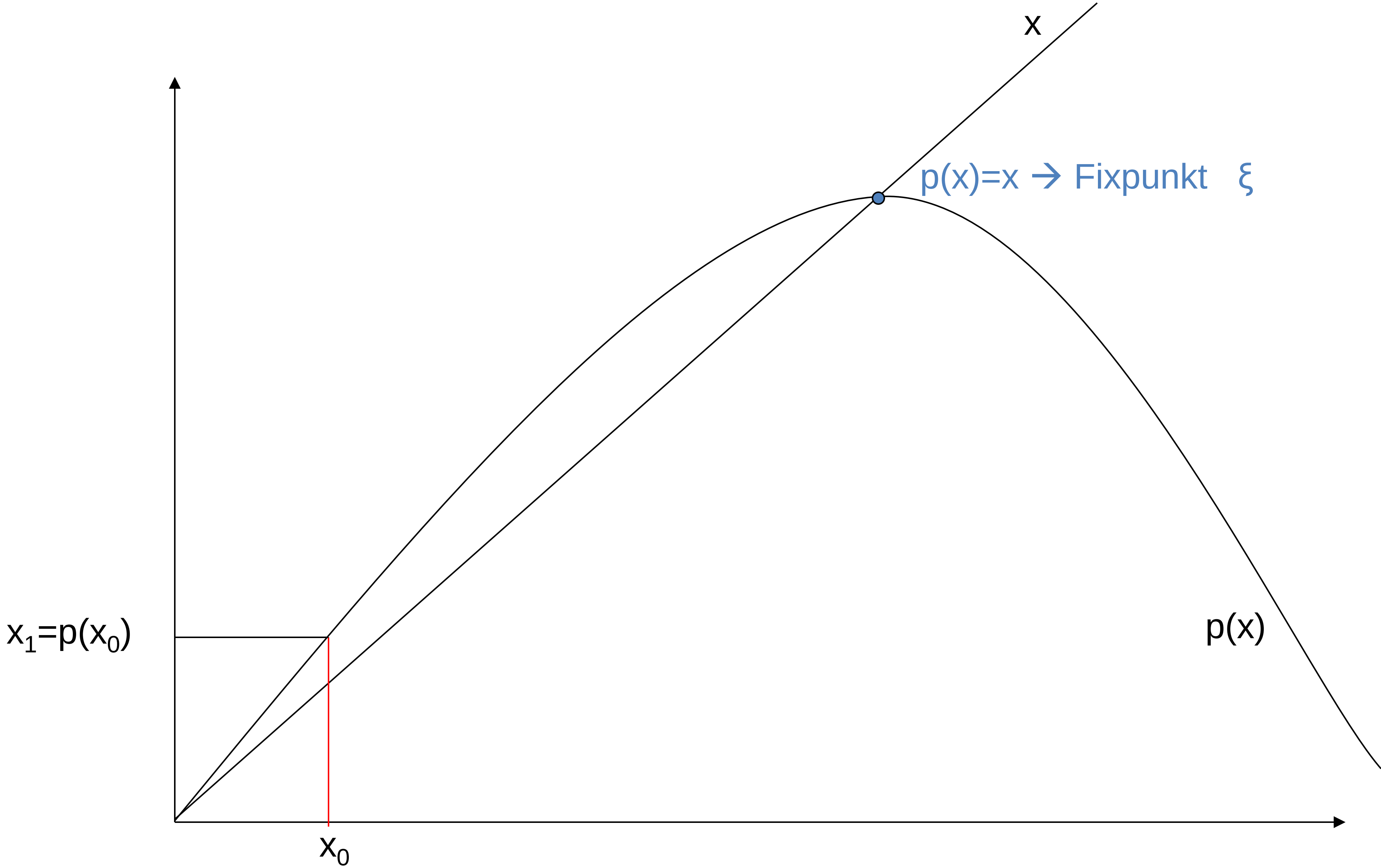
gilt außerdem $x_{k+1} - \bar{x} = \Phi'(z)(x_k - \bar{x})$

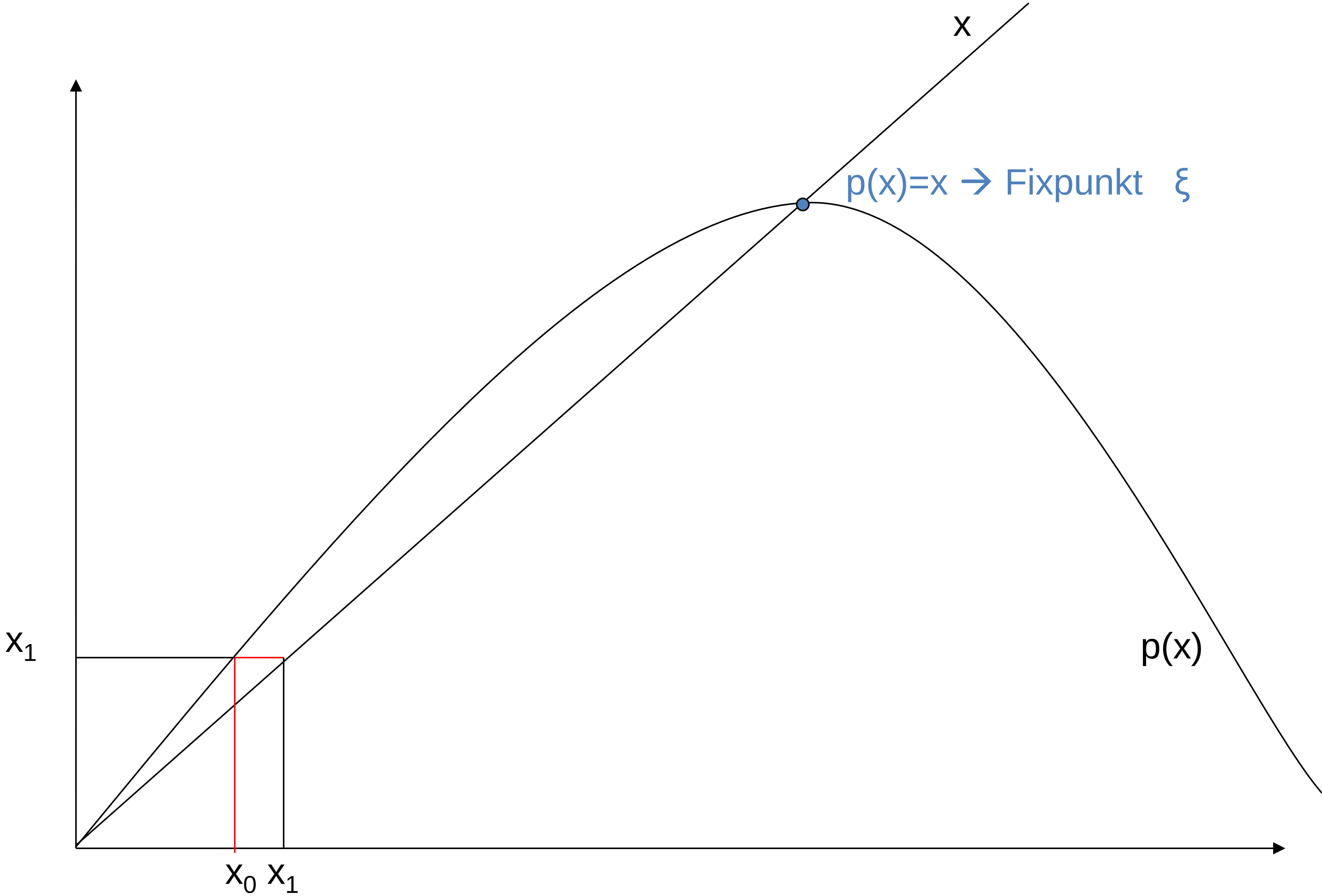
Daher ist für $1 < \alpha < 2$ $\Phi'(\bar{x}) > 0$, und die Folge $x_k$ ist lokal monoton wachsend oder fallend, je nach Startwert rechts oder links vom Fixpunkt.

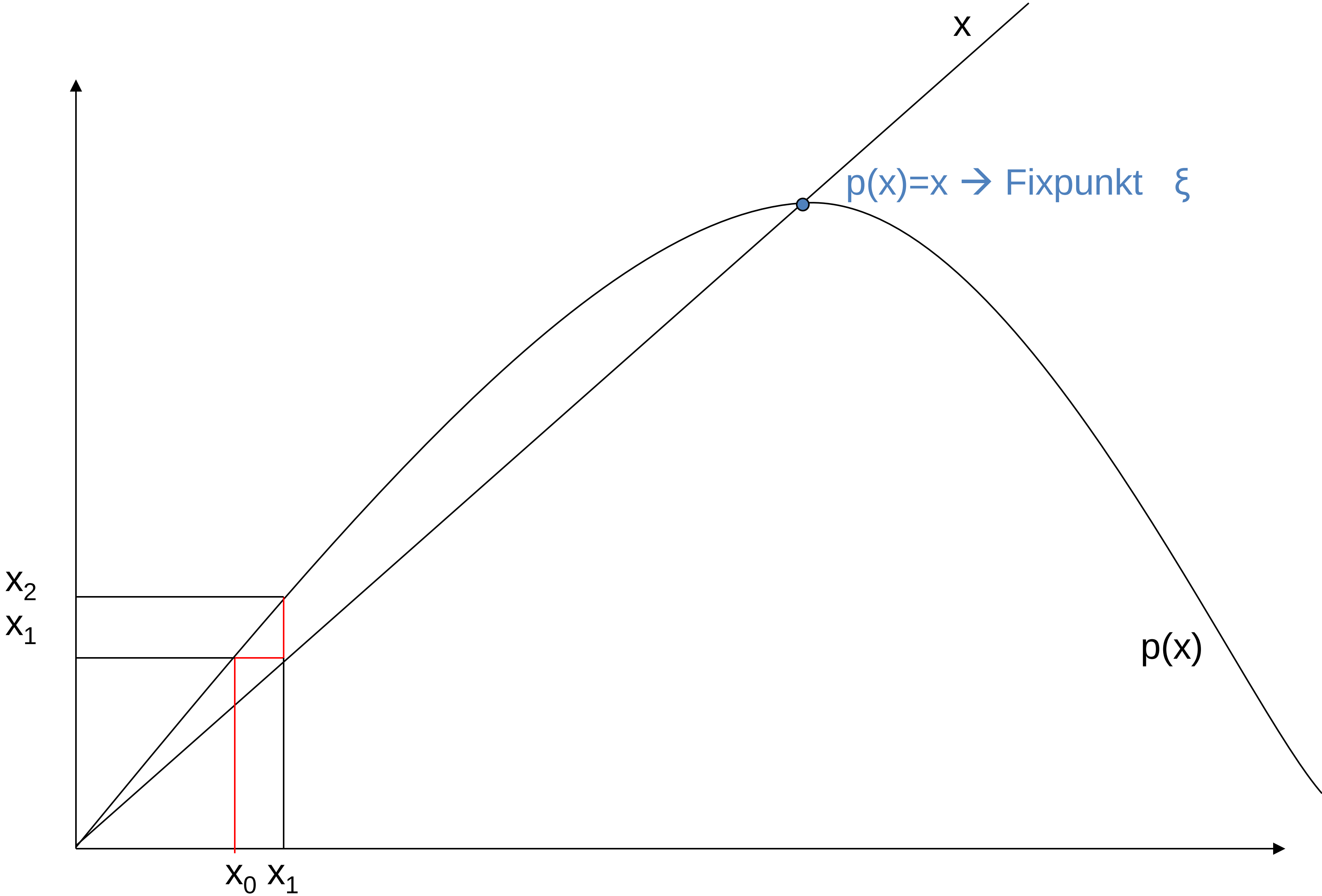
$$x_{k+1} - \bar{x} = \Phi'(z)(x_k - \bar{x})$$

