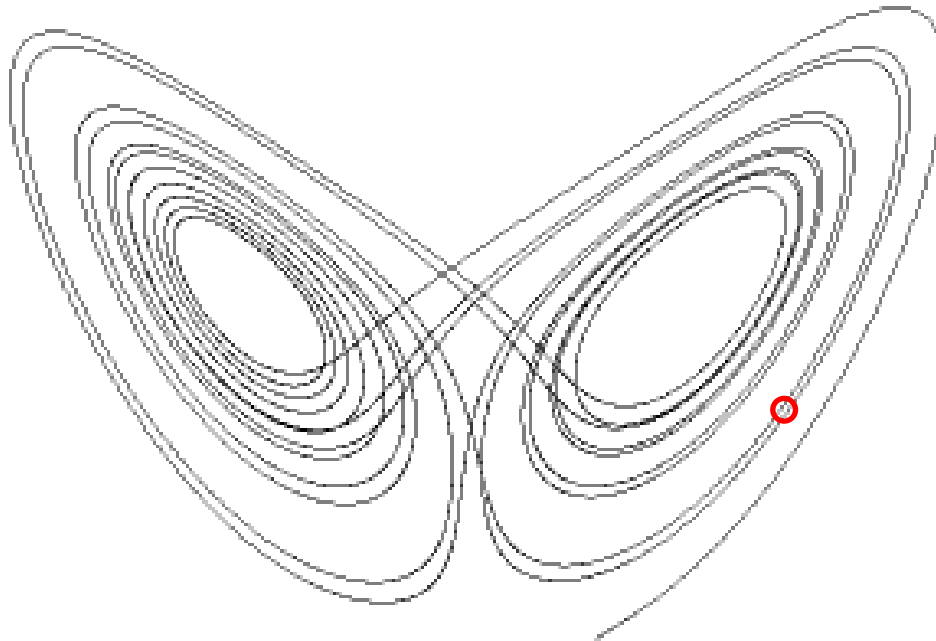


7.2.2. Lorenzattraktor:

Diff'gleichungssystem

$$\begin{aligned}x_1' &= a(x_2 - x_1) \\x_2' &= bx_1 - x_2 - x_1x_3 \\x_3' &= x_1x_2 - cx_3\end{aligned}$$

aus Modell für Beschreibung der Luftzirkulation in der Erdatmosphäre.



Wie bei der logistischen Parabel existieren zwei Attraktoren, zwischen denen die Lösungskurve chaotisch wechselt.

Daher führt eine minimale Änderung, z.B. der Anfangsdaten dazu, dass nach kurzer Zeit die Lösung sich an einer völlig anderen Position befindet

Der ‚Flügelschlag eines Schmetterlings‘ in China genügt, um nach einiger Zeit zu einer völlig anderen Lösung zu führen, z.B. einen Sturm in Europa auszulösen.

Daher ist es prinzipiell unmöglich, über längeren Zeitraum exakte Vorhersagen zu gewinnen, da leichteste Änderungen in den Anfangsdaten zu gänzlich anderem Lösungsverhalten führen.

Chaotisches Verhalten!

7.2.3. Beispiel für chaotisches Verhalten:

Logistische Parabel, Iteration mit Startwert $x_0 \in [0,1]$ und Funktion

$$\Phi(x) := 4 \cdot x \cdot (1 - x)$$

Vergleiche Orbit bei Startwert x_0 mit Orbit für Startwert $y_0 = x_0 + 10^{-16}$

Numerisches Ergebnis in MATLAB:

$x_0 = 0.999999999$ liefert

$x_{44} = 0.0209$ und $y_{44} = 0.9994$

Grund: Wiederholte Auslöschung

Chaos $\leftarrow \rightarrow$ Schlecht konditioniert

Beispiel Wintersturm Lothar:

Ignorieren eines Messwertes \rightarrow Falsche Wetterprognose

Gewöhnliche Differentialgleichung

- hat nur eine Unbekannte (z.B. x oder Zeit t)
- hat Anfangswerte gegeben.

Zu einer Diff'gleichung in einer Variablen x kann man auch ein Randwertproblem betrachten, z.B.

