6. Iterationsverfahren

Nullstellenbestimmung

Problemstellung

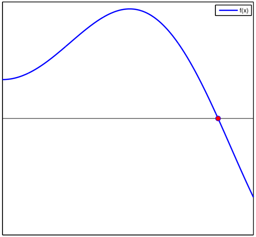
Problemstellung

Gesucht Nullstelle $\overline{x}$ einer Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, d.h. $f(\overline{x}) = 0$

Problem Analytische Berechnung oft nicht möglich (Ausnahme z.B. Mitternachtsformel)

Mögliche Verfahren

- Newton-Verfahren
- Sekanten-Verfahren
- Bisektion
- Regula falsi



Newton-Verfahren

Newton-Iteration

$$\boxed{x_{k+1} := x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}}$$

Herleitung über Taylorentwicklung

Mit der Taylorentwicklung gilt:

$$0 = f(\overline{x}) = f(x_k) + f'(x_k)(\overline{x} - x_k) + \underbrace{O\left((\overline{x} - x_k)^2\right)}_{\text{wird ignoriert}}$$

$$\Rightarrow 0 \approx f(x_k) + f'(x_k)(\overline{x} - x_k)$$

$$\Rightarrow \overline{x} \approx x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Newton-Verfahren

Geometrische Interpretation

Lege Tangente an $f(x)$ durch $f(x_k) \rightarrow x_{k+1} \hat{=}$ Schnitt mit x-Achse.

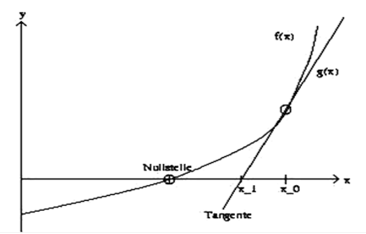
- Geradengleichung der Tangente:

$$g(x) = f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k)$$

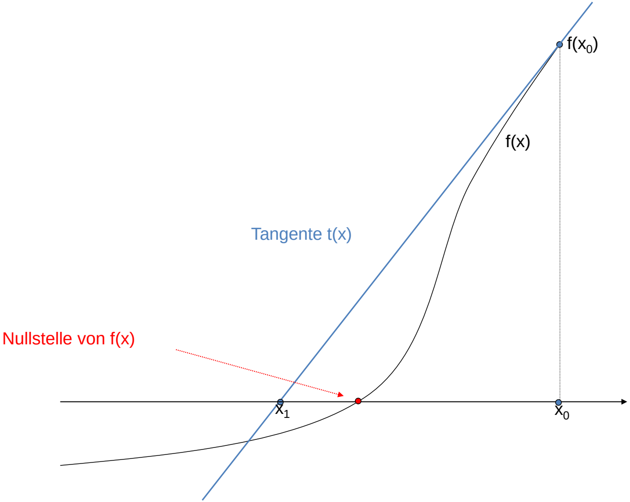
- Schnittpunkt mit x-Achse:

$$g(x) = f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k) \stackrel{!}{=} 0$$

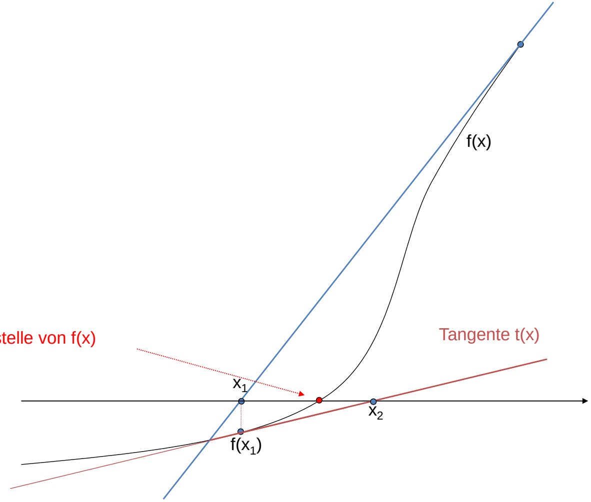
$$\Leftrightarrow x = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$



