

6. Iterationsverfahren

Fixpunktiteration

Beispiel: Ausbreitung eines Grippevirus in einem Kindergarten

Zeitpunkt	t_0	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5
Anteil kranker Kinder	0.1	0.18	0.30	0.42	0.49	0.5

t_i	diskrete Folge von Zeitpunkten
k_i	Anteil an kranken Kindern zum Zeitpunkt t_i
α	Infektionsrate

Annahmen

- Bei jedem Kontakt zweier Kinder Virusübertragung möglich
- k_{i+1} direkt proportional zu Begegnungen zwischen einem kranken ($= k_i$) und einem gesunden ($= 1 - k_i$) Kind
- Kranke Kinder werden nach einem Zeitschritt wieder gesund

$$\Rightarrow \text{Model : } k_{i+1} = \alpha \cdot k_i \cdot (1 - k_i)$$

Was ist ein Iterationsverfahren

Iterationsverfahren

```
Startpunkt  $x_0 \in \mathbb{R}^n$   
for  $k = 0, 1 \dots$  do  
     $x_{k+1} = \Phi(x_k)$   
end for
```

mit der Iterationsfunktion $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Anwendungen

- Nullstellensuche, z.B. Newtonverfahren: $\Phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$
- Lösen von großen linearen Gleichungssystemen, z.B. Richardson-Verfahren:

$$\Phi(x) = x + (b - Ax)$$

Was ist ein Iterationsverfahren

Das Iterationsverfahren erzeugt eine Folge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$:

$$x_1 = \Phi(x_0)$$

$$x_2 = \Phi(x_1)$$

$$x_3 = \Phi(x_2)$$

$$\vdots$$

Was wollen wir über das Iterationsverfahren wissen?

- Konvergiert das Verfahren überhaupt? → Banachscher Fixpunktsatz
- Gegen welchen Wert konvergiert es? → Fixpunkt
- Wie schnell konvergiert das Verfahren? → Konvergenzordnung

Gegen was konvergiert das Iterationsverfahren?

Fixpunktiteration

Sei Φ *stetig* und konvergiere die Folge x_k eines Iterationsverfahrens gegen einen Punkt \bar{x} . Dann ist \bar{x} ein Fixpunkt von Φ . Also:

$$\left[\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \bar{x} \right] \Rightarrow \left[\Phi(\bar{x}) = \bar{x} \right]$$

Beweis:

$$\bar{x} = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{k+1} = \lim_{k \rightarrow \infty} \Phi(x_k) = \Phi\left(\lim_{k \rightarrow \infty} x_k\right) = \Phi(\bar{x})$$



Gegen was konvergiert das Iterationsverfahren?

Fixpunktiteration

Sei Φ *stetig* und konvergiere die Folge x_k eines Iterationsverfahrens gegen einen Punkt \bar{x} . Dann ist \bar{x} ein Fixpunkt von Φ . Also:

$$\left[\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \bar{x} \right] \Rightarrow \left[\Phi(\bar{x}) = \bar{x} \right]$$

Beweis:

$$\bar{x} = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{k+1} = \lim_{k \rightarrow \infty} \Phi(x_k) = \Phi\left(\lim_{k \rightarrow \infty} x_k\right) = \Phi(\bar{x})$$

Wie finde ich Fixpunkte?

rechnerisch $\Phi(x)$ mit x gleichsetzen, nach x auflösen



Gegen was konvergiert das Iterationsverfahren?

Fixpunktiteration

Sei Φ *stetig* und konvergiere die Folge x_k eines Iterationsverfahrens gegen einen Punkt \bar{x} . Dann ist \bar{x} ein Fixpunkt von Φ . Also:

$$\left[\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \bar{x} \right] \Rightarrow \left[\Phi(\bar{x}) = \bar{x} \right]$$

Beweis:

$$\bar{x} = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{k+1} = \lim_{k \rightarrow \infty} \Phi(x_k) = \Phi\left(\lim_{k \rightarrow \infty} x_k\right) = \Phi(\bar{x})$$

Wie finde ich Fixpunkte?

rechnerisch $\Phi(x)$ mit x gleichsetzen, nach x auflösen

graphisch Die Fixpunkte sind die Schnittpunkte von $\Phi(x)$ mit der Funktion $f(x) \equiv x$

Gegen was konvergiert das Iterationsverfahren?