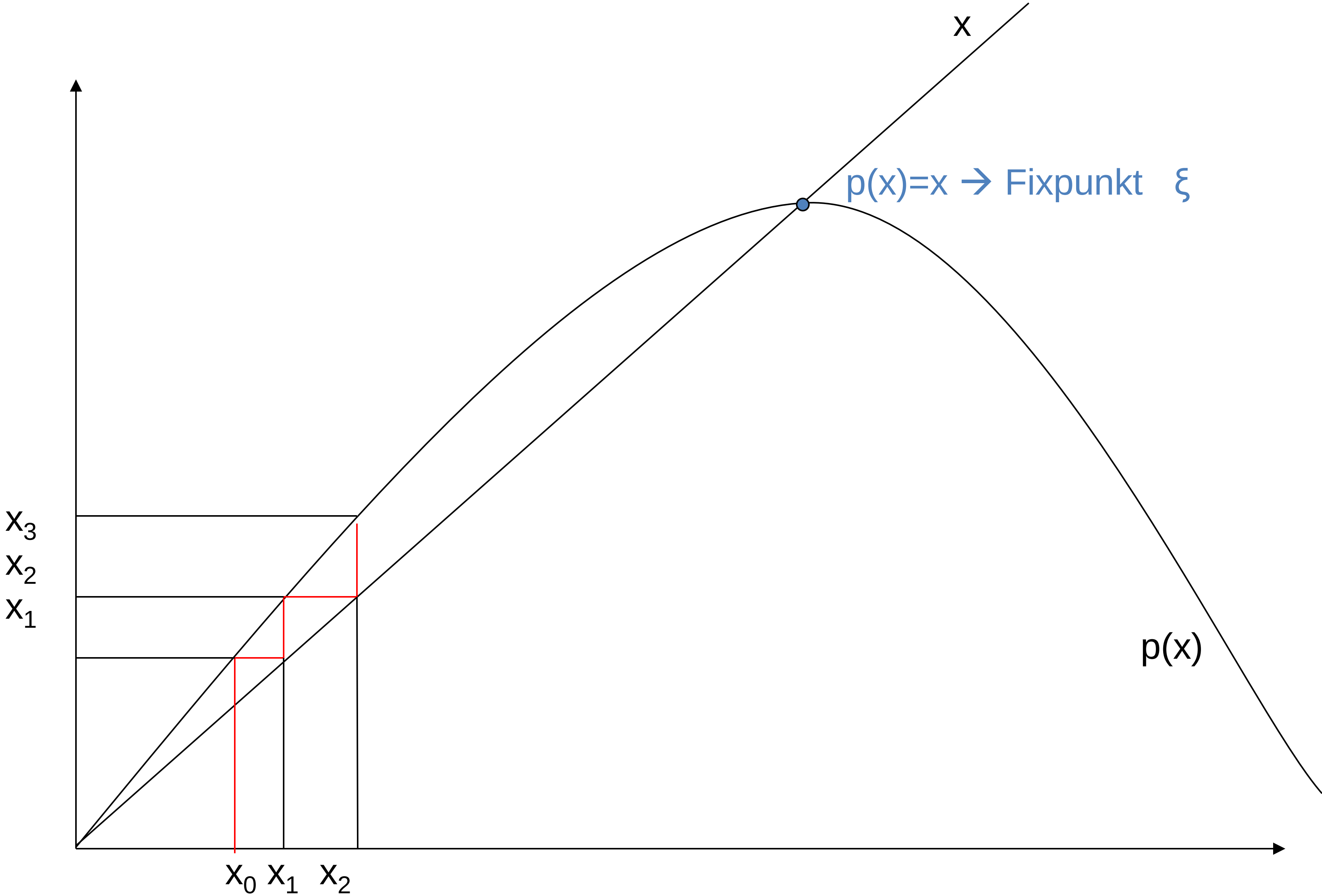
(die $x_k$ liegen stets auf derselben Seite, rechts oder links vom Fixpunkt)

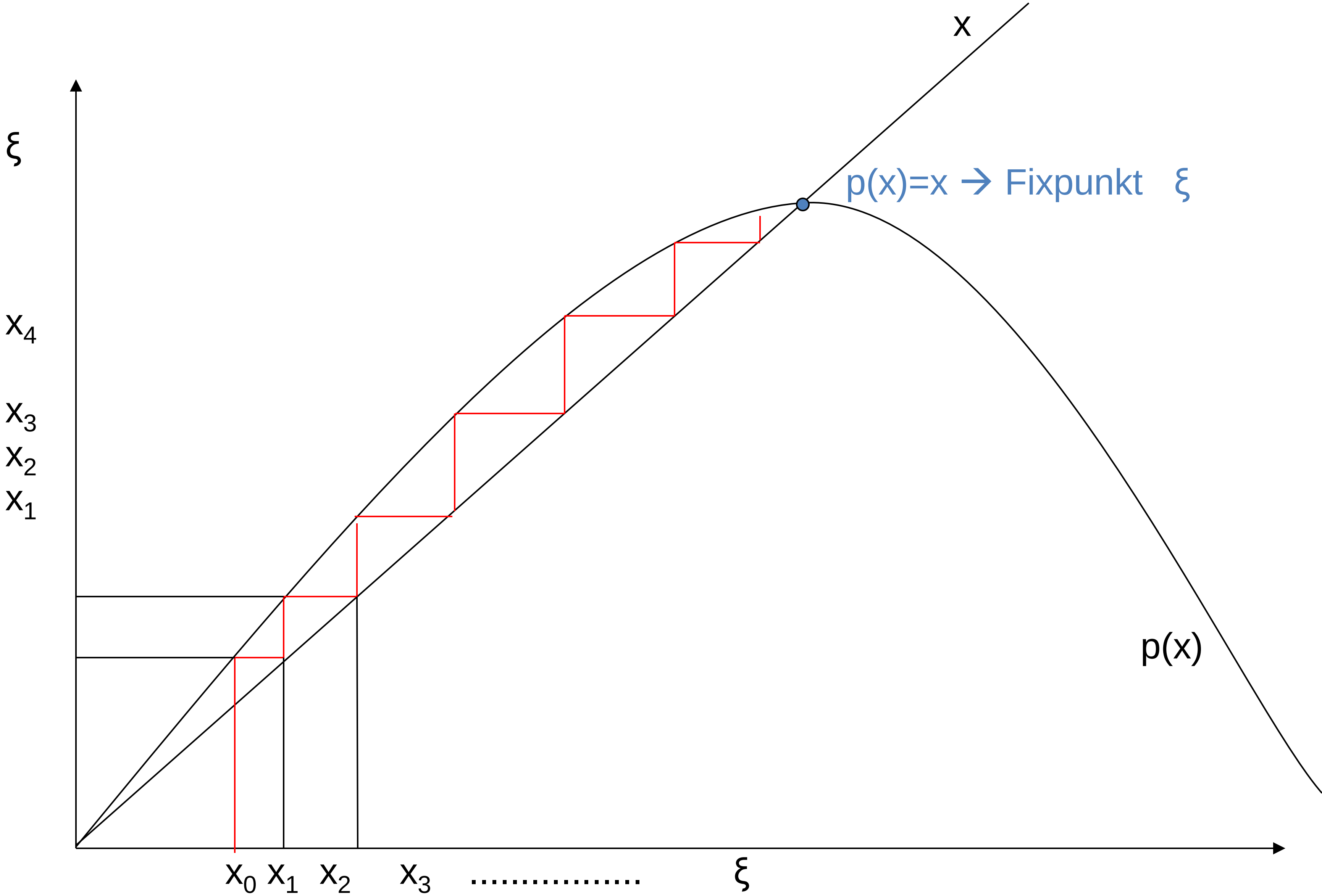
Dagegen konvergiert für $2 < \alpha < 3$ die Folge alternierend, da $\Phi'(\bar{x}) < 0$ ist.