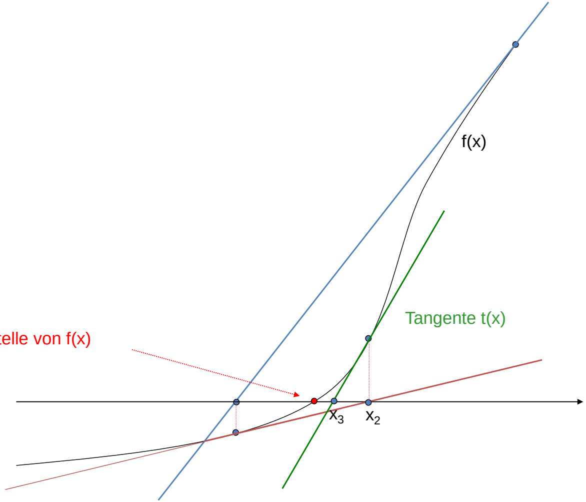
Newton-Verfahren



Newton-Verfahren



Newton-Verfahren



Newton-Verfahren

Quelle: `en.wikipedia.org/wiki/Newton's_method`

Newton-Verfahren

Newton-Verfahren als Fixpunktiteration

Die Iterationsfunktion des Newton-Verfahrens lautet

$$\boxed{\Phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}}.$$

Damit gilt:

- $\overline{x}$ ist *Nullstelle* von $f \Leftrightarrow \overline{x}$ ist *Fixpunkt* von Φ (falls $f'(\overline{x}) \neq 0$)

$$x = \Phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \Leftrightarrow \frac{f(x)}{f'(x)} = 0$$

- $\overline{x}$ ist ein *anziehender* Fixpunkt (falls $f'(\overline{x}) \neq 0$)

$$\Phi'(x) = 1 - \frac{f'^2(x) - f(x)f''(x)}{f'^2(x)} = \frac{f(x)f''(x)}{f'^2(x)}$$

$$|\Phi'(\overline{x})| = 0 < 1$$

Newton-Verfahren

Ist $\overline{x}$ eine einfache Nullstelle, konvergiert das Newtonverfahren lokal quadratisch

- Mit dem Banach'schen Fixpunktsatz folgt lokal lineare Konvergenz.
- Mit der Taylorentwicklung folgt mit einer Zwischenstelle z:

$$0 = f(\overline{x}) = f(x_k) + f'(x_k)(\overline{x} - x_k) + \frac{1}{2} f''(z)(\overline{x} - x_k)^2$$

$$\Rightarrow \overline{x} - (x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}) = -\frac{1}{2}\frac{f''(z)}{f'(x_k)}(\overline{x} - x_k)^2$$

$$\Rightarrow |\overline{x} - x_{k+1}| = |\frac{f''(z)}{2f'(x_k)}| \cdot |\overline{x} - x_k|^2$$

Da $f'(\overline{x}) \neq 0$ gilt, lässt sich $|\frac{f''(z)}{2f'(x_k)}|$ lokal nach oben durch ein L beschränken.

$$\Rightarrow \boxed{|\overline{x} - x_{k+1}| \leq L \cdot |\overline{x} - x_k|^2}$$

Newton-Verfahren

Ist $\overline{x}$ eine m-fache Nullstelle ($m > 1$),
konvergiert das Newtonverfahren nur lokal linear

Sei $\overline{x}$ eine $m-$fache Nullstelle, d.h. $f(x) = (x - \overline{x})^m g(x)$ mit $g(\overline{x}) \neq 0$. Damit lautet die Iterationsfunktion:

$$\begin{aligned}\Phi(x) &= x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{(x-\overline{x})^m g(x)}{m(x-\overline{x})^{m-1}g(x) + (x-\overline{x})^m g'(x)} \\ &= x - \frac{(x-\overline{x})g(x)}{mg(x) + (x-\overline{x})g'(x)}\end{aligned}$$

Daraus folgt für die Ableitung:

$$|\Phi'(\overline{x})| = |1 - \frac{g(\overline{x})}{mg(\overline{x})}| = 1 - \frac{1}{m} < 1$$