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = \varphi(u, u', x) \quad \text{auf } [a, b], \quad u(a) = u_a, \quad u_b = u_b$$

Hat eine Differentialgleichungen Ableitungen in mehr als einer Variablen, so spricht man von einer Partiiellen Differentialgleichung PDE

Beispiel Diffusion (mit Anwendung in der Bildverarbeitung):

Die Strömung j – hervorgerufen durch Dichteunterschiede – erfolgt in Richtung des negativen Gradienten der Konzentration $u \rightarrow$

$$j(x, t) = -D \cdot \nabla u(x, t)$$

Massenerhaltung: Änderung der Konzentration in einem Volumenelement kann nur durch Strömung erfolgen \rightarrow

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x, t) = -\operatorname{div}(j) = -\frac{\partial j_1}{\partial x_1} - \frac{\partial j_2}{\partial x_2} - \frac{\partial j_3}{\partial x_3}$$

Notation:

Nabla-Operator $\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$

Gradient $f(x, y, z): \nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}$

Divergenz $F = \begin{pmatrix} f \\ g \\ h \end{pmatrix}: \nabla F = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f \\ g \\ h \end{pmatrix} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z} =$
 $= f_x + g_y + h_z = \text{div}(F)$

Laplace-O.

$$\Delta U = \text{div}(\text{grad}(U)) = \nabla(\nabla U) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} & \frac{\partial U}{\partial y} & \frac{\partial U}{\partial z} \end{pmatrix}^T =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} U + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} U + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} U = U_{xx} + U_{yy} + U_{zz}$$

Zusammen:

$$u_t = \operatorname{div}(D \cdot \nabla u)$$

Im isotropen Fall ist D eine konstante Zahl, z.B. $D=1$:

$$u_t = \Delta u = u_{xx} + u_{yy}$$

im zweidimensionalen Fall;

Δ heißt Laplace-Operator.

Einteilung Partieller Diff'gleichungen: $u(x,y,t)$

Gleichgewichtsgl. (elliptische PDE):

$$-\Delta u = f$$

Wärmeleitungsgl. (parabolische PDE):

$$\Delta u = u_t$$

Wellengleichung (hyperbolische PDE):

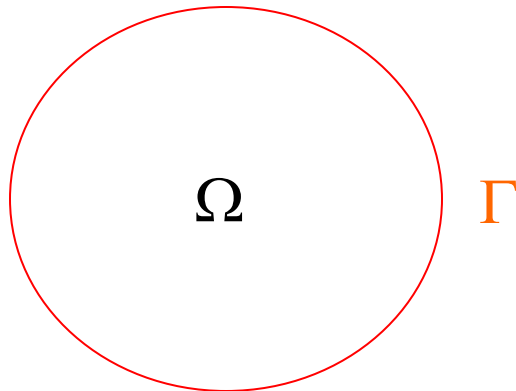
$$\Delta u = u_{tt}$$



Elliptische PDE: Gegeben sind zusätzlich Randwerte.



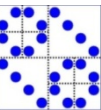
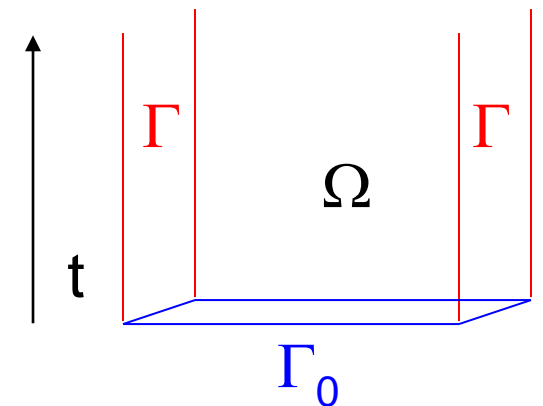
Also $-\Delta u = f$ auf Gebiet Ω und $u(x)$ auf Γ , dem Rand von Ω



Parabolische PDE: Gegeben sind Anfangs- und Randwerte.

Also $\Delta u = u_t$ auf Gebiet Ω und

$u(x,0)$ auf Γ_0 zum Zeitpunkt $t=0$,
und $u(x,t)$ vorgegeben auf Γ , dem
Rand von Ω .