Fixpunkte rechnerisch bestimmen

Kindergarten Model $k_{i+1} = \alpha \cdot k_i \cdot (1 - k_i) \Rightarrow \Phi(x) = \alpha x(1 - x)$

Fixpunkte

$$\Phi(\bar{x}) = \bar{x}$$

$$\Rightarrow \alpha \bar{x}(1 - \bar{x}) = \bar{x} \rightarrow \bar{x}_1 = 0$$

$$\Rightarrow \alpha(1 - \bar{x}) = 1 \rightarrow \bar{x}_2 = \frac{\alpha - 1}{\alpha}$$

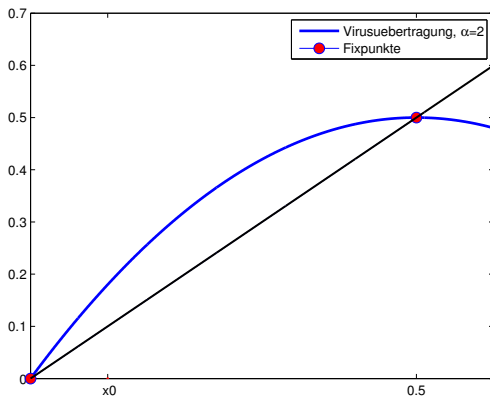
Beispiel mit $\alpha = 2$ gilt $\bar{x}_2 = 0.5$

Zeitpunkt	t_0	t_1	t_2	t_3	t_4
Anteil kranker Kinder	0.1	0.18	0.30	0.42	0.49

Gegen was konvergiert das Iterationsverfahren?

Fixpunkte und Iteration graphisch bestimmen

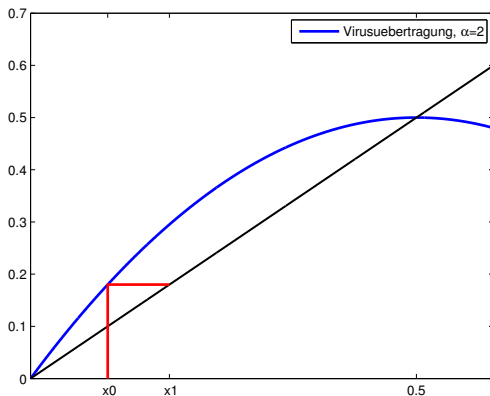
Die Fixpunkte sind die Schnittpunkte von $\Phi(x)$ mit der Funktion $f(x) \equiv x$



Gegen was konvergiert das Iterationsverfahren?

Fixpunkte und Iteration graphisch bestimmen

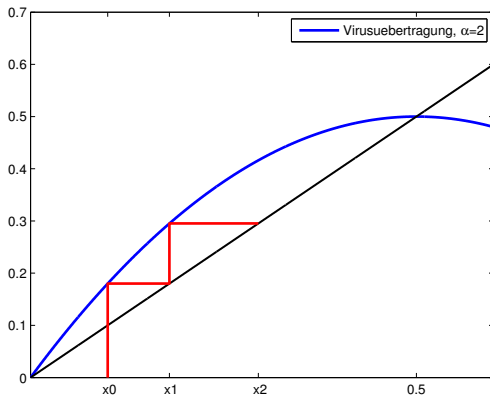
Die Fixpunkte sind die Schnittpunkte von $\Phi(x)$ mit der Funktion $f(x) \equiv x$



Gegen was konvergiert das Iterationsverfahren?

Fixpunkte und Iteration graphisch bestimmen

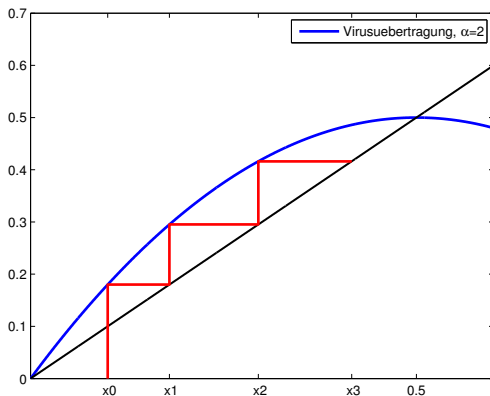
Die Fixpunkte sind die Schnittpunkte von $\Phi(x)$ mit der Funktion $f(x) \equiv x$



Gegen was konvergiert das Iterationsverfahren?