$\Rightarrow$ Lokale lineare Konvergenz

Newton-Verfahren

Vorgehen bei $m-$facher Nullstelle

Wende das Newton-Verfahren an auf

- $(m-1)-$te Ableitung von f
- $\frac{f(x)}{f'(x)}$
- $m-$te Wurzel von $|f(x)|$

oder modifiziere die Newton-Formel zu

$$\Phi(x) = x - m\frac{f(x)}{f'(x)} \qquad \text{(dann gilt wieder } \Phi'(\overline{x}) = 0\text{)}$$

Newton-Verfahren

Verallgemeinerung auf den $\mathbb{R}^n$

Gesucht Nullstelle $\overline{x}$ einer Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, d.h.

$$f(\overline{x}) = f(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n) = \begin{pmatrix} f_1(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n) \\ \vdots \\ f_n(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Newtonschritt $\boxed{x_{k+1} = x_k - J^{-1} f(x_k)}$ mit der Jacobi-Matrix J

Sekanten-Verfahren

Iterationsfunktion

$$\boxed{x_{k+1} := x_{k-1} - \frac{f(x_{k-1})(x_k - x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})}}$$

Geometrische Herleitung

Lege Gerade durch $f(x_{k-1})$ und $f(x_k) \to x_{k+1} \hat{=}$ Schnitt mit x-Achse.

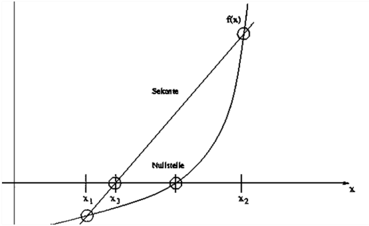
- Geradengleichung der Sekante:

$$g(x) = f(x_{k-1}) + \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$$

- Schnittpunkt mit x-Achse:

$$g(x) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow x = x_{k-1} - \frac{f(x_{k-1})(x_k - x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$$



Sekanten-Verfahren

Quelle: `http://de.wikipedia.org/wiki/Sekantenverfahren`

Sekanten-Verfahren

Iterationsfunktion

$$\boxed{x_{k+1} := x_{k-1} - \frac{f(x_{k-1})(x_k - x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})}}$$

Vergleich mit Newton-Verfahren

Vorteile

- keine Ableitung nötig
- billiger (nur $f(x_k)$ ist pro Schritt neu zu berechnen)

Nachteile

- Probleme wenn Nenner ≈ 0
- Konvergenzordnung nur $1 < p < 2$

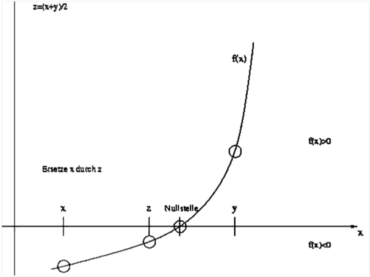
Bisektion

Ausgangspunkt

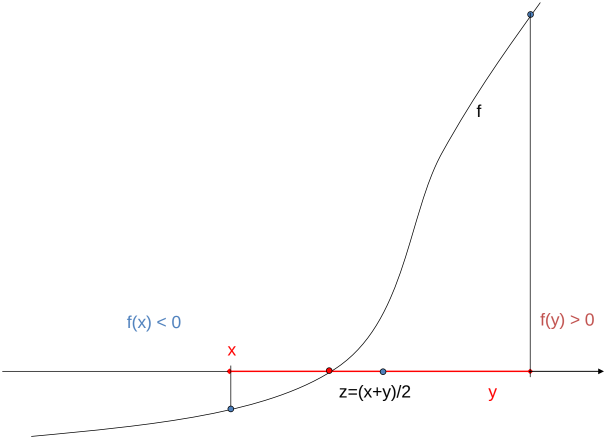
- Starte mit Intervall $[x, y]$, wobei gilt: $f(x)$ und $f(y)$ haben verschiedene Vorzeichen.
- Damit liegt für ein stetiges f eine Nullstelle in $[x, y]$