x
p(x)=x → Fixpunkt ξ
x1=p(x0)
p(x)
x0

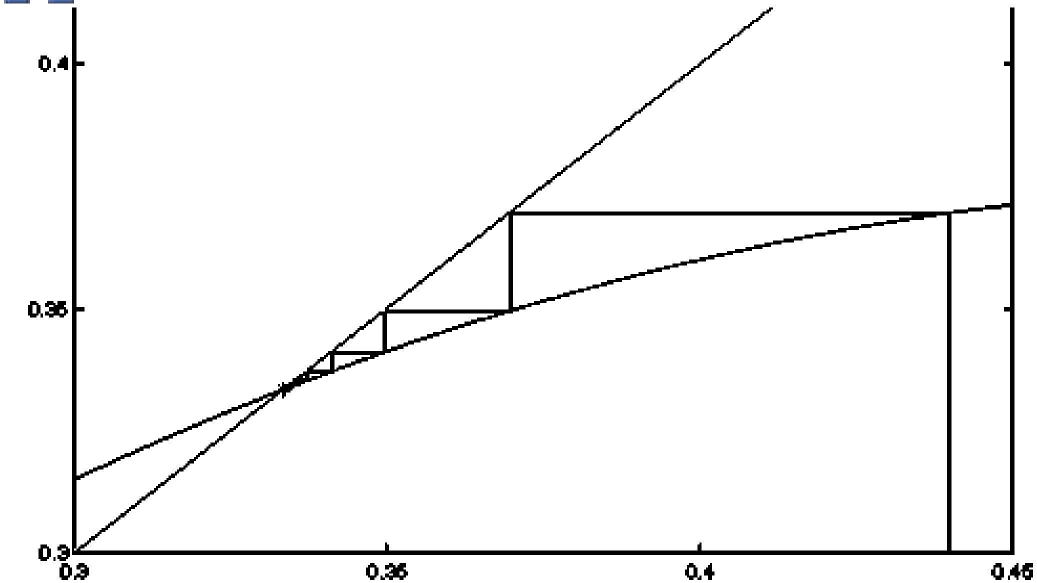

x
p(x)=x → Fixpunkt ξ
$x_1$
p(x)
$x_0$ $x_1$


x
p(x)=x → Fixpunkt ξ
$x_2$
$x_1$
p(x)
$x_0$ $x_1$


x
p(x)=x → Fixpunkt ξ
x3
x2
x1
p(x)
x0 x1 x2

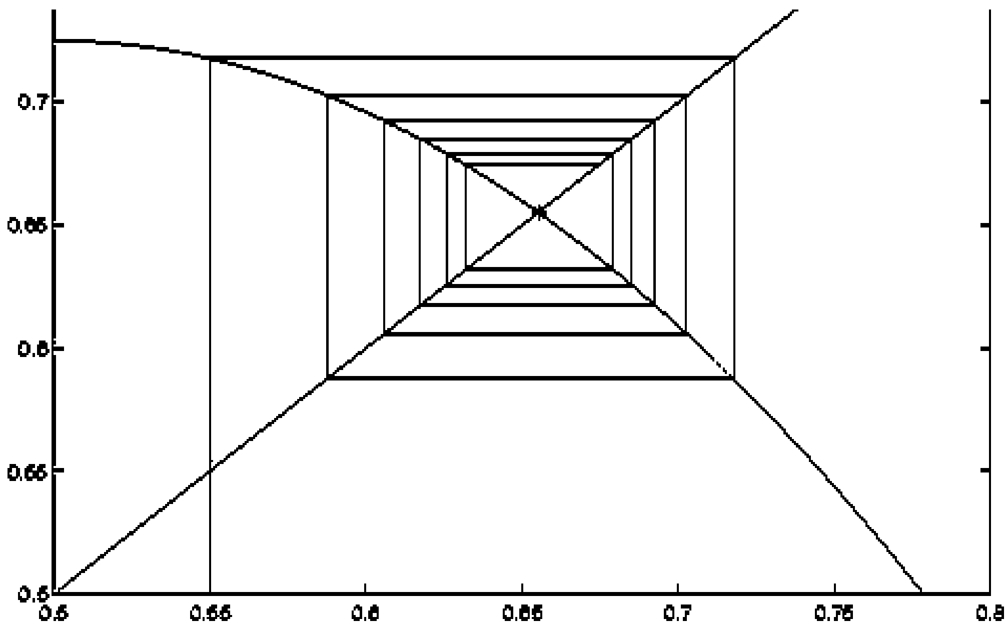


x
ξ
p(x)=x → Fixpunkt ξ
x4
x3
x2
x1
p(x)
x0 x1 x2 x3 ................
ξ




$\alpha$= 1.5  und Startwert 0.44 →

monoton fallende Konvergenz




$\alpha$ = 2.9 und Startwert 0.55 →

alternierende Konvergenz

# 6.2 Das Newtonverfahren zur Nullstellenbestimmung

**Gesucht sind Nullstellen einer nichtlinearen (stetig diff'baren) Funktion f:R→R, also $\bar{x} \in R$ mit $f(\bar{x}) = 0$ !**

Zurückführung des <u>Nullstellenproblems</u> auf das inzwischen bekannnte <u>Fixpunktproblem</u>.

Also gesucht: $x_k \to \bar{x}$ für $k \to \infty$

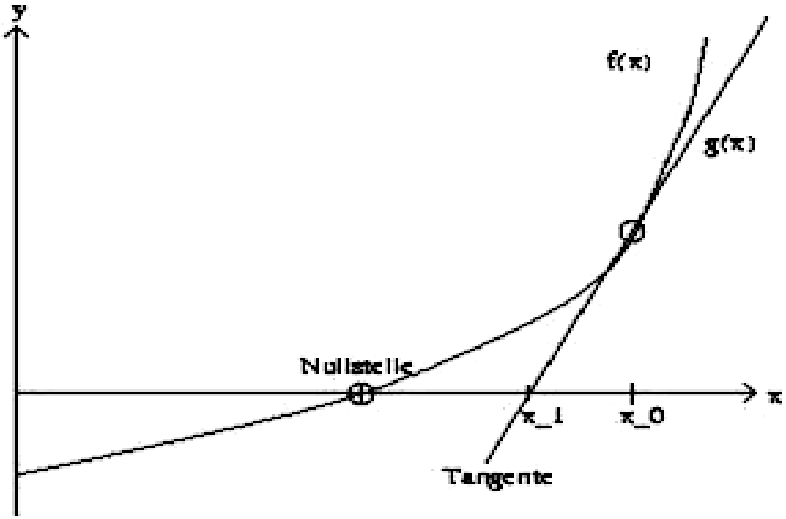
Betrachte dazu die Taylorentwicklung in letzter Iterierten $x_k$ :

$$0 = f(\bar{x}) = f(x_k) + f'(x_k)\cdot(\underbrace{\bar{x}}_{x_{k+1}} - x_k) + \underbrace{O\left((\bar{x}-x_k)^2\right)}_{\text{wird ignoriert}}.$$

Auflösen nach $\bar{x} \to x_{k+1}$ liefert die

**Newton-Iteration:** $$x_{k+1} := x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \qquad \textit{falls} \qquad f'(x_k) \neq 0$$

# 6.2.1. Geometrische Interpretation des Newtonverfahrens




Ersetze f(x) lokal an der Stelle $x_k$ durch bestmögliche Gerade = Tangente, entspricht linearem Anteil der Taylorreihe.

Die Nullstelle dieser Geraden

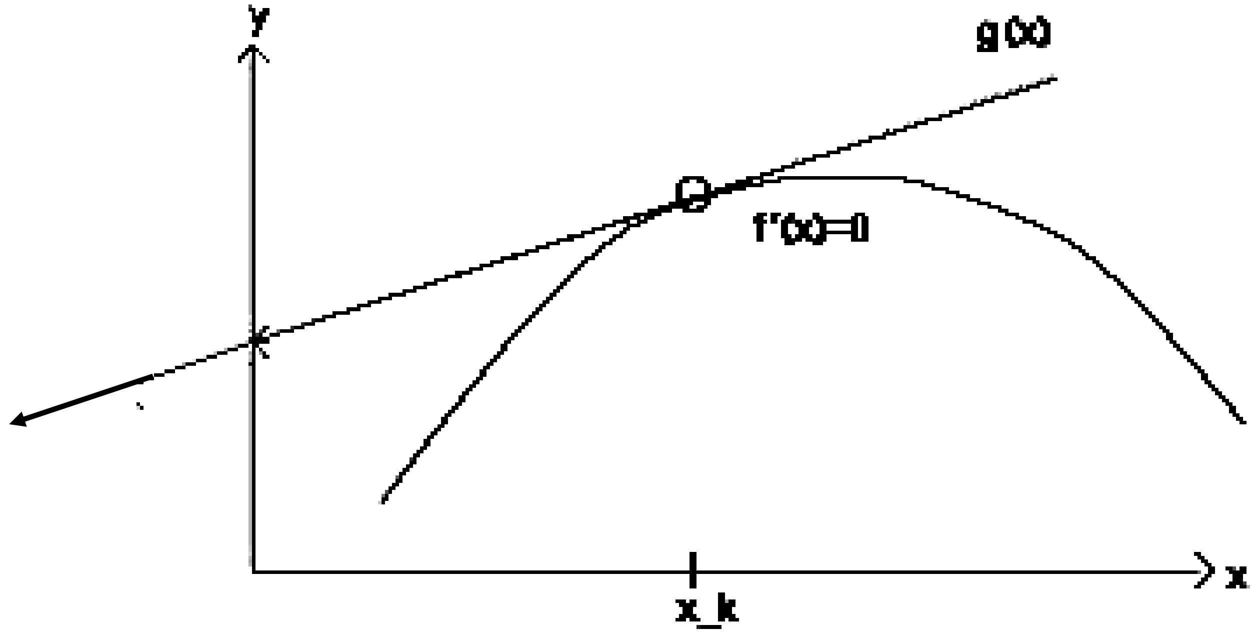
$$g(x) = f(x_k) + f'(x_k) \cdot (x - x_k)$$

ist genau $x_{k+1} = x_k - f(x_k)/f'(x_k)$ , und wird als nächste Näherung für die ‚echte' Nullstelle von f gewählt.

## Probleme des Newtonverfahrens, wenn $f'(x_k) \cong 0$ :

Division durch Null!

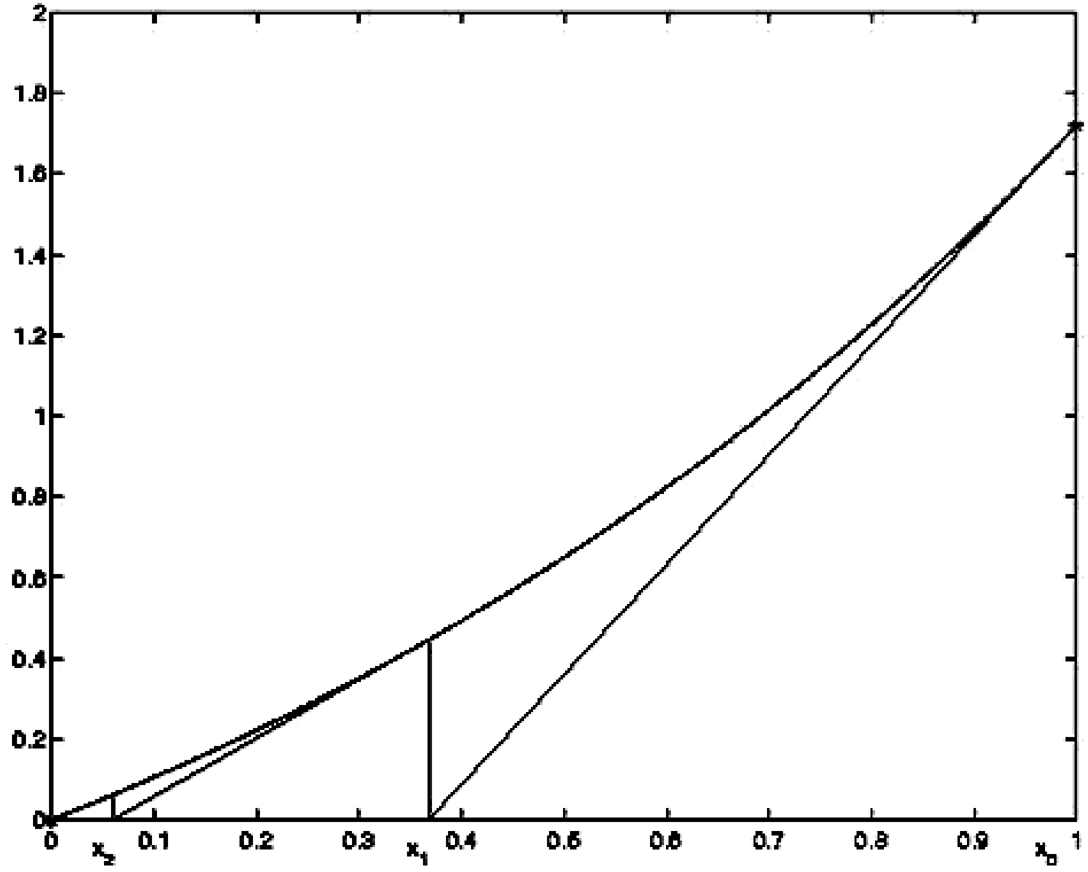
**Geometrisch:**




Ist $x_k$ nahe einem Punkt mit waagrechter Tangente, so ist die Gerade g(x) fast parallel zur x-Achse, und die nächste Iterierte liegt weit entfernt von $x_k$ →

Kein konvergentes Verhalten!

