Technische Universität München
Institut für Informatik
Prof. Dr. Thomas Huckle
Dipl.-Math. Jürgen Bräckle
Nikola Tchipev, M.Sc.

SoSe 2014

Numerisches Programmieren, Übungen

7. Übungsblatt: Numerische Quadratur

1) Integration von Interpolationspolynomen

Nach der Beschäftigung mit Interpolationsformeln drängt sich für die numerische Integration die folgende Idee geradezu auf. Kann man das Integral einer Funktion über ein Intervall nicht exakt bestimmen, so bestimmt man erst eine möglichst genaue Interpolationsfunktion, die man exakt integrieren kann.

a) Bestimmen Sie die Näherungsformel Q_1 für das Integral $\int_0^1 f(x)dx$, die sich durch die Integration des Interpolationspolynoms von Lagrange mit den zwei Stützstellen $x_0 = 0$ und $x_1 = 1$ ergibt!

b) Welche Näherung Q_2 ergibt sich durch Hinzunahme einer dritten Stützstelle in der Mitte des Intervalls, das heißt $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{2}$ und $x_2 = 1$?

c) Sei ein beliebiges Polynom 3. Grades $p(x) = \sum\limits_{i=0}^{3} c_i x^i$ gegeben. Zeigen Sie, dass die Näherungsformel Q_2 aus Teilaufgabe b) die Gleichung

$$Q_2(p) \quad = \quad \int\limits_0^1 p(x)\,dx$$

stets erfüllt!

d) Benutzen Sie die in Teilaufgabe a) entwickelte Formel, um die Integrale

i) $\int\limits_0^1 \sin(\pi x)\cos(\pi x)\,dx$,

ii) $\int\limits_0^1 \frac{\sin(\pi x)}{x}\,dx$ und

iii) $\int\limits_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$

näherungsweise zu bestimmen!

2) Trapezregel und Trapezsumme

In dieser Aufgabe wollen wir zwei einfache Funktionen per Hand und mit den Formeln der **T**rapezregel und **T**rapez**s**umme aus der Vorlesung integrieren. Ziele der Berechnungen sind also der exakte Wert $I(f)$,

$$I(f) \quad = \quad \int_a^b f(x)\; dx, \tag{1}$$

sowie die approximativen Werte $Q_T(f)$ und $Q_{TS}(f;h)$,

$$Q_T(f) \quad = \quad H \cdot \frac{f(a) + f(b)}{2} \tag{2}$$

$$Q_{TS}(f;h) \quad = \quad h \cdot \left(\frac{f_0}{2} + f_1 + \ldots + f_{n-1} + \frac{f_n}{2} \right), \tag{3}$$

wobei gilt: $H = b - a$, $h = \frac{b-a}{n}$, $f_i = f(x_i)$, $x_i = a + ih$, für $i = 0, \ldots, n$ bei n Teilintervallen.

a) Gegeben sei die Funktion $f(x) = -x^2 + 4$. Berechnen Sie $I(f)$ und $Q_T(f)$ nach den Formeln (1) - (2) für $a = -2,\ b = 2$.

b) Gegeben sei die Funktion $g(x) = x^4$. Berechnen Sie $I(g)$ und $Q_T(g)$ nach den Formeln (1) - (2) für $a = 0,\ b = 4$.

c) Berechnen Sie $Q_{TS}(f;h)$ für $f(x) = -x^2 + 4$ nach der Formel (3) für $a = -2,\ b = 2$ und $n = 8$. Tip: Nützen Sie die Symmetrie von $f(x)$!
Geben Sie dann das Restglied $R_{TS}(f;h)$ an nach der Formel

$$R_{TS}(f;h) \quad = \quad h^2 \cdot H \cdot \frac{f^{(2)}(\xi)}{12} \quad \text{mit } \xi \in [a,b]. \tag{4}$$

d) Berechnen Sie $Q_{TS}(g;h)$ für $g(x) = x^4$ mit der Formel (3) für $a = 0,\ b = 4$ und $n = 4$. Schätzen Sie dann das Restglied $R_{TS}(g;h)$ mit der Formel (4) ab!

3) Simpsonregel (Keplersche Fassregel) und Simpson-Summe

Analog zur Aufgabe 2) wollen wir jetzt Integrationsformeln nutzen, die aus Interpolationspolynomen mit einer Ordnung mehr (quadratisch) entstehen. Ziel der Berechnungen sind nun die approximativen Werte $Q_S(f)$ und $Q_{SS}(f;h)$ der Simpson und der Simpson-Summe:

$$Q_S(f) = H \cdot \frac{f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)}{6} \tag{5}$$

$$Q_{SS}(f;h) = \frac{h}{3} \cdot \left(f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + \ldots + 2f_{n-2} + 4f_{n-1} + f_n\right), \tag{6}$$

wobei wieder gilt: $H = b - a$, $h = \frac{b-a}{n}$, $f_i = f(x_i)$, $x_i = a + ih$, für $i = 0, \ldots, n$ bei n Teilintervallen.

a) Gegeben sei die Funktion $g(x) = x^4$. Berechnen Sie $Q_S(g)$ nach der Formel (5) für $a = 0,\ b = 4$.

b) Berechnen Sie $Q_{SS}(g;h)$ für $g(x) = x^4$ mit der Formel (6) für $a = 0,\ b = 4$ und $n = 4$. Schätzen Sie dann das Restglied $R_{SS}(g;h)$ mit folgender Formel ab:

$$R_{SS}(f;h) = h^4 \cdot H \cdot \frac{f^{(4)}(\xi)}{180} \quad \text{mit } \xi \in [a,b]. \tag{7}$$

4) Quadratur nach Archimedes

Wir betrachten den divide-et-impera-Algorithmus zur Integration nach Archimedes. Die Grundidee ist dabei eine hierarchische Sichtweise, so dass in jedem neuen Schritt des Algorithmus jeweils ein zusätzlicher Anteil zum Gesamtergebnis hinzukommt. Das hat zur Folge, dass bei eventueller adaptiver Rechnung nie die vorigen Ergebnisse weggeworfen sondern mitgenutzt werden.