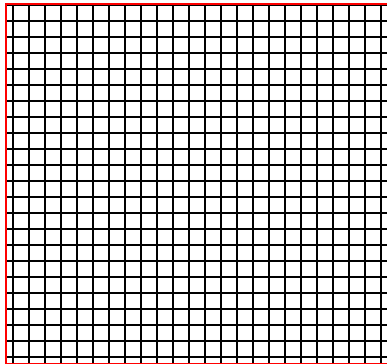


Lösungsmethoden am Beispiel Laplacegleichung

$$-\Delta u = f \quad \text{auf Gebiet } \Omega \text{ und } u(x) \text{ auf } \Gamma$$

Differenzenverfahren:

Ersetze Differentialquotient durch Differenzenquotienten.
 Das Gebiet Ω wird diskretisiert, d.h. durch ein Punktegitter x_{jk} , $j=1, \dots, n$, $k=1, \dots, m$, dargestellt:

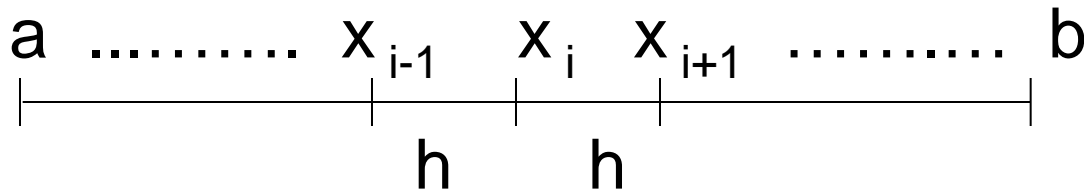


**$u(x) \rightarrow u_{jk} = u(x_{jk})$,
 am einfachsten äquidistant mit
 konstanter Schrittweite h .**

1-dimensionaler Fall:

$$-u_{xx} = f \quad \text{für} \quad a \leq x \leq b$$

$$u(a)=v; \quad u(b)=w;$$



$$\left. \frac{du}{dx} \right|_{x_i} = u_x(x_i) \approx \frac{u_{i+1} - u_i}{h}$$

$$\left. \frac{d^2u}{dx^2} \right|_{x_i} = u_{xx}(x_i) \approx \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} = -f_i$$

ergibt lineares Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{n-2} \\ u_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h^2 f_1 + u(a) \\ h^2 f_2 \\ \vdots \\ h^2 f_{n-2} \\ h^2 f_{n-1} + u(b) \end{pmatrix} \quad \text{Maske:} \quad [-1 \quad 2 \quad -1]$$

In 2D: -1

Maske: $\begin{matrix} -1 & 4 & -1 \\ & -1 & \end{matrix}$ entspricht Differenzfilter

Zu Lösen: Lineares Gleichungssystem

Anderer Ansatz: „Finite Elemente“, Galerkinverfahren:

Wähle Ansatzfunktionen $u_i(x)$

(z.B. lineare B-Splines = Hut-Funktion, die genau an der Stelle x_i gleich 1 sind, und an den anderen Stützstellen gleich 0).

Setze $u(x) = \sum_{i=0}^n c_i u_i(x)$ als Ansatz für die gesuchte Lösung.

Suche also Koeffizienten c_i , so dass DGL ‚möglichst gut‘ erfüllt ist.

Die Differentialgleichung selbst ist so direkt nicht erfüllbar!

Umformulierung der DGL als Variationsproblem:

$$u_{xx} + f \equiv 0 \Leftrightarrow \int_a^b (u_{xx} + f)v(x) dx = 0 \quad \text{für alle } v(x)$$

Setze in diese Gleichung für $u(x)$ den Ansatz mit den Basisfunktionen, und für $v(x)$ ebenfalls alle Basisfunktion.

$$\int_a^b \left(\sum_i c_i u_{i,xx}(x) + f(x) \right) u_k(x) dx = 0 \quad \text{für } k = 0, \dots, n$$

$$\sum_{i=0}^n \overbrace{\left(\int_a^b u_{i,xx}(x) \cdot u_k(x) dx \right)}^{a_{kj}} c_i = - \overbrace{\int_a^b f(x) u_k(x) dx}^{b_k}$$

für $k = 0, \dots, n$

ergibt: $A^*c = b$

also ein lineares Gleichungssystem zur Berechnung der unbekanntenen Koeffizienten c_i .

Nach Lösen des LGS liefert

$$u(x) = \sum_{i=0}^n c_i u_i(x)$$

eine Näherungslösung der gegebenen PDE.

