Technische Universität München
Institut für Informatik
Prof. Dr. Thomas Huckle
Dipl.-Math. Jürgen Bräckle
Nikola Tchipev, M.Sc. SoSe 2014

Numerisches Programmieren, Übungen

3. Übungsblatt: Gaußelimination, Pivotsuche, LR-Zerlegung, QR-Zerlegung

1) Gauß-Elimination und Pivotsuche

Lösen Sie das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} -10^{-3} & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit der Gauß-Elimination:

a) Ohne Spalten-Pivotsuche in exakter Arithmetik (d.h. keine Zeilenvertauschungen und ohne Runden rechnen)

b) Ohne Spalten-Pivotsuche und mit Rundungsfehlern (korrektes Runden in dezimaler Gleitkomma-Darstellung mit 3 signifikanten Stellen, d.h. $B = 10$, $t = 3$. Bsp.: $0.01236 = 123.6 \cdot 10^{-4}$ ergibt 0.0124).

c) Mit Spalten-Pivotsuche und mit Rundungsfehlern wie in b).

2) LR-Zerlegung

In dieser Aufgabe wollen wir den Algorithmus der LR-Zerlegung aus der Vorlesung an Beispielen nachvollziehen und vergleichen.

Die LR-Zerlegung zur Lösung eines linearen Gleichungssystems $Ax = b$ besteht aus drei Teilen:
1. Zerlegung der Matrix A: $A = L \cdot R$
2. Vorwärtssubstitution: $Ly = b$
3. Rückwärtssubstitution: $Rx = y$

a) Lösen Sie unter Verwendung der Gauß-Elimination das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

b) Berechnen Sie die LR-Zerlegung (1.) der Matrix A.

c) Führen Sie nun zur Lösung von $Ax = b$ die Vorwärts- und Rückwärtssubstitution (2.) und (3.) durch. Verwenden Sie den Vektor b aus Teilaufgabe a).

d) Setzen Sie die LR-Zerlegung ebenfalls zur Lösung von $Ax = c$ mit $c = (2, 1, 2)^T$ ein. Wie groß ist der zusätzliche Aufwand?

3) QR-Zerlegung mit Givens-Rotationen

Die **QR-Zerlegung** ist ein verwandtes Verfahren der LR-Zerlegung und weist eine hohe Stabilität auf. In dieser Aufgabe wollen wir sie nutzen, um ein lineares Gleichungssystem zu lösen.

Die Matrix A wird in das Produkt

$$A = Q \cdot R$$

einer orthogonalen Matrix Q (d.h. $Q^T \cdot Q = I$) und einer rechten oberen Dreiecksmatrix R zerlegt. Damit reduziert sich das Lösen des Gleichungssystems auf eine einfache Rückwärtssubstitution:

$$Ax = b \quad \Leftrightarrow \quad Q \cdot Rx = b \quad \Leftrightarrow \quad Rx = Q^T b. \tag{1}$$

In dieser Aufgabe setzen wir die QR-Zerlegung mit Hilfe der **Givens-Rotationen** um. Hierbei wird Q aus einer Folge von Drehungen aufgebaut, welche sukzessive Einträge unter der Diagonalen von A eliminieren. Für 2×2-Matrizen ist das nur ein einziger Eintrag (und entsprechend nur eine Drehung in der Ebene $\mathbb{R}^2$). Eine Drehung im $\mathbb{R}^2$ um den Winkel φ ist durch eine orthogonale Rotationsmatrix G_φ charakterisiert:

$$G_\varphi = \begin{pmatrix} c & s \\ -s & c \end{pmatrix}, \text{ wobei } c = cos(\varphi) \text{ und } s = sin(\varphi).$$

Diese Rotation soll nun auf die erste Spalte $(a, b)^T$ einer 2×2-Matrix A angewendet werden und den Eintrag unter der Diagonalen zu Null machen:

$$\begin{aligned} G_\varphi \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} c & s \\ -s & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix}. \\ \Rightarrow c &= \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad s = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{aligned}$$