Iterationsschritt

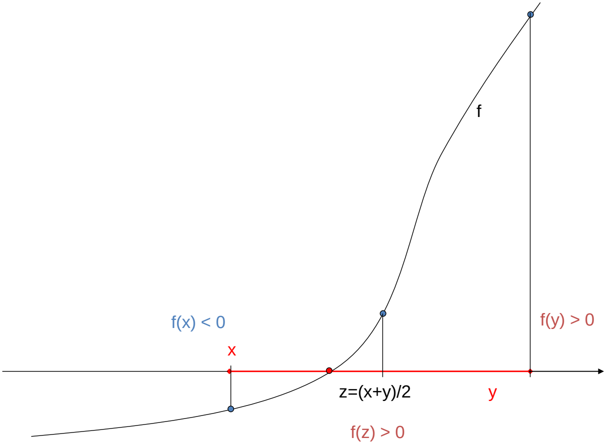
- Sei $z = \frac{x+y}{2}$ die Mitte des Intervalls. Berechne $f(z)$.
-
  - Gilt $f(z) = 0 \rightarrow$ fertig
  - Ist $f(x) \cdot f(z) > 0 \rightarrow x := z$
  - Ist $f(y) \cdot f(z) > 0 \rightarrow y := z$
- Im neuen Intervall $[x, y]$ liegt immer noch eine Nullstelle.
- Intervall wird in jeder Iteration halbiert $\rightarrow$ lineare Konvergenz



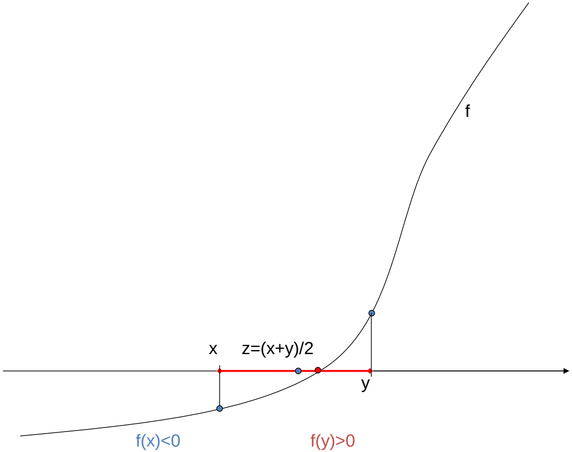
Bisektion



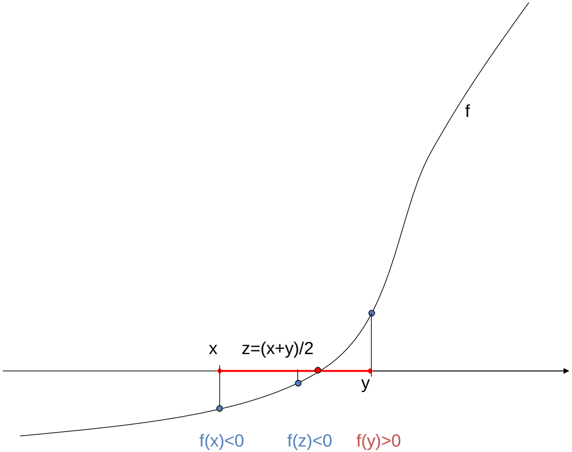
Bisektion



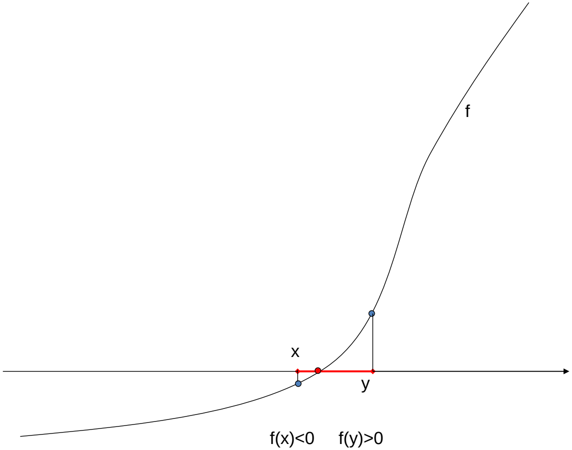
Bisektion



Bisektion



Bisektion



Bisektion

Quelle: `http://de.wikipedia.org/wiki/Bisektion`