Fixpunkte und Iteration graphisch bestimmen

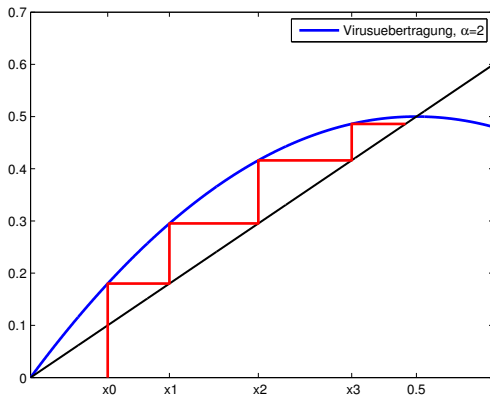
Die Fixpunkte sind die Schnittpunkte von $\Phi(x)$ mit der Funktion $f(x) \equiv x$



Gegen was konvergiert das Iterationsverfahren?

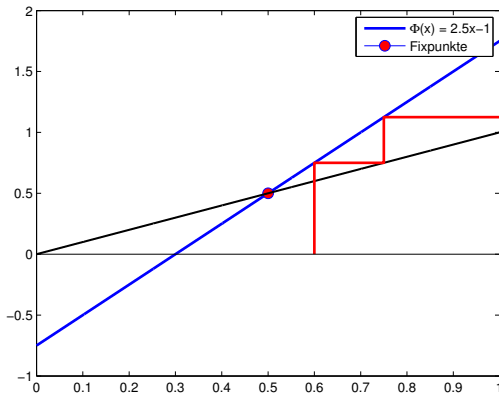
Fixpunkte und Iteration graphisch bestimmen

Die Fixpunkte sind die Schnittpunkte von $\Phi(x)$ mit der Funktion $f(x) \equiv x$



Gegen was konvergiert das Iterationsverfahren?

Divergentes Verhalten



Konvergiert das Verfahren überhaupt?

Banach'scher Fixpunktsatz

- I sei ein abgeschlossenes Intervall
- Φ sei eine Kontraktion, d.h.
 - $\Phi(I) \subseteq I$
 - \exists Lipschitz-Konstante $L \in [0, 1)$ mit

$$\forall x, y \in I : |\Phi(x) - \Phi(y)| \leq L|x - y|$$

Dann konvergiert das Iterationsverfahren für ein $x_0 \in I$ gegen den eindeutigen Fixpunkt $\bar{x} \in I$.



Banach'scher Fixpunktsatz: Beweis (1)

Sei $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ die vom Iterationsverfahren erzeugte Folge.

$(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ist eine **Cauchy-Folge**

$$\begin{aligned} \forall x, y \in I : |x - y| &\leq |x - \Phi(x)| + |\Phi(x) - \Phi(y)| + |\Phi(y) - y| && \text{(Dreiecksungleichung)} \\ &\leq |x - \Phi(x)| + L \cdot |x - y| + |\Phi(y) - y| && \text{(Kontraktion)} \\ \Rightarrow |x - y| &\leq \frac{|x - \Phi(x)| + |\Phi(y) - y|}{1 - L} \end{aligned}$$



Banach'scher Fixpunktsatz: Beweis (1)

Sei $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ die vom Iterationsverfahren erzeugte Folge.

$(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ist eine **Cauchy-Folge**

$$\begin{aligned} \forall x, y \in I : |x - y| &\leq |x - \Phi(x)| + |\Phi(x) - \Phi(y)| + |\Phi(y) - y| && \text{(Dreiecksungleichung)} \\ &\leq |x - \Phi(x)| + L \cdot |x - y| + |\Phi(y) - y| && \text{(Kontraktion)} \\ \Rightarrow |x - y| &\leq \frac{|x - \Phi(x)| + |\Phi(y) - y|}{1 - L} \end{aligned}$$

Damit ergibt sich für den Abstand zweier Iterierter x_k und x_m :

$$\begin{aligned} |x_k - x_m| &\leq \frac{|x_k - x_{k+1}| + |x_{m+1} - x_m|}{1 - L} \\ &\leq \frac{L^k |x_0 - x_1| + L^m |x_1 - x_0|}{1 - L} \\ &= \frac{L^k + L^m}{1 - L} |x_1 - x_0| \end{aligned}$$



Banach'scher Fixpunktsatz: Beweis (2)

$$|x_k - x_m| \leq \frac{L^k + L^m}{1 - L} |x_1 - x_0|$$

Damit lässt sich der Abstand zwischen zwei Iterierten für genügend große Indizes beliebig verkleinern.