# Beispiel für Iterationen beim Newtonverfahren

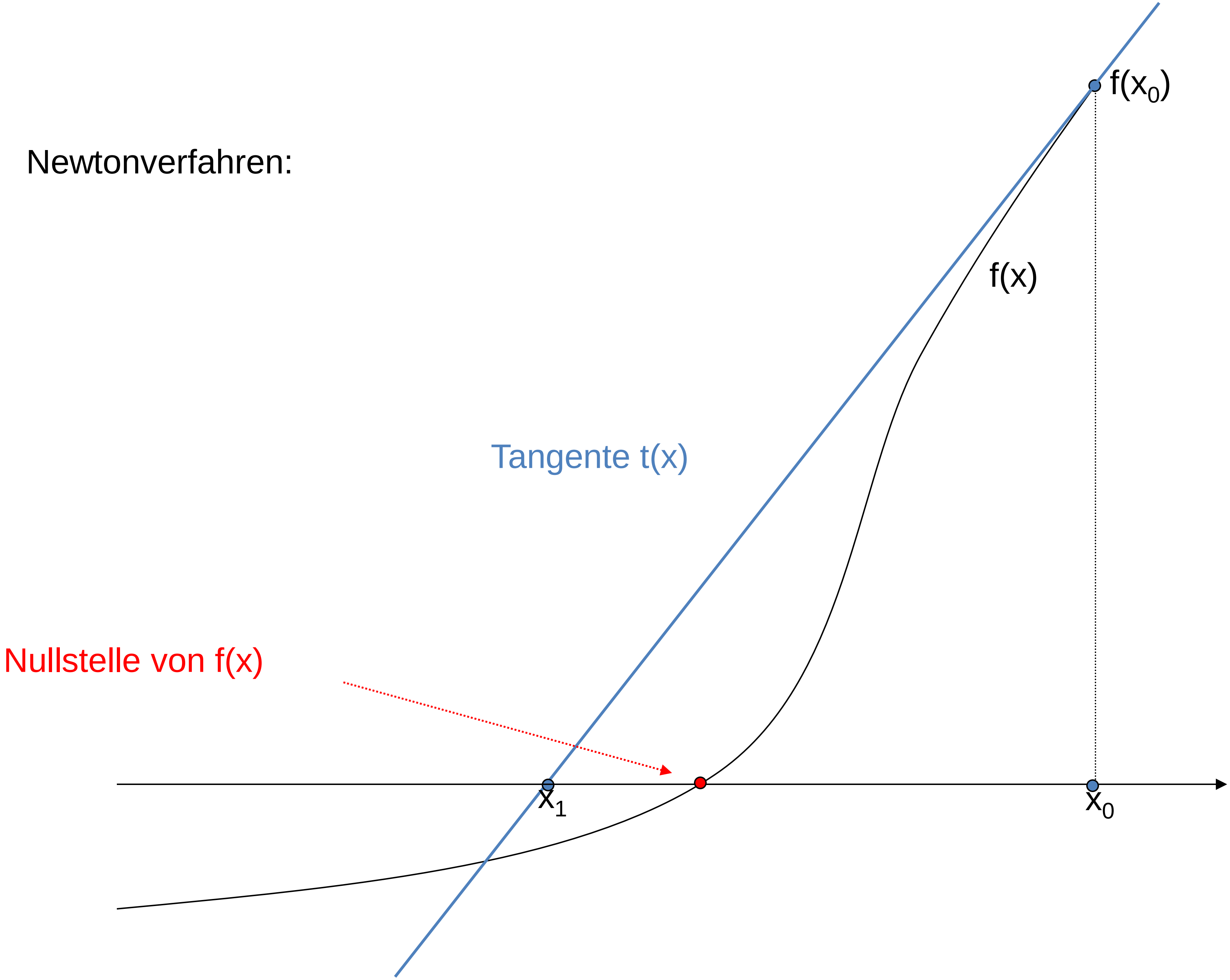



**Funktion: $f(x) = \exp(x) - 1$**

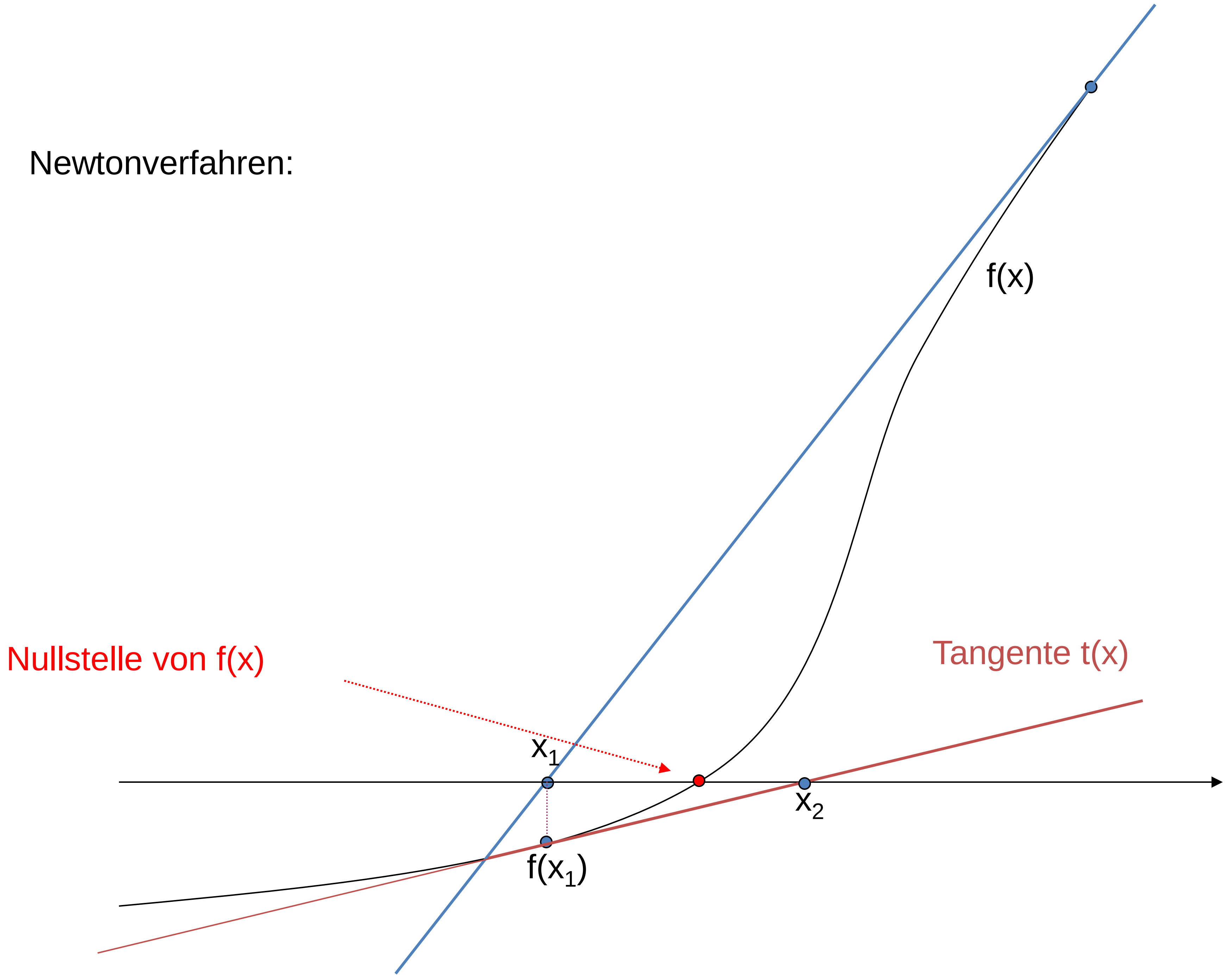
**Nullstelle: $\overline{x} = 0$**

**Startwert: $x_0 = 1$**

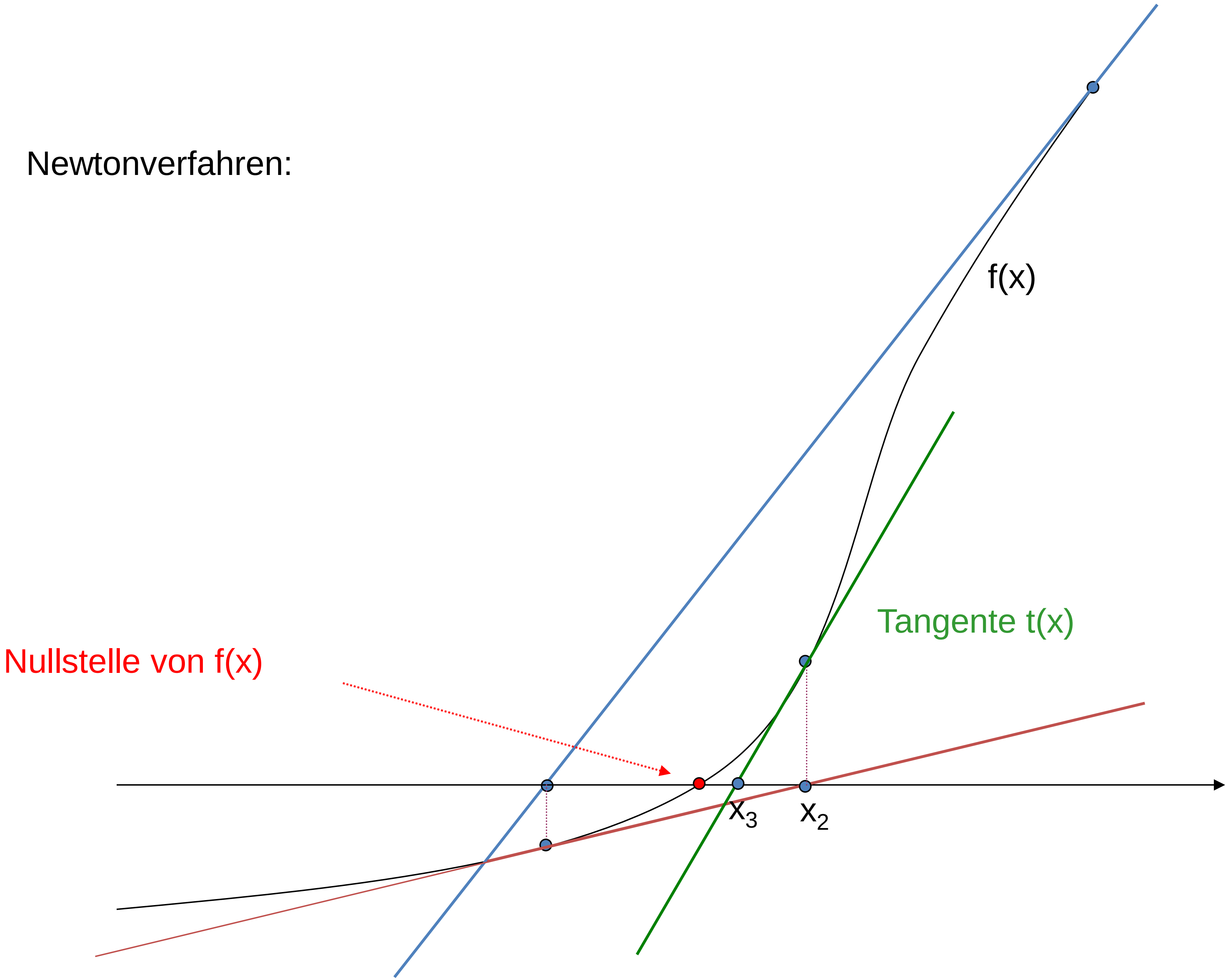
# Newtonverfahren:



Newtonverfahren:



Newtonverfahren:



# Newton-Verfahren als Fixpunktiteration:

Dazugehörige Iterationsfunktion ist

$$\Phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Gesuchte Nullstelle $\bar{x}$ von f(x) ist gleichzeitig Fixpunkt von $\Phi$(x) (falls $f'(\bar{x}) \neq 0$ ):

$$x = \Phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \Leftrightarrow \frac{f(x)}{f'(x)} = 0$$

Damit sind die Resultate über Iterationsfunktionen und deren Fixpunkte anwendbar (Fixpunktsatz, L<1, usw.):

$$\Phi'(x) = 1 - \frac{f'^2(x) - f(x)f''(x)}{f'^2(x)} = \frac{f(x)f''(x)}{f'^2(x)}$$

und (falls $\overline{x}$ einfache Nullstelle von f) gilt:

$$|\Phi'(\overline{x})| = 0 < 1 .$$

Daher ist die gesuchte Nullstelle $\overline{x}$ von f dann ein anziehender Fixpunkt von $\Phi$ !

**6.2.2. Satz:**
**Das Newtonverfahren für eine stetig diff'bare Funktion f mit einfacher Nullstelle $\overline{x}$ ist lokal quadratisch konvergent.**

**Beweis:**

Lokal konvergent nach Banach'schem Fixpunktsatz!

Startwert nahe genug bei Fixpunkt → lineare Konvergenz im Intervall **U = [ $\overline{x}$-h , $\overline{x}$+h ]**

Zum Beweis der quadratische Konvergenz:

$$0 = f(\bar{x}) = f(x_k) + f'(x_k)(\bar{x} - x_k) + \frac{1}{2} f''(z)(\bar{x} - x_k)^2$$

mit Zwischenstelle z (Taylorentwicklung).

Umformung:

$$\bar{x} - \boxed{x_k + \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{f''(z)}{f'(x_k)} (\bar{x} - x_k)^2$$

$$\left| \bar{x} - \boxed{x_{k+1}} \right| = \left| \frac{f''(z)}{2 f'(x_k)} \right| \cdot \left| \bar{x} - x_k \right|^2 = C(x_k, \bar{x}) \cdot \left| \bar{x} - x_k \right|^2$$