Ansatzfunktionen $u_i(x)$ sind so zu wählen, dass sie ‚vernünftig‘ diff’bar sind und die Randbedingungen erfüllen!

Multigridverfahren:

Wende (gedämpftes) Jacobi-Verfahren zur Lösung der entstandenen LGS an.

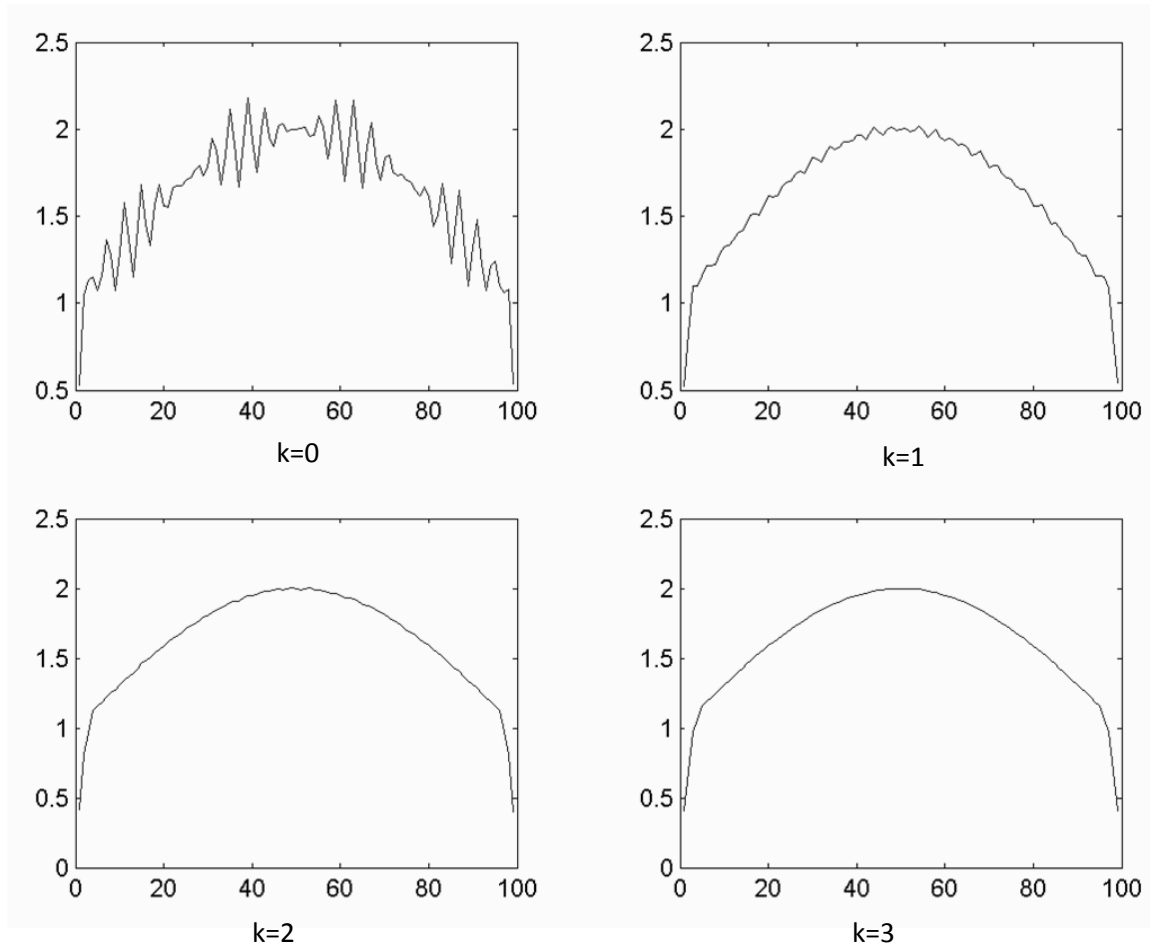
Liefert Näherungslösungen $x_0, x_1, \dots, x_k, \dots$

Beobachtung:

Nach wenigen Iterationen sind die hochfrequenten Fehleranteile verschwunden.