$\Rightarrow (x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ist eine Cauchy-Folge



Banach'scher Fixpunktsatz: Beweis (2)

$$|x_k - x_m| \leq \frac{L^k + L^m}{1 - L} |x_1 - x_0|$$

Damit lässt sich der Abstand zwischen zwei Iterierten für genügend große Indizes beliebig verkleinern.

$\Rightarrow (x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ist eine Cauchy-Folge

$(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ **konvergiert in I**

- In \mathbb{R} konvergieren Cauchy-Folgen $\rightarrow (x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ konvergiert
- I ist abgeschlossen \rightarrow der Grenzwert $\bar{x} := \lim_{k \rightarrow \infty} x_k$ liegt auch in I .



Banach'scher Fixpunktsatz: Beweis (3)

Der Grenzwert $\bar{x} := (x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ist ein eindeutiger Fixpunkt

- eine Kontraktion ist stetig $\rightarrow \bar{x}$ ist ein Fixpunkt von Φ (siehe Folie 5)
- Sei $y \neq \bar{x}$ ein weiterer Fixpunkt in I . Dann gilt

$$|\bar{x} - y| = |\Phi(\bar{x}) - \Phi(y)| \leq L|\bar{x} - y| < |\bar{x} - y|.$$

Das ist ein Widerspruch $\rightarrow \bar{x}$ ist eindeutig



Konvergiert das Verfahren überhaupt?

Banach'scher Fixpunktsatz, vereinfacht

- I sei ein abgeschlossenes Intervall
- $\Phi(I) \subseteq I$
- Sei Φ in I differenzierbar.
- Gelte $\forall x \in I : |\Phi'(x)| < 1$ ($L := \max_{x \in I} |\Phi'(x)|$)

Dann konvergiert das Iterationsverfahren für ein $x_0 \in I$ gegen den eindeutigen Fixpunkt $\bar{x} \in I$.



Konvergiert das Verfahren überhaupt?

Banach'scher Fixpunktsatz, vereinfacht

- I sei ein abgeschlossenes Intervall
- $\Phi(I) \subseteq I$
- Sei Φ in I differenzierbar.
- Gelte $\forall x \in I : |\Phi'(x)| < 1$ ($L := \max_{x \in I} |\Phi'(x)|$)

Dann konvergiert das Iterationsverfahren für ein $x_0 \in I$ gegen den eindeutigen Fixpunkt $\bar{x} \in I$.

Beweis

Mittelwertsatz:

$$\forall x, y \in I \exists z \in [x, y] : \Phi(x) = \Phi(y) + \Phi'(z)(x - y)$$

Daraus folgt:

$$|\Phi(x) - \Phi(y)| \leq \max_{z \in I} |\Phi'(z)| \cdot |x - y| = L|x - y|$$



Konvergiert das Verfahren überhaupt?

Folgerung aus Banach'schem Fixpunktsatz

Sei \bar{x} ein Fixpunkt von Φ .

- $|\Phi'(\bar{x})| < 1 \Rightarrow \bar{x}$ anziehend
(d.h. es gibt eine abgeschlossene Umgebung I um \bar{x} , worin der Banach'sche Fixpunktsatz anwendbar ist)
- $|\Phi'(\bar{x})| > 1 \Rightarrow \bar{x}$ abstoßend
- $|\Phi'(\bar{x})| = 1 \Rightarrow$ keine Aussage



Konvergiert das Verfahren überhaupt?

Folgerung aus Banach'schem Fixpunktsatz

Sei \bar{x} ein Fixpunkt von Φ .