Ist $f'(\bar{x}) \neq 0$, so kann C lokal durch eine Konstante L nach oben beschränkt werden.

Daher folgt: $$\left| \bar{x} - x_{k+1} \right| \leq L \cdot \left| \bar{x} - x_k \right|^2$$

Der Abstand von der gesuchten Lösung verringert sich in jedem Schritt quadratisch (wenn man nahe genug an der Lösung ist, so dass $|\bar{x}-x_k| \ll 1$ ).

z.B. Abstand von der Lösung in jedem Schritt $|\bar{x}-x_k|$ z.B.

wie $10^{-1}$ , $10^{-2}$ , $10^{-4}$ , $10^{-8}$ , $10^{-16}$ ....

Also schnelle Konvergenz!

**Voraussetzungen für quadratische Konvergenz:**

**- $\bar{x}$ einfache Nullstelle, d.h.**
**$f(\bar{x}) = 0$, aber $f'(\bar{x}) \neq 0$, oder**
**$f(x)=(\bar{x}-x)g(x)$ mit $g(\bar{x})\neq 0$**

**- Startwert $x_0$ nahe bei $\bar{x}$**

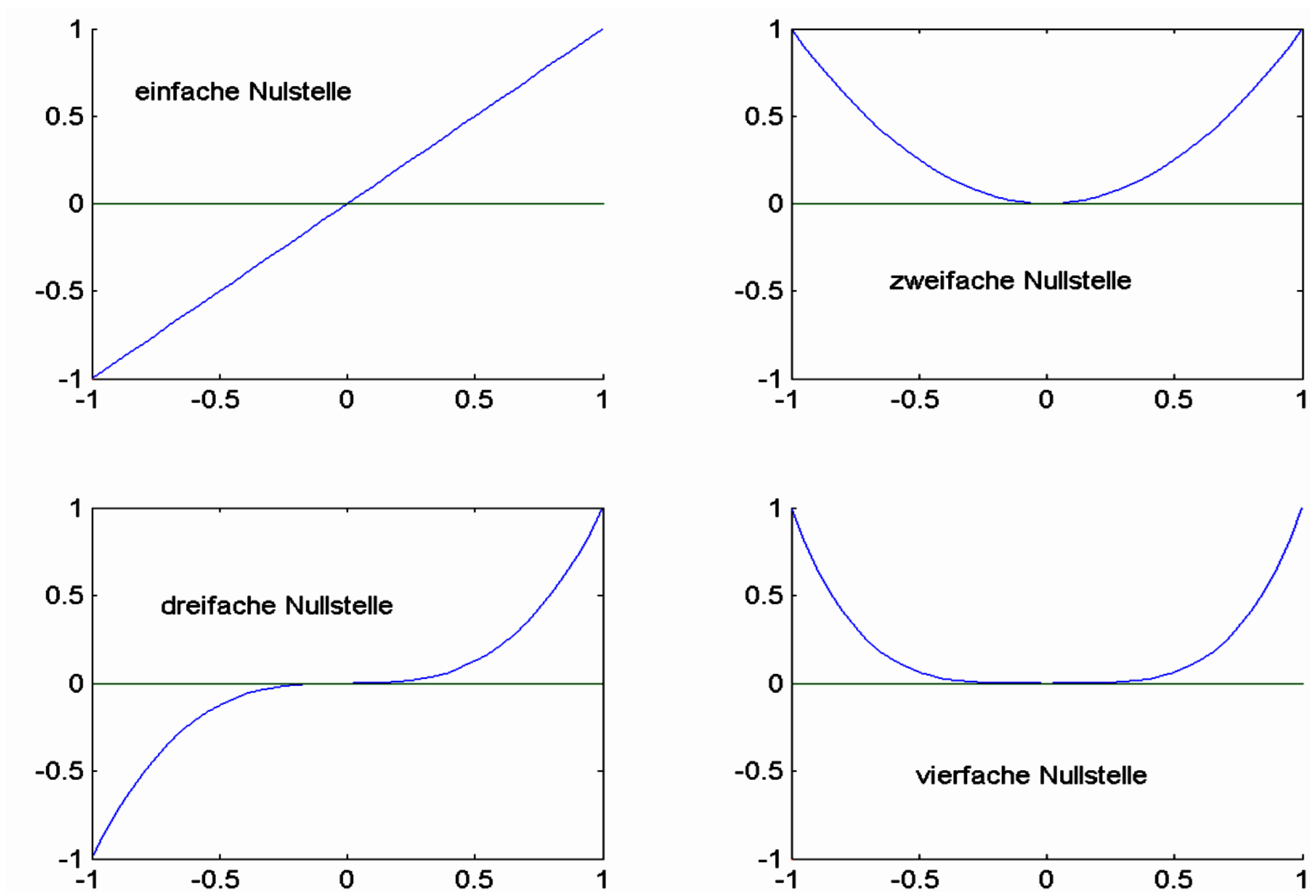
## a heißt m-fache Nullstelle, wenn:

$$f^{(j)}(a) = 0 \quad \text{für } j=0,\dots,m-1 \text{ , aber} \quad f^{(m)}(a) \neq 0$$

oder

$$f(x) = (x-a)^m \cdot g(x) \quad \text{mit} \quad g(a) \neq 0$$

**Graphisch:**



# 6.2.3. Definition der Konvergenzordnung:

**Linear konvergent:** $\left|\bar{x} - x_{k+1}\right| \le L \cdot \left|\bar{x} - x_k\right| \quad und \quad L < 1$

**Konvergent von Ordnung p > 1 :** $\left|\bar{x} - x_{k+1}\right| \le L \cdot \left|\bar{x} - x_k\right|^p$

**Falls f an der Stelle $\bar{x}$ eine m-fache Nullstelle hat mit m > 1 , so ist das Newtonverfahren nur noch lokal linear konvergent:**

Ist nämlich $\bar{x}$ eine m-fache Nullstelle, so folgt

$$f(x) = (x - \bar{x})^m g(x) \qquad mit \quad g(\bar{x}) \neq 0$$

und die Iterationsfunktion lautet

$$\Phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{(x-\bar{x})^m g(x)}{m(x-\bar{x})^{m-1} g(x) + (x-\bar{x})^m g'(x)}$$

Die Ableitung der Iterationsfunktion ist daher

$$\Phi'(\bar{x}) = 1 - \frac{g(\bar{x})}{m \cdot g(\bar{x})} = 1 - \frac{1}{m} < 1$$

Nach dem Banach'schen Fixpunksatz folgt:

$\Phi$ ist lokal kontrahierend und es liegt *lineare* Konvergenz vor!

