Technische Universität München
Institut für Informatik
Prof. Dr. Thomas Huckle
Dipl.-Math. Jürgen Bräckle
Nikola Tchipev, M.Sc.

SoSe 2014

Numerisches Programmieren, Übungen

8. Übungsblatt: Extrapolation, Diskrete Fourier-Transformation

1) Extrapolation: Numerische Quadratur hoher Ordnung

In dieser Aufgabe wollen wir uns mit der Romberg-Quadratur beschäftigen. Dieses Verfahren benutzt Trapezsummen $T(h_1)$, $T(h_2)$, $T(h_3)$, $\ldots$ zu feiner werdenden Schrittweiten h_1, h_2, $h_3, \ldots$, um daraus ein Interpolationspolynom $p(x)$ in $x = h^2$ durch die Stützpunkte $(h_1^2, T(h_1))$, $(h_2^2, T(h_2))$, $(h_3^2, T(h_3))$, $\ldots$ zu konstruieren und dieses bei $x = h^2 = 0$ auszuwerten. Da dieser Wert außerhalb des Bereichs der Stützstellen liegt, wird es auch als *Extrapolationsverfahren* bezeichnet. Der Fehler der Romberg-Quadratur ist von der Größenordnung $O(h_1^2 \cdot h_2^2 \cdot h_3^2 \cdot \ldots)$.

Das Interpolationspolynom lässt sich an der Stelle $x = 0$ mit Hilfe des Aitken-Neville-Algorithmus auswerten. Modifziert man das Aitken-Neville-Verfahren entsprechend, so erhält man den Romberg-Algorithmus:

```
for i=1:n
    waehle n[i];
    h[i]:=(b-a)/n[i];
    T[i]:=Trapezsumme zur Schrittweite h[i]
    for k:=i-1:-1:1
        T[k] := T[k+1] + 1/(h[k]^2/h[i]^2-1)*(T[k+1]-T[k])
    end
end
```

Dabei bezeichnet n_i die Anzahl der Teilintervalle von $[a, b]$, die zur Berechnung der Trapezsumme T_i mit Schrittweite $h_i = \frac{b-a}{n_i}$ verwendet wird. Häufig wählt man hierfür die Folge $(n_i)_{i \in \mathrm{N}}$ mit $n_i = 2^i$.

a) Leiten Sie einen Extrapolationsschritt zur Berechnung eines Integrals $I(f)$ her. Betrachten Sie dazu die Entwicklungen (in h^2) zweier Trapezsummen mit den Schrittweiten h_1 und h_2

$$\begin{aligned} T(h_1) &= I(f) + \tau_1 h_1^2 + \tau_2 h_1^4 + \ldots \\ T(h_2) &= I(f) + \tau_1 h_2^2 + \tau_2 h_2^4 + \ldots \end{aligned}$$

und ermitteln Sie daraus eine Approximation für den Wert des Integrals $I(f)$ abhängig von den Trapezsummen $T(h_1)$ und $T(h_2)$. Von welcher Größenordnung ist der Fehler?

b) Berechnen Sie den Extrapolationswert $p(0)$ für die Funktion $f(x) = -x^2 + 4$ auf dem Intervall $[a; b]$, $a = -2$, $b = 2$, mit den drei Schrittweiten $h_1 = b - a$, $h_2 = (b - a)/2$, $h_3 = (b - a)/4$.
Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem Wert der nächst feineren Trapezsumme ($h_4 = (b - a)/8$) aus Aufgabe 2 c) von Blatt 7 und bestimmen Sie den Aufwand an jeweils nötigen f-Auswertungen. Was stellen Sie fest?

2) Frequenzanalyse

Eine von vielen Anwendungen der DFT ist die Transformation eines diskreten Signals $s \in \mathbb{C}^n$ aus dem Wertebereich (z.B. räumliche oder zeitliche Domäne) in den Spektralbereich (z.B. Frequenzraum).

Dargestellt wird der Spektralbereich für gewöhnlich durch das Frequenzspektrum. Es gibt an, wie hoch die jeweiligen Anteile der Grundfrequenzen im Ausgangssignal sind. Die k-te Grundfrequenz ist durch $e^{i\frac{2\pi}{n}k}$ definiert.