Zur Veranschaulichung:

Vektor $r_k = b - Ax_k$ komponentenweise aufgetragen nach k -tem Iterationsschritt des gedämpften Jacobi-Verfahrens:



Idee:

Betrachte nach k Schritten mit Näherung x_k neues Gleichungssystem

$$A(x_k + x) = b \Leftrightarrow Ax = b - Ax_k \Leftrightarrow Ax = r_k$$

r_k ist durch Iteration ‚glatt‘ geworden und kann genauso gut auf einer gröberen Diskretisierung dargestellt werden!

In der Sprache der Wavelets:

Zerlegt man r_k in glatten Mittelwertanteil und rauhen Differenzanteil, so ist der hochfrequente Differenzanteil praktisch Null.

Projiziere LGS mittels Wavelet-Mittelwert-Filter auf halb so großes LGS und löse $A_{\text{grob}} x_{\text{grob}} = r_{k,\text{grob}}$ auf grobem Gitter.

Projiziere Korrektur x_{grob} wieder nach oben auf feines Gitter
→ Korrektur x

Diese Idee ist nun rekursiv auch grobem Gitter auf A_{grob} anwendbar, also wieder Jacobi-Iteration plus Wavelet-Filter.

Gesamtschau:

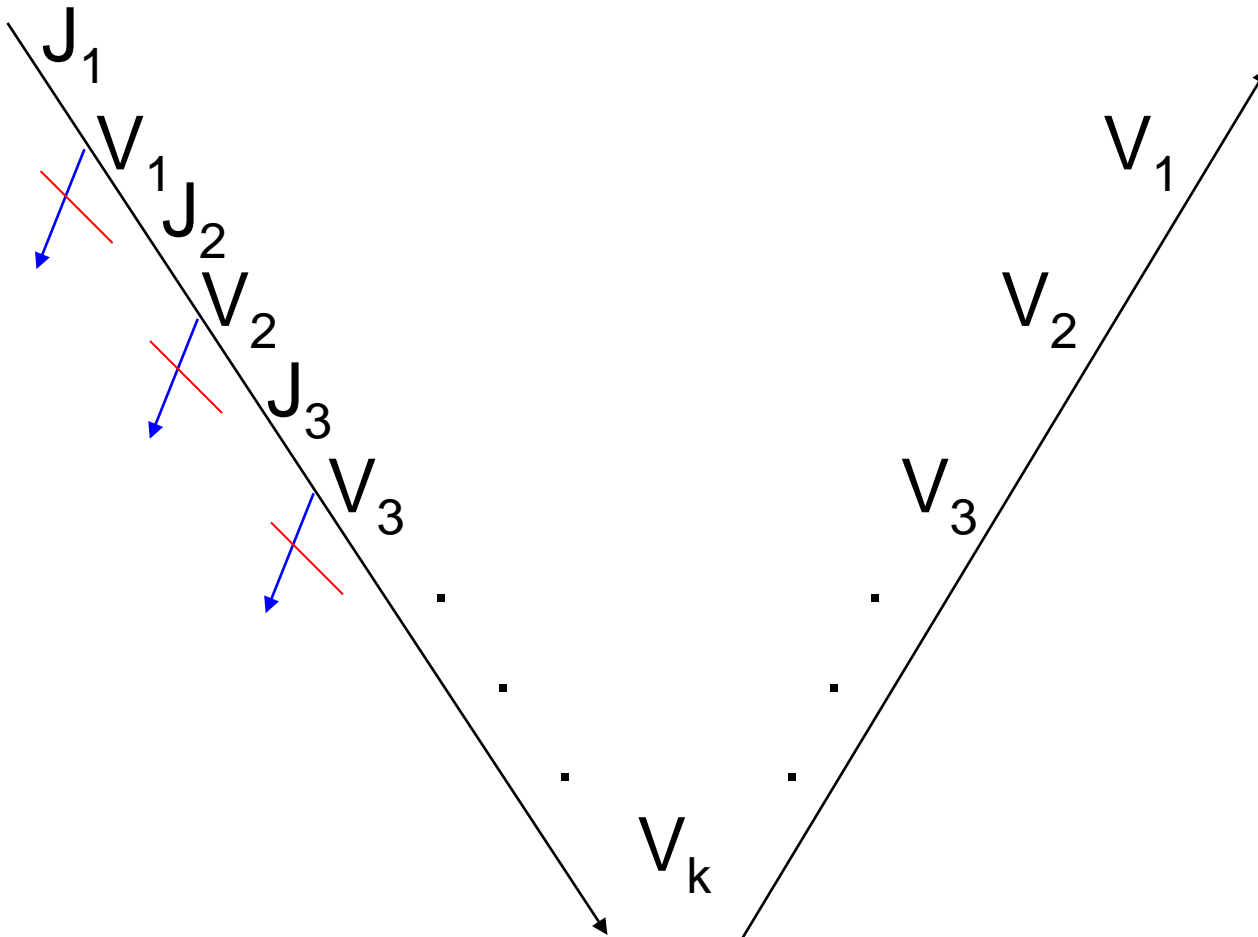
Rekursive Wavelet-Aufspaltung in rauhen und glatten Anteil.