Variationen bei m-facher Nullstelle, um quadratische Konvergenz zu erreichen:

Wende Newtonverfahren an auf

(m-1) – te Ableitung von f(x)

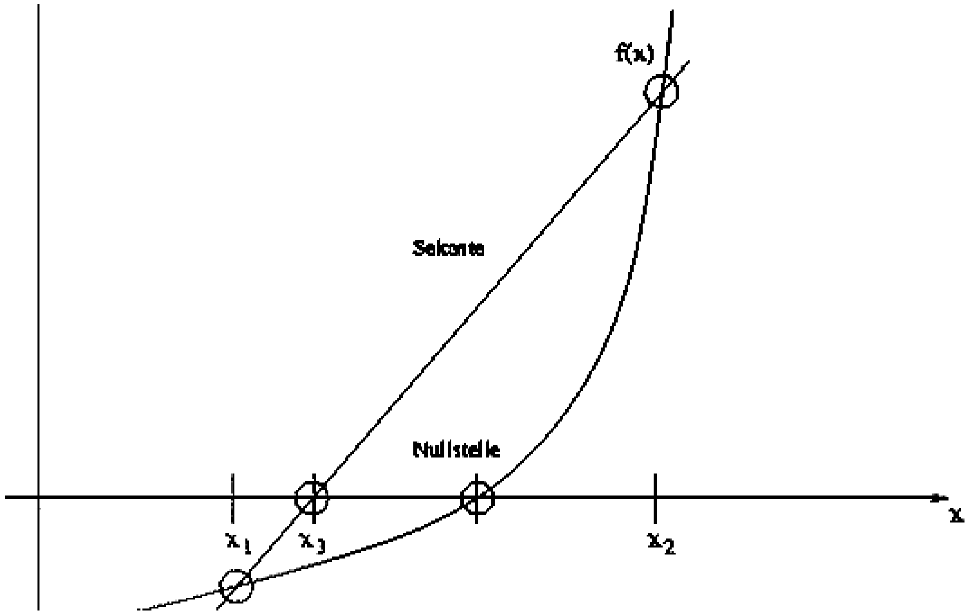
f(x)/f '(x)

m-te Wurzel von |f(x)|

oder modifiziere Newtonformel (bei bekanntem m) zu

$$\Phi(x) = x - m \cdot \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

**Sekantenverfahren:**
**Ersetze Tangente in letztem Punkt durch die Sekante, die die beiden letzten Punkte verbindet; verwende deren Nullstelle!**




$$\approx f'(x_k)$$

$$g(x) = f(x_{k-1}) + \boxed{\frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}} \cdot (x - x_{k-1})$$

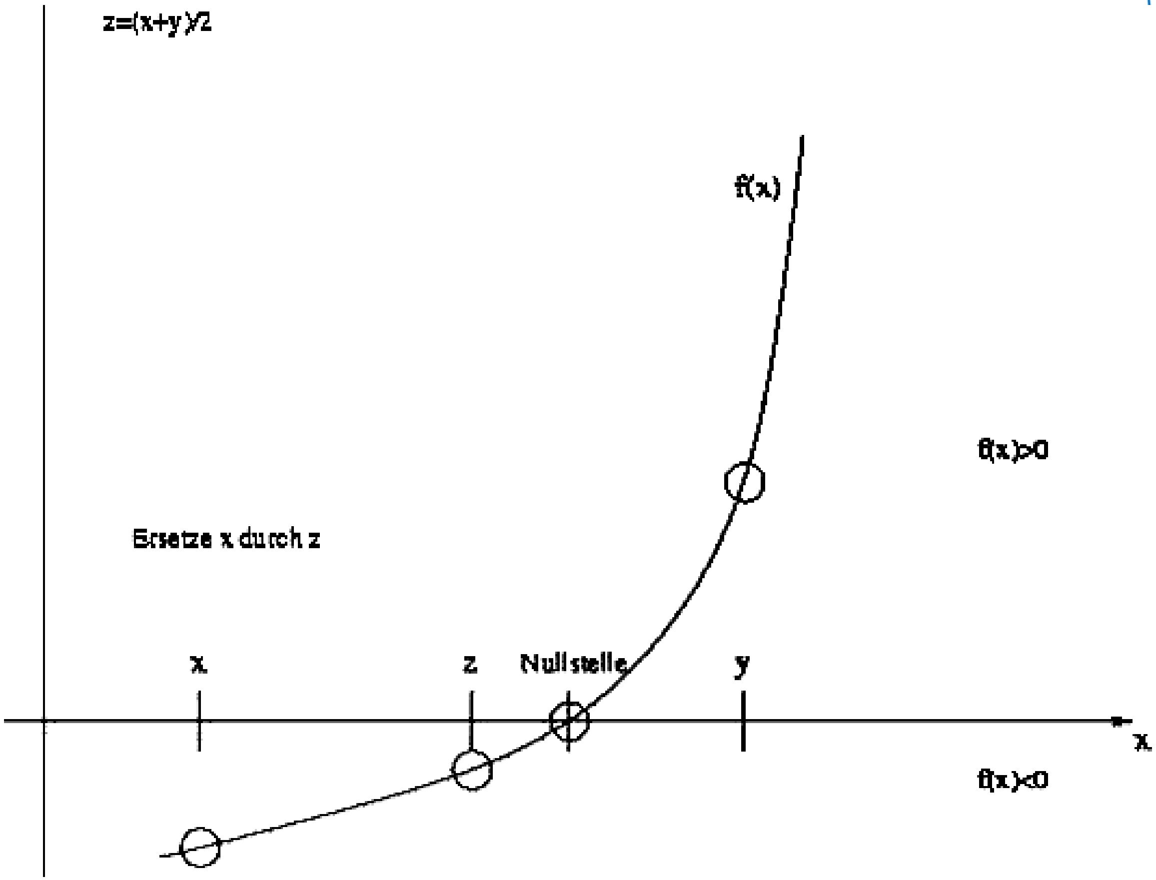
Nullstelle der Sekante als nächste Iterierte:

$$x_{k+1} = x_{k-1} - \frac{f(x_{k-1})(x_k - x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})} = \frac{x_{k-1} f(x_k) - x_k f(x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$$

Liefert lokale Konvergenz wie beim Newtonverfahren.
Vorteil: keine Ableitungen benötigt, jeweils nur die letzten beiden Funktionswerte! Billiger!
Aber Problem, falls Nenner gleich Null ist!

Konvergenzordnung p nur mit $1<p<2$, aber dafür pro Schritt nur eine neue Funktionsauswertung nötig
(bei Newton f und f ’ pro Schritt)

# Bisektionsverfahren:




Starte mit zwei Werten x und y, für die gilt, dass $f(x)*f(y) < 0$ ist, für die also f verschiedene Vorzeichen hat.
Daher liegt für stetiges f zwischen x und y garantiert eine Nullstelle!
Setze $z:=(x+y)/2$ den Wert genau in der Mitte zwischen x und y:

Berechne f(z).

Ist f(z) = 0: fertig

Ist f(x)*f(z) > 0 , so setze x:=z, y bleibt

Ist f(y)*f(z) > 0 , so setze y:=z, x bleibt

*Damit gilt wieder f(x)*f(y) < 0, aber der Abstand zwischen x und y hat sich halbiert.*

Daher liegt die gesuchte Nullstelle nach k Schritten garantiert in einem kleineren Intervall der Größe const/$2^k$ , und es gilt: (Bezeichnung: $x_k$, $y_k$ → $z_k$ usw.)

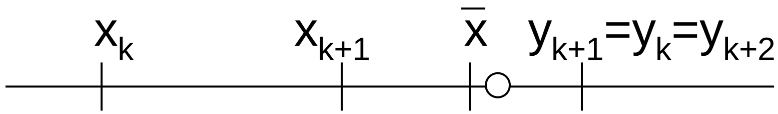
$$\underline{\left|\bar{x}-x_{k+1}\right|+\left|y_{k+1}-\bar{x}\right|}=\left|y_{k+1}-x_{k+1}\right|=$$

$$=0.5\cdot\left|y_k-x_k\right|=0.5\cdot\left(\underline{\left|\bar{x}-x_k\right|+\left|y_k-\bar{x}\right|}\right)$$

$$\le \max\{\,|\bar{x}-x_k|\,,\,|\bar{x}-y_k|\,\}$$

Daher schrumpft der „Abstand“ der Nullstelle
zu den beiden Intervallgrenzen linear in jedem Schritt
um den Faktor 0.5

$$\max\left\{\left|x_{k+2}-\bar{x}\right|,\left|y_{k+2}-\bar{x}\right|\right\} \le \left|x_{k+2}-y_{k+2}\right| \le \left|x_{k+1}-y_{k+1}\right|/2 \le \max\left\{\left|x_k-\bar{x}\right|,\left|y_k-\bar{x}\right|\right\}/2$$

