Technische Universität München
Institut für Informatik
Prof. Dr. Thomas Huckle
Nikola Tchipev
Felix Dietrich

SoSe 2015

Numerisches Programmieren, Übungen

12. Übungsblatt: Klausurvorbereitung

1) Gleitkomma-Arithmetik (Klausuraufgabe aus dem WiSe 2009/10)

a) Bei der Lösung mathematischer Probleme im Computer lassen sich Diskretisierungsfehler nicht vermeiden. Dies beginnt schon beim Übergang in ein diskretes Zahlensystem wie das der Gleitkommazahlen.

In dieser Aufgabe gehen wir von einer Darstellung durch Gleitkommazahlen $\mathbb{F}_{B,t}$ der folgenden Form aus:

- Sei $B = 10$ die Basis der Darstellung
- Sei M die Mantisse zur Basis B mit $t = 4$ Stellen
- Sei E der Exponent (in beliebiger Darstellung)

Die Umrechnung eines Tupels (M, E) in die reellen Zahlen erfolgt dann über die Formel

$$(M, E)_{(\mathbb{F}_{10,4})} = (0, m_0 m_1 m_2 m_3 \cdot 10^E)_{(10)},$$

wobei die Eindeutigkeit der Darstellung durch die implizite 0 vor der Mantisse sowie die Forderung $m_0 \neq 0$ sichergestellt wird.

Stellen Sie die Hexadezimalzahl $(40a)_{(16)}$ im $\mathbb{F}_{10,4}$-System dar. Ist diese Darstellung exakt?

b) Rechnen Sie die reelle Zahl $\frac{43}{8}$ in eine Festkommazahl mit den folgenden Spezifikationen um!

- Die Darstellung erfolgt bezüglich der Basis 2.
- Das Vorzeichen wird explizit als "+" oder "−" angegeben.
- Die Darstellung besitzt genau eine Nachkommastelle.
- Es wird möglichst genau gerundet. Im uneindeutigen Fall wird abgerundet.

2) Interpolation (Klausuraufgabe aus dem WiSe 2010/11)

a) Gegeben sind die folgenden Stützpunkte:

$$P_0(6{,}2) \quad P_1(4{,}2) \quad P_2(2{,}3)$$

Ermitteln Sie den Funktionswert des durch die Stützpunkte (P_0, P_1, P_2) verlaufenden Polynoms p_0 an der Stelle $\tilde{x}_0 = 5$. Wählen Sie ein Verfahren, welches für die Erhöhung der Anzahl von Stützstellen sowie der Auswertung der Funktion an verschiedenen Stellen besonders geeignet ist.

Hinweis: Beachten Sie bei der Wahl Ihres Verfahrens, dass Sie in b) einen Stützpunkt P_3 hinzufügen werden und das resultierende Polynom p_1 an einer **anderen** Stelle $\tilde{x}_1$ auswerten müssen.

b) Erweitern Sie die in a) aufgestellte Interpolationsfunktion derart, dass Sie durch den Stützpunkt $P_3 = (3, 2)$ verläuft. Ermitteln Sie den Wert der resultierenden Interpolationsfunktion p_1 an der Stelle $\tilde{x}_1 = 2$.

c) Von einer zu interpolierenden Funktion seien an 20 Stützstellen die Funktionswerte gegeben. Zu diesen 20 Stützpunkten soll nun eine interpolierende Funktion ermittelt werden, die außerdem global mindestens zweimal stetig differenzierbar ist.
Nennen Sie zwei verschiedene interpolierende Funktionen, die die Anforderungen erfüllen. Welches dieser Verfahren ist Ihrer Meinung das bessere? Begründen Sie **kurz** Ihre Antwort.

3) Fixpunktiteration (Klausuraufgabe aus dem SoSe 2010)

Gegeben sei die Funktion

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{1+x}{2+x}. \tag{1}$$

a) Zeigen Sie, dass gilt:

$$g'(x) = \frac{1}{(2+x)^2}.$$

Sie können dieses Ergebnis in den nachfolgenden Teilaufgaben verwenden.

b) Bestimmen Sie alle Fixpunkte von g graphisch und tragen Sie die ersten 3 Schritte der Fixpunkt-Iteration für den Startwert $x_0 = -1$ in die nachfolgende Abbildung 1 ein, welche die Funktion g im Intervall $[-2, 2]$ zeigt. Es sind keine Berechnungen notwendig. Lösen Sie diese Aufgabe graphisch!

c) Ermitteln Sie nun alle Fixpunkte von g analytisch und bestimmen Sie jeweils, ob sie anziehend oder abstoßend sind!

d) Zeigen Sie die folgenden Eigenschaften der Funktion g:

i) $x \in [0, 1] \;\Rightarrow\; g(x) \in [0, 1]$

ii) $\forall x \in [0, 1] : \; |g'(x)| < 1$

Es ist nicht ausreichend, anhand der Abbildung von Teilaufgabe b) zu argumentieren!