(In der Praxis benötigt man den Drehwinkel φ nicht, sondern kann c und s direkt berechnen). Unsere gesuchte Matrix Q ist nun einfach die Inverse (also Transponierte) der Rotationsmatrix: $Q = G_\varphi^T$. Die obere Dreiecksmatrix R erhalten wir durch Multiplikation von G_φ mit A:

$$A = Q \cdot R \quad \Leftrightarrow \quad Q^{-1} \cdot A = R \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{G_\varphi \cdot A = R}.$$

a) Berechnen Sie die Matrizen Q und R mit Hilfe der Givens-Rotation nach obigem Schema für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Berechnen Sie die Lösung x des Gleichungssystems $Ax = b$ mit $b = (1, 0)^T$ mit Hilfe der QR-Zerlegung aus a) (siehe auch (1))!

Zusatzaufgabe: Image Stitching mit Gauß-Elimination

In dieser Aufgabe verwenden wir die Gauß-Elimination zum Lösen linearer Gleichungssysteme im Bereich des Rechnersehens. Eine der Aufgaben, die durch Techniken der Bildverarbeitung bewältigt werden, ist das Zusammensetzen von Einzelbildern (engl. image stiching) bzw. die Erzeugung von Panoramabildern.

Will man zwei Bilder I_1 und I_2 "aneinandernähen", detektiert der entsprechende Algorithmus zunächst sogenannte Merkmalpunkte (engl. feature points) in beiden Bildern. Unter der Annahme, dass beide Bilder einen gemeinsamen Teil einer Szenerie zeigen, gibt es solche Merkmalpunkte in beiden Bildern. Anschließend findet eine Verknüpfung der Merkmalpunkte im ersten Bild I_1 mit den zugehörigen Punkten im Bild I_2 statt, wie in Abbildung 1 gezeigt.

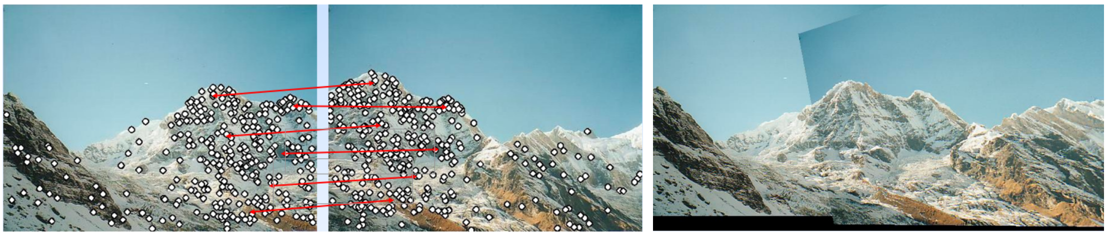

Abbildung 1: Image stiching.

In der Praxis treten viele Fehler beim Finden gemeinsamer Bildmerkmale auf. Allerdings gehen wir hier von perfekten Beziehungen zwischen den Punkten aus. Da sich die Punkte in der Bildebene befinden, existiert eine lineare Transformation H (im Englischen als homomorphy bezeichnet), die die Mengen von Merkmalpunkten aufeinander abbildet. Bezeichnet man die Merkmalpunkte in Bild I_1 als $\mathbf{x}_i, i = 1, \dots n$ und in Bild I_2 als $\mathbf{x}_i^{'}, i = 1, \dots n$, so kann die Korrespondenz zwischen ihnen durch $\mathbf{x}^{'} = H\mathbf{x}$ ausgedrückt werden.

Aufgabe: Gegeben seien die beiden Punktepaare

I_1	I_2
$x_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$	$x_1{'} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$
$x_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$	$x_2{'} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

.

Bestimmen Sie die entsprechende 2x2-Transformationsmatrix H.