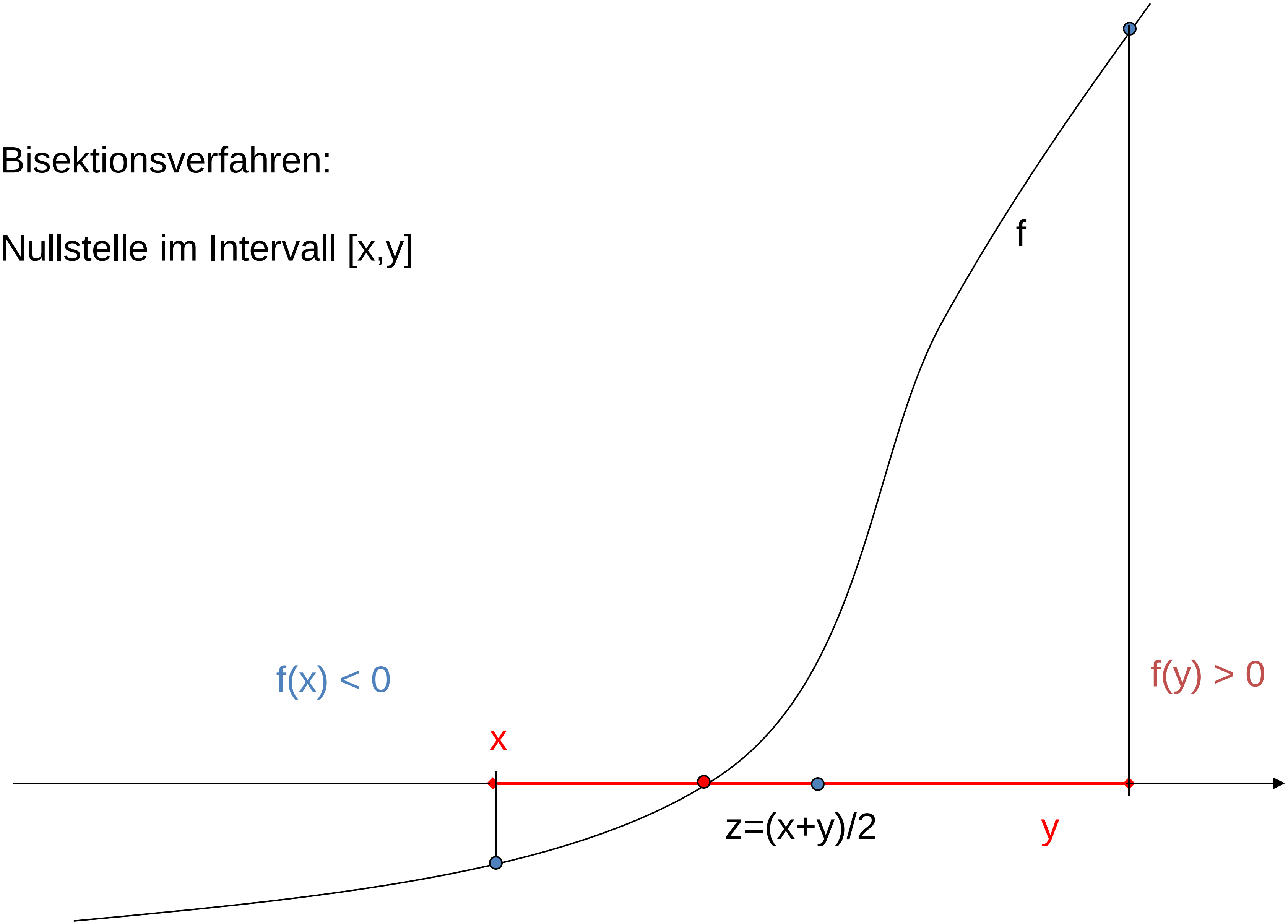



**Regula falsi** durch Verbindung von Bisektion und Sekantenverf.:

**Iteriere wieder Intervall-Einschließungsgrenzen.**
**Neuer Kandidat für Ober/Untergrenze ist jetzt nicht der Punkt in der Mitte, sondern die Nullstelle der Sekante.**
**Ersetze eine der beiden alten Grenzen durch diesen neuen Kandidaten, so dass die gesuchte Nullstelle wieder garantiert in dem neuen Intervall liegt!**

Bisektionsverfahren:

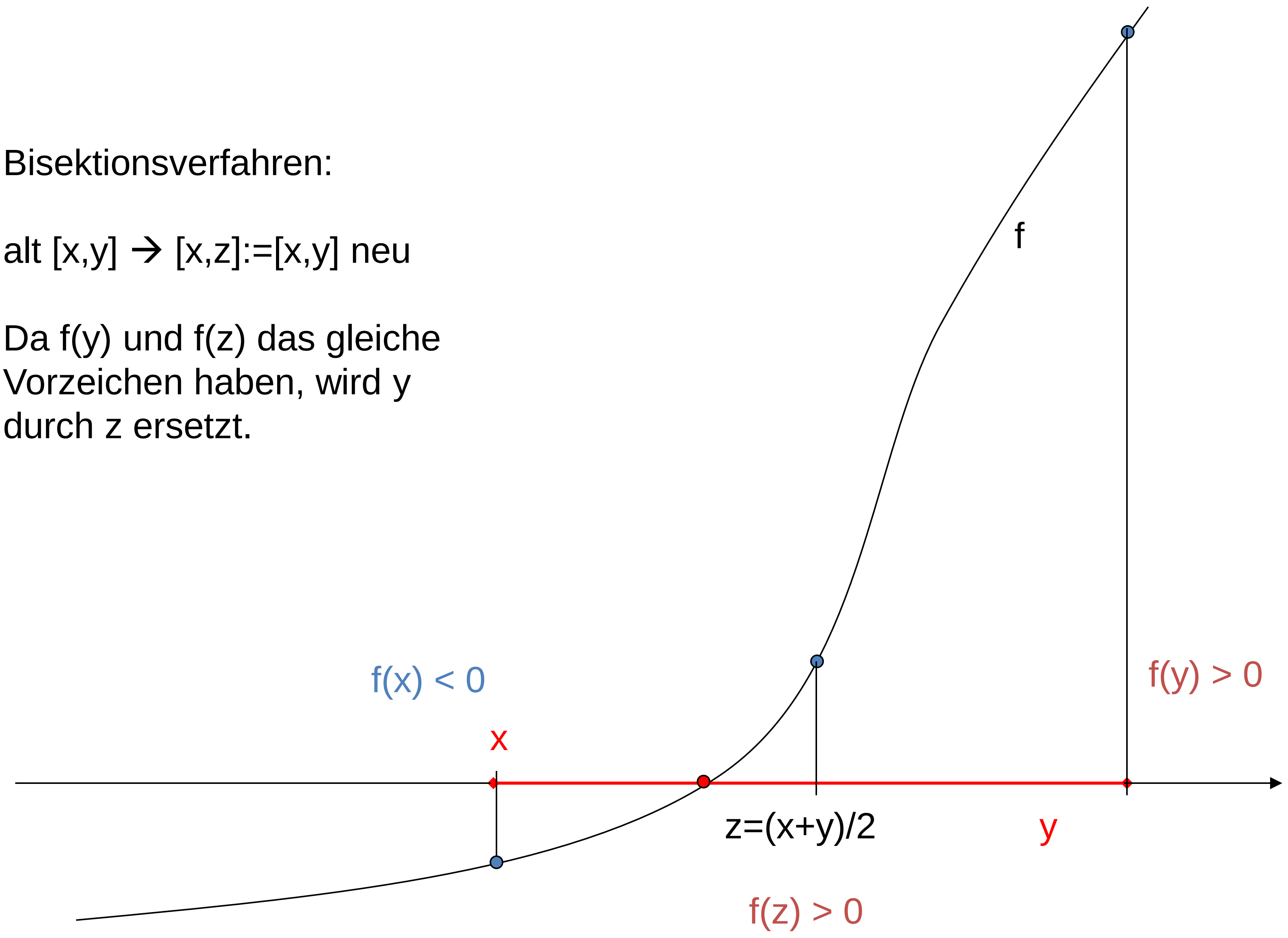
Nullstelle im Intervall [x,y]

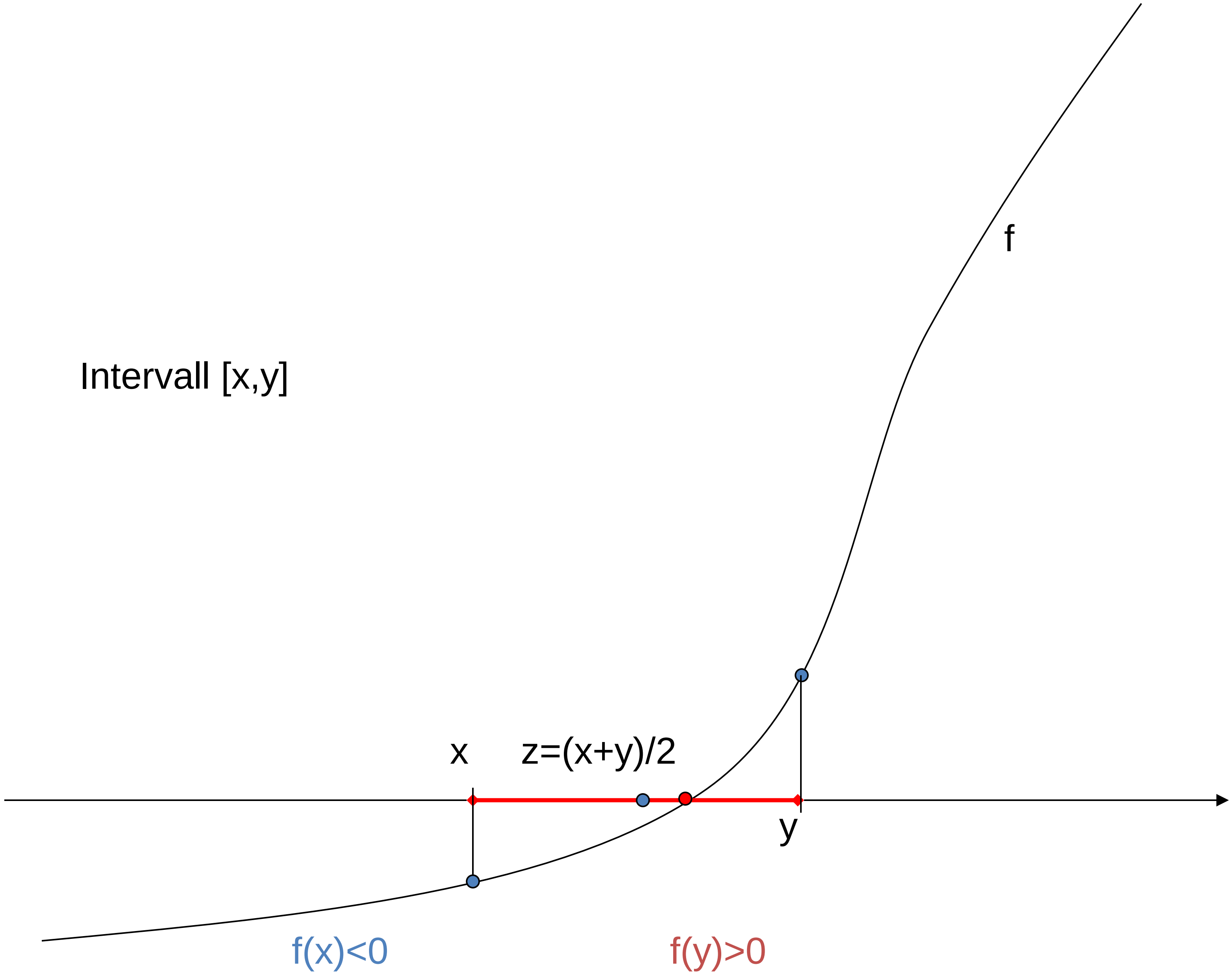


Bisektionsverfahren:

alt [x,y] → [x,z]:=[x,y] neu

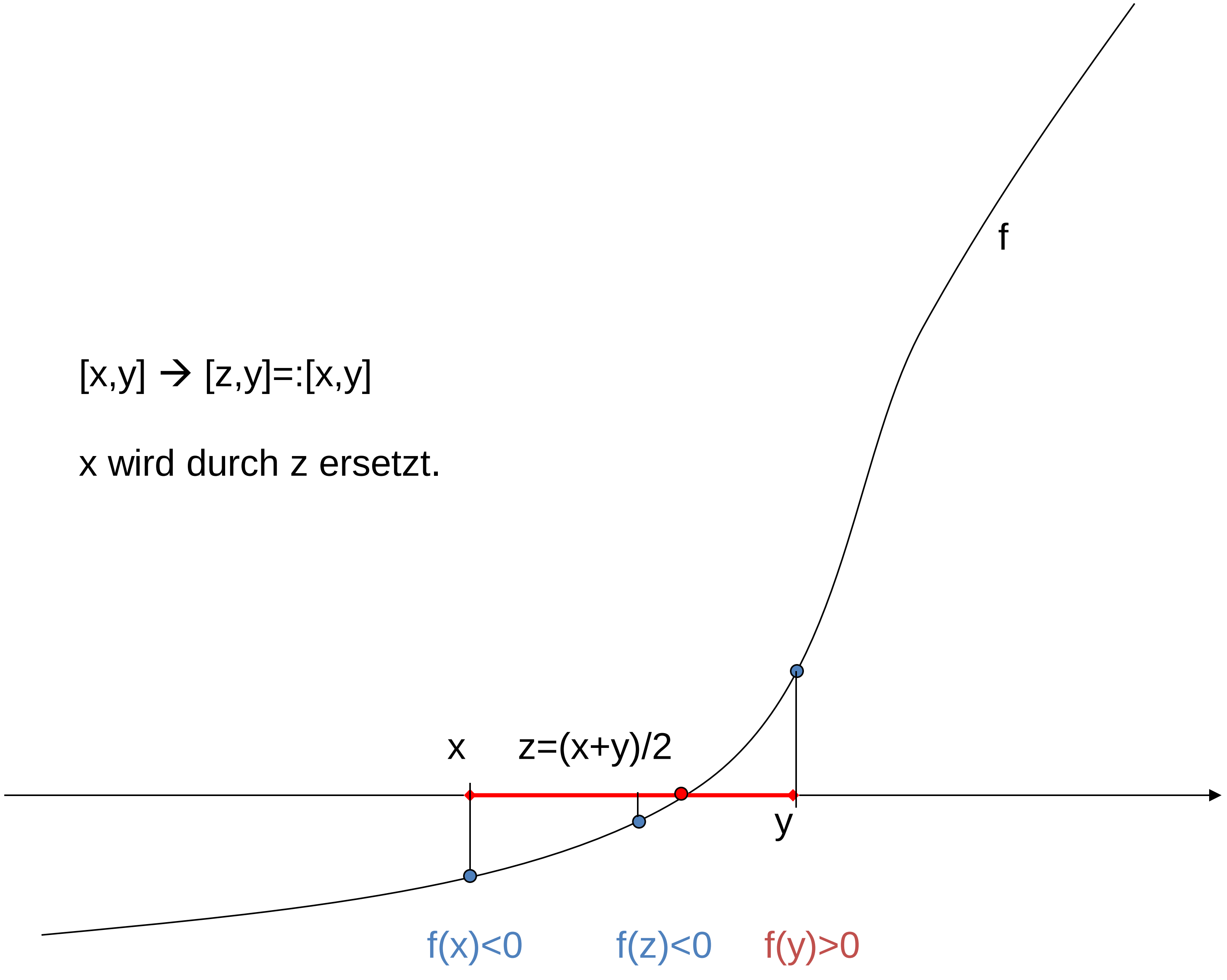
Da f(y) und f(z) das gleiche Vorzeichen haben, wird y durch z ersetzt.



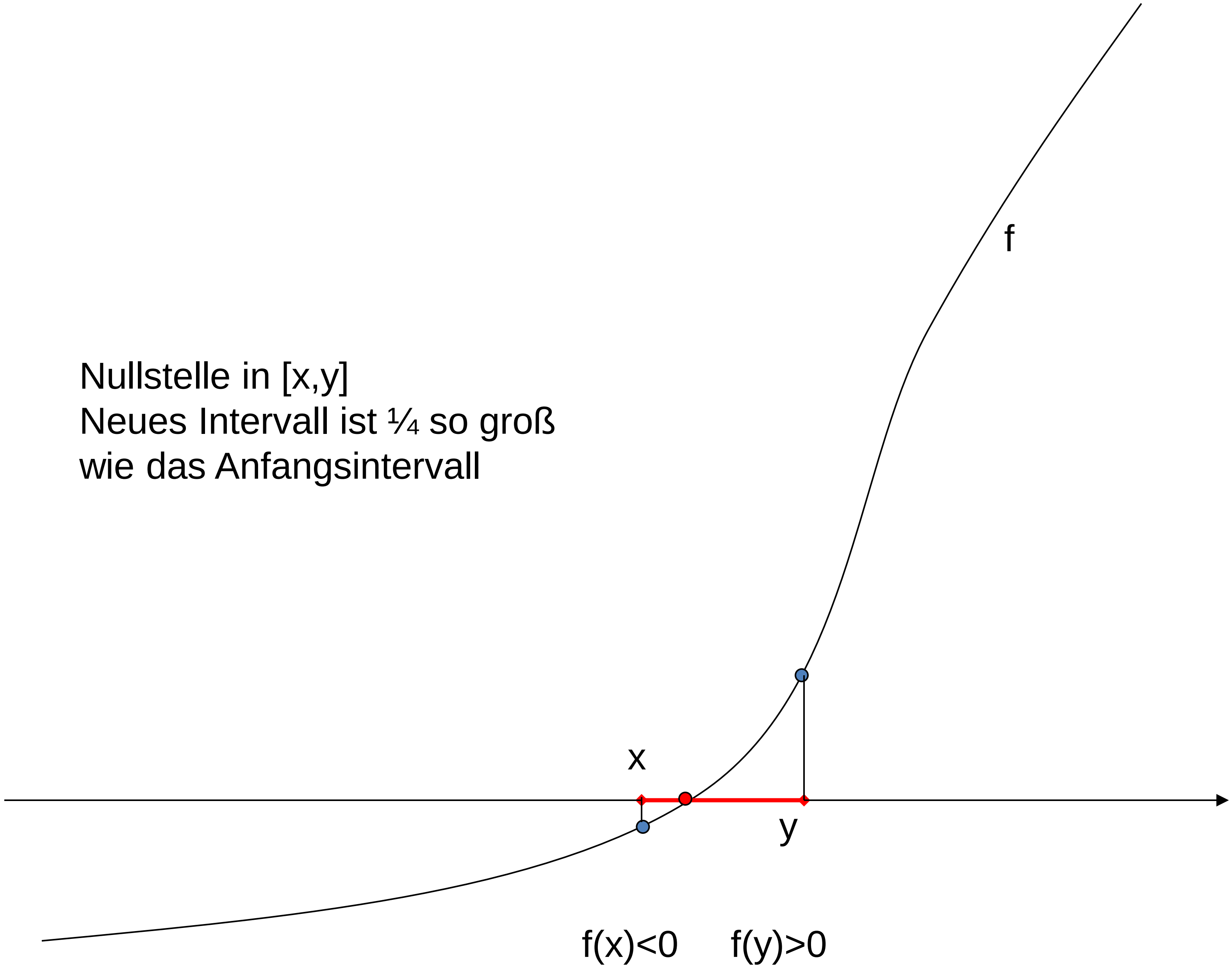

f
Intervall [x,y]
x
z=(x+y)/2
y
f(x)<0
f(y)>0

$[x,y] \rightarrow [z,y]=:[x,y]$

x wird durch z ersetzt.



Nullstelle in [x,y]
Neues Intervall ist ¼ so groß
wie das Anfangsintervall



In der Praxis wird häufig eine Kombination von Bisektion und Newton eingesetzt:

Starte mit ‚sicherer' Bisektion, bis der ‚Einzugsbereich' der quadratischen Konvergenz des Newtonverfahrens erreicht ist.

Dazu nötig sind Werte x und y mit $f(x)f(y) < 0$ ;
solche Werte erhält man z.B. durch Auswertung von f(x) an Zufallszahlen oder an äquidistanten Stellen.

Falls solche x und y nicht auffindbar sind, liegt ev. keine Nullstelle vor oder eine Nullstelle gerader Ordnung!
Im letzteren Fall kann das Newtonverfahren auf $f'(x)$ angewendet werden.

# 6.2.5. Newtonverfahren und Minimierung:

Nullstelle einer Funktion f: $R^n \rightarrow R^n$ ,

$$f(x) = f(x_1,\dots,x_n) = \begin{pmatrix} f_1(x_1,\dots,x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1,\dots,x_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

Jacobi-matrix der Ableitungen von f:

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Newtonverfahren im $R^n$ :

$$\boxed{x^{k+1} := x^k - inv(J) \cdot f(x^k)}$$

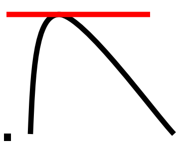
Vektor = Vektor – Matrix * Vektor

In jedem Schritt ist ein neues Gleichungss. in $J(x^k)$ zu lösen!

# 6.2.6. Minimierungsproblem:

**Gegeben: F: $R^n \rightarrow R$ , $F(x_1,...,x_n) \in R$**

**Gesucht: (relatives) Minimum / Maximum**

Bestimme dazu Nullstelle der Ableitung
(entspricht waagrechter Tangente, also Extremwert). 

Gradientenvektor von F:

$$\nabla F = f(x_1,\ldots,x_n) = \begin{pmatrix} f_1(x_1,\ldots,x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1,\ldots,x_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_n} \end{pmatrix} \overset{!}{=} 0$$

Jacobi-matrix J der ersten Ableitungen von f entspricht der sog. Hesse-matrix H der zweiten Ableitungen von F:

$$H(F) = J(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} = \left( \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{i,j=1}^{n}$$

Newtonverfahren zur Bestimmung der Nullstelle des Gradienten ergibt:

$$\boxed{x^{k+1} = x^k - inv(H) \cdot \nabla F(x^k)}$$

Löse dazu in jedem Schritt ein lineares Gleichungssystem mit sog. Hesse-matrix $H(x^k)$ !

Problem, falls H an der Stelle $x^k$ singulär.

**Billiger:** Quasi-Newton-Verfahren, ersetze H durch billiges B.

# 6.2.7. Nichtlineare Ausgleichsrechnung:
## Gauss-Newton-Verfahren

$$\min_x \left\| \begin{pmatrix} f_1(x_1,\ldots,x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1,\ldots,x_n) \end{pmatrix} - b \right\|_2^2 , \qquad \text{(vgl. } \min \|Ax-b\| \text{)}$$

Erster Schritt:

Linearisierung mittels Jacobi-matrix und Taylorreihe

$$f(x) = f(x^k) + J(x - x^k) + \cancel{O(|h|^2)}$$

Damit ergibt sich neue Iterierte $x^{k+1}$ aus der Lösung des <u>linearen</u> Ausgleichsproblems

$$\min_x \left\| \left( f(x^k) + J^k (x - x^k) \right) - b \right\|_2^2$$

Neue Linearisierung an der Stelle $x^{k+1}$ ergibt neues lineares Ausgleichsproblem mit neuer Matrix $J^{k+1}$.