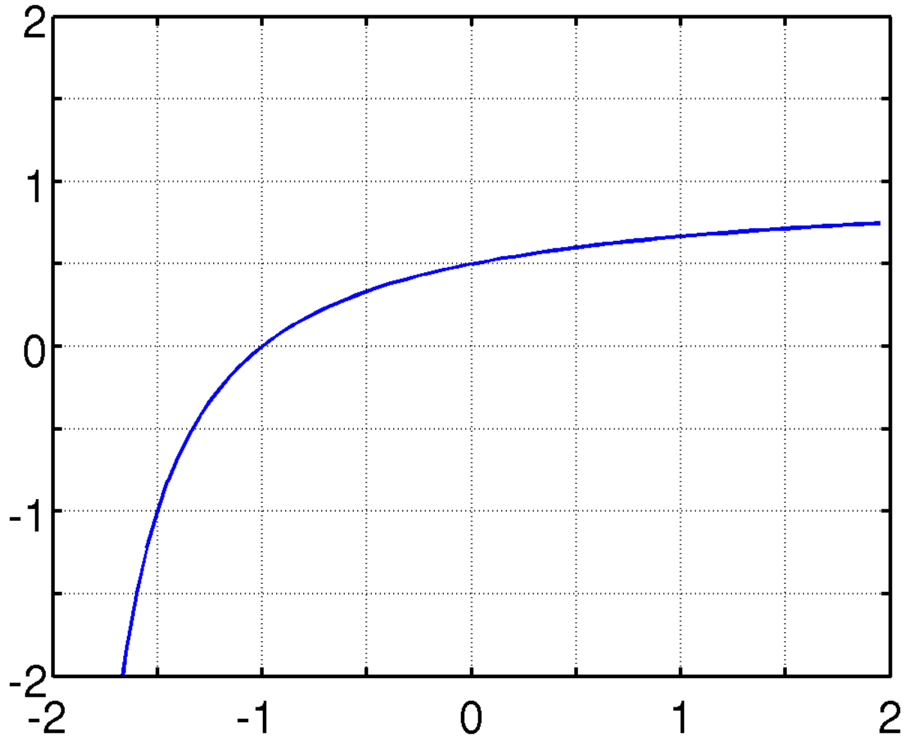

Abbildung 1: Tragen Sie hier grafisch die Fixpunkte von g sowie die ersten drei Schritte der Fixpunktiteration für den Startwert $x_0 = -1$ ein.

e) Wenden Sie den Banach'schen Fixpunktsatz im Intervall $I = [0, 1]$ an: Prüfen Sie zunächst alle Voraussetzungen. Was lässt sich dann folgern?

Hinweis: Nutzen Sie Ergebnisse vorheriger Teilaufgaben!

4) Abstiegsverfahren (Klausuraufgabe aus dem WiSe 2011/12)

a) In dieser Teilaufgabe soll das Verständnis rund um Abstiegsverfahren getestet werden. Antworten Sie auf die Fragen in wenigen Sätzen.

   (i) Für welchen Fall konvergiert das *Verfahrens des steilsten Abstiegs* (steepest descent) in nur einer Iteration? Hierbei ist **nicht** der triviale Fall gemeint, in dem der Startwert $x^{(0)}$ bereits der exakten Lösung x^* entspricht.

   (ii) Wie ist das Konvergenzverhalten des *Verfahrens des steilsten Abstiegs* allgemein (eine Antwort in der Form "gut" oder "schlecht" ist hier bereits ausreichend)?

   Sollte Ihre Antwort "gut" sein: Begründen Sie kurz Ihre Antwort!
   Sollte Ihre Antwort "schlecht" sein: Nennen Sie eine Möglichkeit, das Konvergenzverhalten zu verbessern!

   (iii) Eigentlich ist das *Verfahrens des steilsten Abstiegs* eine numerische Methode zum Finden von lokalen Minima von Funktionen. Hier wird es jedoch zur Lösung von Linearen Gleichungssystemen mit symmetrischen und positiv definiten Systemmatrizen A verwendet. Skizzieren Sie kurz die Transformation des Problems "löse Lineares Gleichungssystem mit symmetrischer und positiv definiter Systemmatrix $Ax = b$" in "finde Minimum einer Funktion $f(x)$"! Ein Beweis, warum diese Transformation zulässig ist, ist **nicht** notwendig.

b) Optimale Schrittweite des *Verfahrens des steilsten Abstiegs*
Betrachten Sie die quadratische Funktion

$$f(x) = \frac{1}{2}x^T Ax - b^T x + c, \tag{2}$$

wobei die Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ positiv symmetrisch definit sei.

Finden Sie die optimale Schrittweite α_k eines Iterationsschrittes

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha_k d^{(k)}$$

der Methode des steilsten Abstiegs. Dabei bezeichnet $d^{(k)} := -\nabla f(x^{(k)})$ die Suchrichtung.