Technische Universität München
Institut für Informatik
Prof. Dr. Thomas Huckle
Nikola Tchipev
Felix Dietrich

SoSe 2015

Numerisches Programmieren, Übungen

3. Übungsblatt: Gaußelimination mit Pivotsuche, LR-Zerlegung, Matrixnorm

1) Gauß-Elimination und Pivotsuche

Lösen Sie das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} -10^{-3} & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit der Gauß-Elimination:

a) Ohne Spalten-Pivotsuche in exakter Arithmetik (d.h. keine Zeilenvertauschungen und ohne Runden rechnen)

b) Ohne Spalten-Pivotsuche und mit Rundungsfehlern (korrektes Runden in dezimaler Gleitkomma-Darstellung mit 3 signifikanten Stellen. Bsp.: $0.01236 = 1.236 \cdot 10^{-2}$ ergibt 0.0124).

c) Mit Spalten-Pivotsuche und mit Rundungsfehlern wie in b).

2) LR-Zerlegung

In dieser Aufgabe wollen wir den Algorithmus der LR-Zerlegung aus der Vorlesung an Beispielen nachvollziehen und vergleichen.

Die LR-Zerlegung zur Lösung eines linearen Gleichungssystems $Ax = b$ besteht aus drei Teilen:

1. **Zerlegung der Matrix** A: $A = L \cdot R$
2. **Vorwärtssubstitution**: $Ly = b$
3. **Rückwärtssubstitution**: $Rx = y$

a) Lösen Sie unter Verwendung der Gauß-Elimination das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

b) Berechnen Sie die LR-Zerlegung (1.) der Matrix A.

c) Führen Sie nun zur Lösung von $Ax = b$ die Vorwärts- und Rückwärtssubstitution (2.) und (3.) durch. Verwenden Sie den Vektor b aus Teilaufgabe a).

d) Setzen Sie die LR-Zerlegung ebenfalls zur Lösung von $Ax = c$ mit $c = (2, 1, 2)^T$ ein. Wie groß ist der zusätzliche Aufwand?

3) Matrixnorm

Die Matrix-Grenzen-Norm-2 (auch als Spektralnorm bekannt) ist eine der wichtigsten Matrixnormen:

$$\|A\|_2 = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2}$$

wobei die Vektornorm $\|\cdot\|_2$ die bekannte Euklidische Länge entspricht:

$$\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}.$$

Zeigen Sie, dass **für eine diagonale Matrix** D gilt:

$$\|D\|_2 = \max_{i=1,\ldots,n} |d_{ii}|.$$

Hinweis: Sei j so dass $|d_{jj}| = \max_{i=1,\ldots,n} |d_{ii}|$. Zeigen Sie:

a) $\|D\|_2 \geq |d_{jj}|$ (Betrachten Sie ein Eigenvektor zu Eigenwert d_{jj}),

b) $\|D\|_2 \leq |d_{jj}|$.

(Im Allgemeinen, die 2-Norm von A ist gleich dem größten Singulärwert von A: $\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{max}(A^TA)} = \sigma_{max}(A)$.)

4) Orthogonale Matrizen

Eine Matrix Q heißt Orthogonal, wenn gilt

$$QQ^T = Q^TQ = I,$$

wobei I die Einheitsmatrix entspricht.

Zeigen Sie die folgenden Eigenschaften orthogonaler Matrizen:

a) $\det Q = \pm 1$,

b) $\|Q\|_2 = 1$.

Hinweis: Verwenden Sie $\det(AB) = \det A \det B$ und $\|x\|_2 = \sqrt{x^Tx}$.

Zusatz: Wie stellen sich diese Eigenschaften für 2×2 diagonale Matrizen graphisch dar? Zeichnen Sie die Kurven $\det D = \pm 1$, und $\|D\|_2 = 1$ in einem Diagramm von d_{22} gegen d_{11}.

Zusatzaufgabe: Image Stitching mit Gauß-Elimination

In dieser Aufgabe verwenden wir die Gauß-Elimination zum Lösen linearer Gleichungssysteme im Bereich des Rechnersehens. Eine der Aufgaben, die durch Techniken der Bildverarbeitung bewältigt werden, ist das Zusammensetzen von Einzelbildern (engl. image stiching) bzw. die Erzeugung von Panoramabildern.

Will man zwei Bilder I_1 und I_2 "aneinandernähen", detektiert der entsprechende Algorithmus zunächst sogenannte Merkmalpunkte (engl. feature points) in beiden Bildern. Unter der Annahme, dass beide Bilder einen gemeinsamen Teil einer Szenerie zeigen, gibt es solche Merkmalpunkte in beiden Bildern. Anschließend findet eine Verknüpfung der Merkmalpunkte im ersten Bild I_1 mit den zugehörigen Punkten im Bild I_2 statt, wie in Abbildung 1 gezeigt.

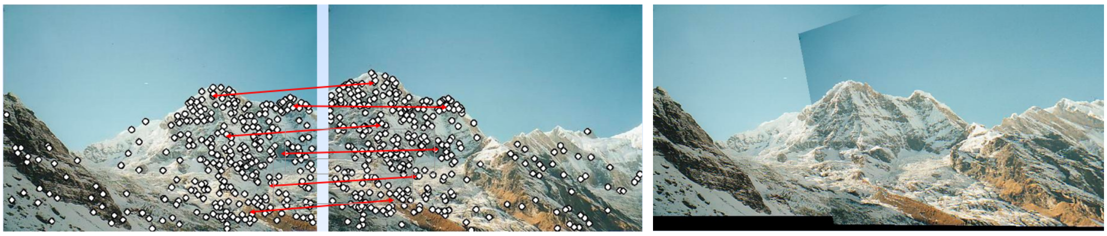

Abbildung 1: Image stiching.

In der Praxis treten viele Fehler beim Finden gemeinsamer Bildmerkmale auf. Allerdings gehen wir hier von perfekten Beziehungen zwischen den Punkten aus. Da sich die Punkte in der Bildebene befinden, existiert eine lineare Transformation H (im Englischen als homomorphy bezeichnet), die die Mengen von Merkmalpunkten aufeinander abbildet. Bezeichnet man die Merkmalpunkte in Bild I_1 als $\mathbf{x}_i, i = 1, \dots n$ und in Bild I_2 als $\mathbf{x}_i^{'}, i = 1, \dots n$, so kann die Korrespondenz zwischen ihnen durch $\mathbf{x}^{'} = H\mathbf{x}$ ausgedrückt werden.

Aufgabe: Gegeben seien die beiden Punktepaare

I_1	I_2
$x_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$	$x_1{}' = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$
$x_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$	$x_2{}' = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

.

Bestimmen Sie die entsprechende 2x2-Transformationsmatrix H.