Glättung durch Jacobi-Iteration und

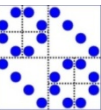
Vernachlässigung des rauhen Anteils durch Projektion

Lösen des groben Problems und Rückprojektion der Korrektur

V-Zyklus:



J: Jacobi-Iteration, V: Projektion/Rückprojektion



Gebietszerlegungs-Verfahren:

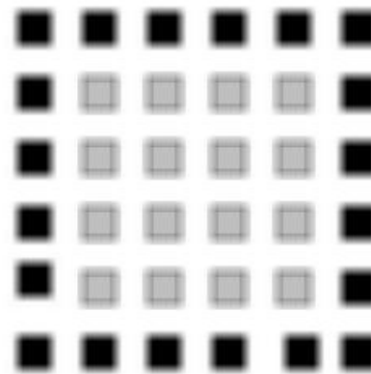
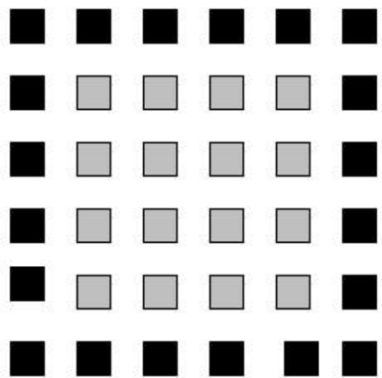


Löse die Differentialgleichung auf den 4 Teilgebieten.

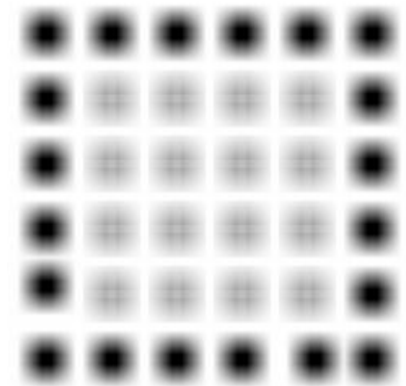
Konstruiere daraus durch Iteration oder Korrektur die Lösung auf dem Gesamtgebiet.

Diffusionsgleichung und Bild- verarbeitung:

Original



Aufnahme



Betrachte Bild als Momentaufnahme einer zeitabhängigen Strömung. Man kann sich vorstellen, dass die vorliegende Aufnahme durch einen Diffusionsprozess entstanden ist.

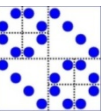
$$u_t = \operatorname{div}(D \cdot \nabla u)$$

Veränderung des Bildes durch Zurückrechnen des Diffusionsprozesses.

(Lösung der Diffusionsgleichung \leftrightarrow
Faltung mit Gauss-Funktion, Gauss-Filter, Mittelwert-
Filter, Weichzeichner)

Betragsmäßig großer Gradient zeigt Kanten an.
Außerdem ist das Bild ev. gestört durch Rauschen.
Ziel: Entferne Rauschen unter Beibehaltung der Kanten.

Wähle daher Diffusionskoeffizient D in Abhängigkeit vom Gradienten:



D

$$u_t = \operatorname{div} \left(\frac{1}{1 + |\nabla u|^2 / \lambda^2} \cdot \nabla u \right)$$

Effekt: Gradient nahe bei Null ergibt $D \approx 1 \rightarrow$
 Normale Diffusion (entspricht
 Weichzeichner zur Noise-Reduktion)

Gradient groß \rightarrow ‚Rückwärts‘-Diffussion, Bild wird
 schärfer, Kanten bleiben erhalten.

$$u_{k+1,ij} = u_{k,ij} + \Delta t * \operatorname{div}(\dots)_{ij} \quad t$$

