Informatics V - Scientific Computing

Numerisches Programmieren

Tutorübung 3

Jürgen Bräckle, Nikola Tchipev

05.05 - 09.05.2014

Gauß-Elimination und Pivotsuche

LR-Zerlegung

QR-Zerlegung und Givens-Rotationen

Gauß-Elimination und Pivotsuche

LR-Zerlegung

QR-Zerlegung und Givens-Rotationen

Gauß-Elimination

Problemstellung

Löse LGS $Ax = b$ mit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}, b \in \mathbb{R}^n$

Vorgehensweise

$$[\mathrm{A}|\mathrm{b}] \xrightarrow{\textit{Zeilenumformungen}} [\mathrm{R}|\mathrm{b'}] \xrightarrow{\text{Rücksubstitution}} x$$

Mögliche Zeilenumformungen

- Zeilen vertauschen
- Zahl $\neq 0$ auf Zeile multiplizieren
- Zeile zu einer anderen Zeile addieren

Gauß-Elimination

Beispiel

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 9 & 1 \\ 0 & 2 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[\mathrm{III}=\mathrm{III}-\frac{1}{2}\mathrm{II}]{A_{32}\rightarrow 0} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 9 & 1 \\ 0 & 2 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{array}\right)$$

Pivotsuche

Problem Instabilität des Gauß-Algorithmus nach Division durch betragsmäßig kleine Zahlen

Lösung Bringe betragsmäßig große Zahlen mit Hilfe von Zeilen-/Spaltenvertauschungen in die Diagonale

Beispiel Spaltenpivotsuche

- Finde betragsm. größtes Element in aktueller Subspalte
- Tausche entsprechende Zeile mit der Diagonalzeile

Gauß-Elimination und Pivotsuche

LR-Zerlegung

QR-Zerlegung und Givens-Rotationen

LR-Zerlegung

Definition

$$A = L \cdot R,$$

wobei L nur 1er in der Diagonalen hat.

LGS $Ax = b$ lösen

1. Zerlege $A = LR \quad (O(n^3))$
2. Löse $Ly = b \quad (O(n^2))$
3. Löse $Rx = y \quad (O(n^2))$

Berechnung der LR-Zerlegung - über Gauß

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{III}=\text{III}-\frac{1}{2}\text{II}]{A_{32}\to 0} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = R$$

L_{32}

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} = L$$

Berechnung der LR-Zerlegung - über Matrixmultiplikation

Ansatz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & \\ 0 & \end{pmatrix}$$

n^2 Gleichungen bestimmen n^2 Unbekannte auf der rechten Seite.

Berechnung der LR-Zerlegung - über Matrixmultiplikation

Ansatz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & \\ 0 & \end{pmatrix}$$

n^2 Gleichungen bestimmen n^2 Unbekannte auf der rechten Seite.

$$1 = 1 R_{11}$$

Berechnung der LR-Zerlegung - über Matrixmultiplikation

Ansatz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \\ 0 & \end{pmatrix}$$

n^2 Gleichungen bestimmen n^2 Unbekannte auf der rechten Seite.

$$\begin{aligned} 1 &= 1 R_{11} \\ -1 &= L_{21} 1 \end{aligned}$$

Berechnung der LR-Zerlegung - über Matrixmultiplikation

Ansatz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & \end{pmatrix}$$

n^2 Gleichungen bestimmen n^2 Unbekannte auf der rechten Seite.

$$\begin{aligned} 1 &= 1 R_{11} \\ -1 &= L_{21} 1 \\ 2 &= 1 R_{12} \end{aligned}$$

Berechnung der LR-Zerlegung - über Matrixmultiplikation

Ansatz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ \text{-1} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & \end{pmatrix}$$

n^2 Gleichungen bestimmen n^2 Unbekannte auf der rechten Seite.

$$\begin{aligned} 1 &= 1 R_{11} \\ -1 &= L_{21} 1 \\ 2 &= 1 R_{12} \\ 0 &= -1 \cdot 2 + 1 R_{22} \end{aligned}$$

Berechnung der LR-Zerlegung - über Matrixmultiplikation

Ansatz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

n^2 Gleichungen bestimmen n^2 Unbekannte auf der rechten Seite.

$$\begin{aligned} 1 &= 1 R_{11} \\ -1 &= L_{21} 1 \\ 2 &= 1 R_{12} \\ 0 &= -1 \cdot 2 + 1 R_{22} \end{aligned}$$

Gauß-Elimination und Pivotsuche

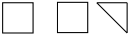
LR-Zerlegung

QR-Zerlegung und Givens-Rotationen

QR-Zerlegung

Definition

$$A = Q \cdot R$$



mit Q eine orthogonale Matrix, d.h. $Q^T Q = I$.

LGS $Ax = b$ lösen

1. Zerlege $A = QR \quad (O(n^3))$
2. Löse $Rx = Q^T b \quad (O(n^2))$

QR-Zerlegung

Vergleich zu Gauß/LR

- stabil (Gauß/LR trotz Pivot möglicherweise instabil)
- doppelter Aufwand ($\frac{4}{3}n^3$ vs. $\frac{2}{3}n^3$)
- bessere geeignet für Ausgleichsprobleme

Algorithmen zur QR-Zerlegung

- Givens-Rotationen
- Householder-Transformationen
- (modifizierter) Gram–Schmidt

Givens-Rotationen

Grundidee

$$A = QR \Leftrightarrow Q^T A = R$$

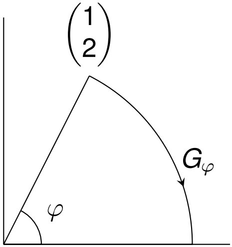
- Q^T ist orthogonal, Rotationen sind orthogonal
- Finde Rotationsmatrix G mit $GA = R$

2D Rotationsmatrix

$$G_\varphi = \begin{pmatrix} c & s \\ -s & c \end{pmatrix}$$

mit $c = \cos(\varphi)$, $s = \sin(\varphi)$.

Givens-Rotationen - 2D Beispiel



$$\text{Ziel: } G_\varphi \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow c = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$s = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$