Konkret berechnet dieser Algorithmus immer Dreiecksflächen, die dann aufsummiert werden und so eine Approximation der gesamten Fläche unter dem Funktionsgraphen ergeben (vgl. Abb. 1). Die Fläche eines Dreiecks ist nach der Formel $A = g \cdot h/2$ bestimmt, wobei g die Grundseite (in Abb. 1 vertikal) und h die Höhe (horizontal) beschreibt.

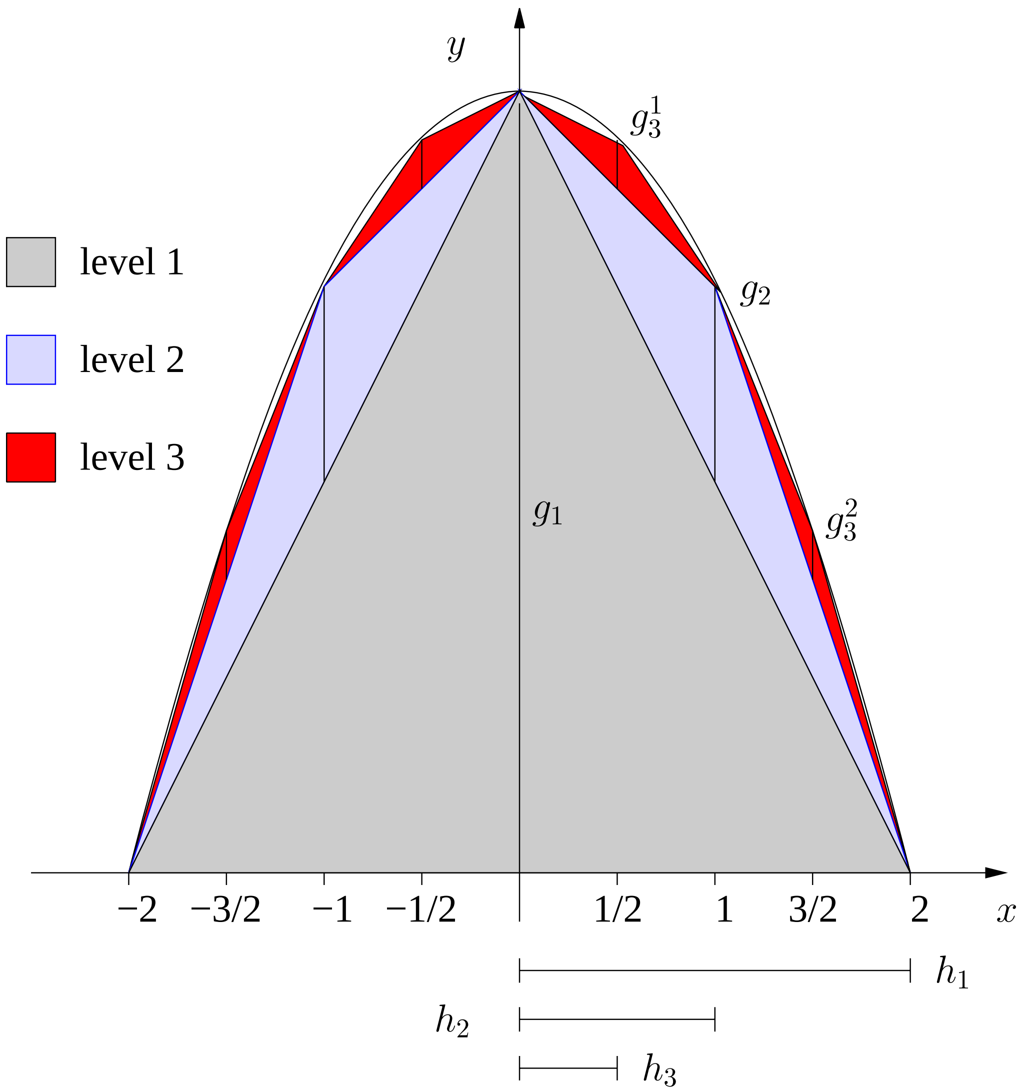

Abbildung 1: Visualisierung des Algorithmus nach Archimedes.

Berechnen Sie nach Archimedes eine Approximation des Integrals

$$I(f) \;=\; \int_{-2}^{2} f(x)\, dx,$$

für die Funktion $f(x) = -x^2 + 4$, indem Sie ausgehend vom Startdreieck zwei gleichmäßige Verfeinerungsstufen ansetzen (vgl. Abb. 1). Tip: Nützen Sie die Achsensymmetrie der Funktion $f(x)$ aus!
Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem aus Aufgabe 1) c). Was stellen Sie fest?

Wie setzt man die Quadratur nach Archimedes um, wenn für die Funktion f nicht $f(a) = 0$ und $f(b) = 0$ gilt?