- $|\Phi'(\bar{x})| < 1 \Rightarrow \bar{x}$ anziehend
(d.h. es gibt eine abgeschlossene Umgebung I um \bar{x} , worin der Banach'sche Fixpunktsatz anwendbar ist)
- $|\Phi'(\bar{x})| > 1 \Rightarrow \bar{x}$ abstoßend
- $|\Phi'(\bar{x})| = 1 \Rightarrow$ keine Aussage

Beweis:

- Wähle $h > 0$ genügend klein, damit gilt: $L := \max_{z \in I} |\Phi'(z)| < 1$ mit
 $I := [\bar{x} - h, \bar{x} + h]$
- Sei $x \in I \Rightarrow |\Phi(x) - \bar{x}| = |\Phi(x) - \Phi(\bar{x})| \leq L|x - \bar{x}| < h$
 $\Rightarrow \Phi(x) \in I \Rightarrow \Phi(I) \subseteq I$
- Damit ist der Banach'sche Fixpunktsatz anwendbar



Konvergiert das Verfahren überhaupt?

Beispiel: anziehender Fixpunkt

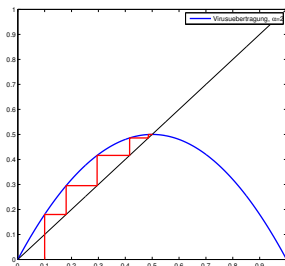
Beispiel Grippevirus: $\Phi(x) = \alpha x(1 - x)$

mit Fixpunkt $\bar{x} = \frac{\alpha - 1}{\alpha}$

für die Ableitung gilt: $\Phi'(\bar{x}) = \alpha - 2\alpha\bar{x} = 2 - \alpha$

\bar{x} ist *anziehend* für $1 < \alpha < 3$

monotone Konvergenz für $\alpha = 1.9$:
(da $\Phi'(\bar{x}) > 0$)



Konvergiert das Verfahren überhaupt?

Beispiel: anziehender Fixpunkt

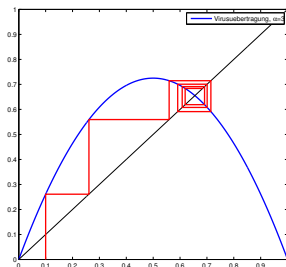
Beispiel Grippevirus: $\Phi(x) = \alpha x(1 - x)$

mit Fixpunkt $\bar{x} = \frac{\alpha - 1}{\alpha}$

für die Ableitung gilt: $\Phi'(\bar{x}) = \alpha - 2\alpha\bar{x} = 2 - \alpha$

\bar{x} ist *anziehend* für $1 < \alpha < 3$

alternierende Konvergenz für $\alpha = 2.9$:
(da $\Phi'(\bar{x}) < 0$)



Konvergiert das Verfahren überhaupt?

Beispiel: abstoßender Fixpunkt

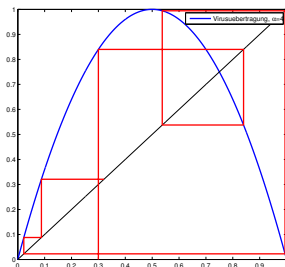
Beispiel Grippevirus: $\Phi(x) = \alpha x(1 - x)$

mit Fixpunkt $\bar{x} = \frac{\alpha - 1}{\alpha}$

für die Ableitung gilt: $\Phi'(\bar{x}) = \alpha - 2\alpha\bar{x} = 2 - \alpha$

\bar{x} ist *abstoßend* für $\alpha < 1$ und $\alpha > 3$

Divergenz für $\alpha = 4$:



Wie schnell konvergiert das Verfahren?

Konvergenzordnung

Ein Verfahren konvergiert

- linear $:\Leftrightarrow |x_{k+1} - \bar{x}| \leq L \cdot |x_k - \bar{x}|$ mit $L < 1$
- von Ordnung $p > 1 : \Leftrightarrow |x_{k+1} - \bar{x}| \leq L \cdot |x_k - \bar{x}|^p$

Beispiel: Abstand der Lösung in jedem Schritt

quadratisch ($p=2$) | 10^{-1} 10^{-2} 10^{-4} 10^{-8}

Mit dem Banach'schen Fixpunktsatz konvergiert das Iterationsverfahren linear

Mit den Voraussetzungen des Banach'schen Fixpunktsatzes gilt:

$$|x_{k+1} - \bar{x}| = |\Phi(x_k) - \Phi(\bar{x})| \leq L \cdot |x_k - \bar{x}|$$

und damit lineare Konvergenz.