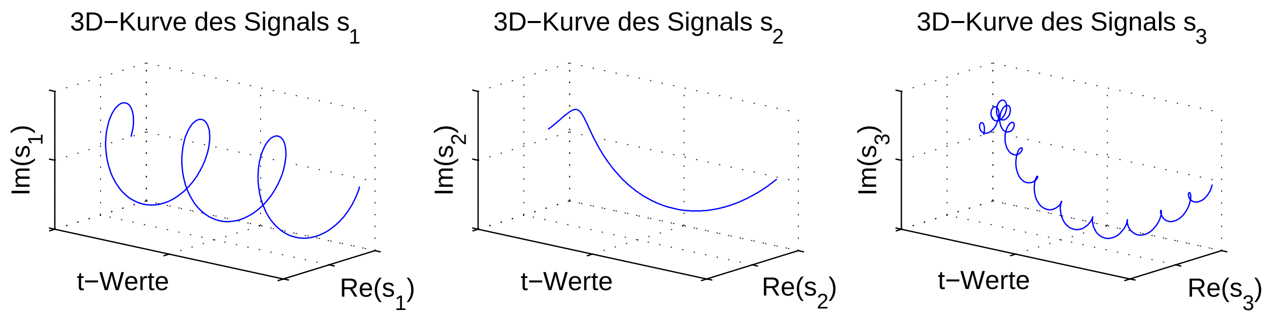

Abbildung 1: Komplexe Signale

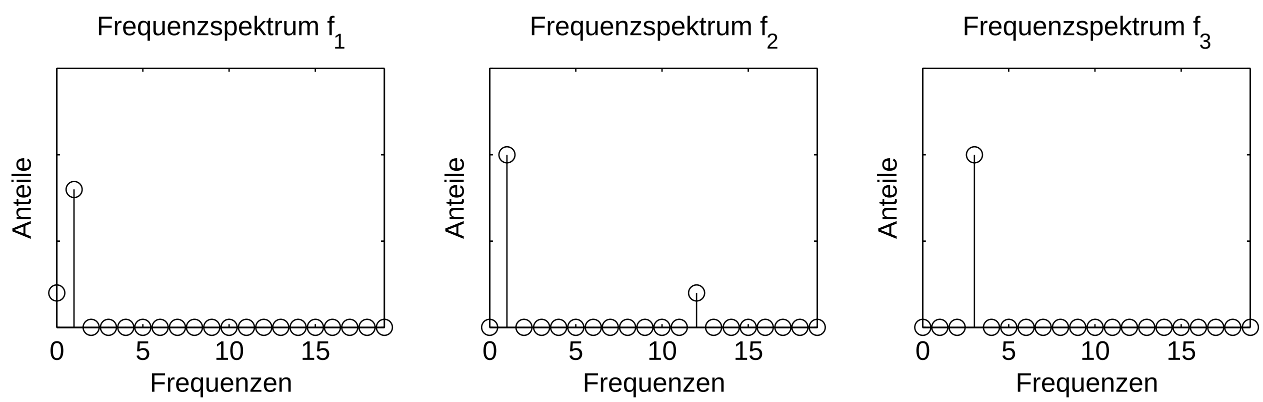

Abbildung 2: Frequenzspektren der Signale

Ordnen Sie den Signalen s_1 bis s_3 (Abbildung 1) die Frequenzspektren f_1 bis f_3 (Abbildung 2) zu! Begründen Sie darüber hinaus Ihre Entscheidung!

Dabei sind die Signale zum besseren Verständnis kontinuierlich dargestellt (z.B. $s_1 = e^{3it}$, $t \in [0; 2\pi]$), wohingegen die Frequenzspektren den Betrag der (komplexen) Koeffizienten der DFT mit $n = 21$ gesampelten Werten des jeweiligen Signals beschreiben.

3) Eigenschaften der diskreten Fourier-Transformation (DFT)

Wie in der Vorlesung ist die diskrete Fourier-Transformation von komplexen Eingabedaten $v = (v_0, v_1, \ldots, v_{n-1})^T$ definiert als

$$c_k \quad = \quad \big(DFT(v)\big)_k \quad := \quad \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} v_j \cdot \overline{\omega}^{jk} \qquad\qquad k = 0, 1, \ldots, n-1 \tag{1}$$

mit $\omega = \exp(i\,\frac{2\pi}{n})$.

Analog ist die inverse diskrete Fourier-Transformation als Auswertung des trigonometrischen Interpolationspolynoms an den Interpolationspunkten definiert:

$$v_l \quad = \quad \big(IDFT(c)\big)_l \quad := \quad \sum_{k=0}^{n-1} c_k \cdot \omega^{kl} \qquad\qquad l = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{2}$$

a) Zeigen Sie, dass gilt: $DFT(v) = \frac{1}{n}\,\overline{IDFT(\overline{v})}$.

b) Zeigen Sie, dass gilt: $DFT(v+u) = DFT(v) + DFT(u)$.

c) Zeigen Sie, dass folgende Beziehungen in Bezug auf ω gelten:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \overline{\omega}^{kl} \quad = \quad \begin{cases} n, & \text{für } l = 0 \\ 0, & \text{für } l = 1, \ldots, n-1 \end{cases}$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{kl}\, \overline{\omega}^{kj} \quad = \quad \begin{cases} n, & \text{für } l = j \\ 0, & \text{für } l \neq j \end{cases} \quad .$$

d) Zeigen Sie, dass DFT und $IDFT$ tatsächlich Umkehroperationen sind, indem Sie mit Hilfe der Definitionen (1) und (2) nachweisen:

$$IDFT(DFT(v))_l = v_l$$

e) Berechnen Sie die diskrete Fouriertransformation DFT für folgende drei Vektoren $a, b, c \in \mathbb{C}^n$!
$a = (a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})^T = (1, 0, 0, \ldots, 0, 0)^T$,
$b = (b_0, b_1, \ldots, b_{n-1})^T = (i, i, i, \ldots, i, i)^T$,
$c = (c_0, c_1, \ldots, c_{n-1})^T = (1, -1, 1, -1, \ldots)^T$ für gerades n!